

分段线性电路切换系统的复杂行为及非光滑分岔机理*

吴立锋¹⁾ 关永¹⁾ 刘勇^{2)†}

1) (首都师范大学信息工程学院, 北京 100048)

2) (盐城师范学院数学科学学院, 盐城 224002)

(2013年3月4日收到; 2013年3月26日收到修改稿)

分析了分段线性电路系统在周期切换下的复杂动力学行为及其产生的机理. 基于平衡点分析, 给出了两子系统 Fold 分岔和 Hopf 分岔条件. 考虑了在不同稳定态时两子系统周期切换的分岔特性, 产生了不同的周期振荡, 并揭示了其产生的机理. 在不同的周期振荡中, 切换点的数量随参数变化产生倍化, 导致切换系统由倍周期分岔进入混沌.

关键词: 分段线性电路, 切换系统, 非光滑分岔

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 84.30.-r

DOI: 10.7498/aps.62.110510

1 引言

近几十年来, 由于非线性电路系统容易在实验室构建, 同时实验平台也是分析非线性电路系统的手段之一, 其动力学行为受到许多学者的广泛关注, 并成为当前国内外研究的热点课题之一^[1-5]. 不同领域的科研人员都致力于该课题的研究, 开展了相关的理论分析和数值仿真, 并和实验结果进行比较, 取得了大量的研究成果^[6-10].

在物理、化学、生物等自然科学以及实际工程中的许多问题都存在相同子系统或不同子系统之间的切换^[11-13], 如 DC/DC 中的开关、控制系统中的开关^[14]、反应催化系统中的自激振荡^[15]、心脏舒张收缩过程^[16]等. 切换系统一般是由一系列子系统和描述子系统之间的切换规律构成, 至少含有两个子系统, 它是一类特殊的非光滑系统^[17-19]. 切换系统大致可以分为两类, 一类是按时间规律切换, 另一类是按状态变量规律切换^[20]. 这类在子系统之间的切换会导致整个系统产生各种复杂的动

力学行为, 即使是两个简单子系统之间的切换, 也会由于切换产生非常复杂的振荡现象, 甚至使整个系统处于混沌状态.

随着科学技术的发展, 切换系统得到了广泛应用, 由于在不同切换系统中存在非常复杂的动力学行为, 大批学者对其复杂性及其非光滑分岔机理展开了大量的研究. Branicky 研究了由多个连续子系统构成的切换系统的稳定性^[21], Xu 和 Antsaklis 分析了二阶切换系统在不同特征值分布下系统的稳定性^[22], 高超、毕勤胜和张正娣讨论了跃变电路切换系统的复杂振荡及分岔机理^[23]. 迄今为止, 虽然对切换电路系统的复杂性及分岔机理研究取得了许多成果, 但相关成果几乎都是基于线性光滑子系统构成的切换系统, 很少涉及到非光滑不同子系统构成的切换系统的复杂行为及其非光滑分岔机理.

本文考虑非光滑电路切换系统, 选取两个不同的分段线性电路系统作为切换系统的子系统, 采用开关控制实现两个子系统之间的切换, 分析非光滑因素和切换对系统动力学的影响, 揭示其复杂振荡产生的分岔机理.

* 国家自然科学基金(批准号: 61070049, 61202027)、国际科技合作资金(批准号: 2012DFA11340)和北京市自然科学基金(批准号: 4122015)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yongliumath@hotmail.com

2 电路模型

为了分析分段线性电路切换系统的复杂行为及其非光滑分岔机理, 考虑 Jerk 电路系统 (A 子系统)^[24] 和非线性电容双涡卷电路系统 (B 子系统)^[25] 之间在周期 T 切换下的复杂动力学特征, 为此我们引入开关 SW, 使系统在 A 子系统与 B 子系统之间切换 (见图 1). 当开关 SW 处于开状态时, 对应于 A 子系统, 其电路图如图 2 所示; 当开关处于关状态时, 对应于 B 子系统, 其电路图如图 3 所示. 切换系统的无量纲数学模型可表示为

A 子系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= az - y + (|x| - 1), \end{aligned} \quad (1)$$

$$t \in [2nT, (2n+1)T], \quad n \in N, \quad (2)$$

B 子系统:

$$\dot{x} = \alpha[(\gamma - 1)g(x) + y],$$

$$\dot{y} = g(x) - y + z,$$

$$\dot{z} = -\beta y. \quad (3)$$

$$g(x) = bx + \frac{1}{2}(b-a)(|x-1| - |x+1|),$$

$$t \in [(2n+1)T, 2(n+1)T], \quad n \in N. \quad (4)$$

开始时刻 $t = 2nT, n \in N$, 开关处于开状态, 切换系统在 A 子系统中振荡. 当 $t = (2n+1)T, n \in N$ 时, 开关从开状态切换到关状态, 切换系统进入 B 子系统振荡. 由于该切换系统采用的是时间切换规则, 整个系统在两个子系统之间做周期 T 切换, 从而导致系统存在一类非光滑点, 即切换点, 连接 A 与 B 子系统的轨线, 所以整个系统的动力学行为, 不仅与两个子系统的动力学行为及其分岔模式有关, 而且还与切换规则密切相关. 因此, 在分析切换系统的动力学演化过程时, 需要分析两个子系统的动力学特征及其分岔模式, 同时还要分析在时间切换下整个系统的动力学行为.

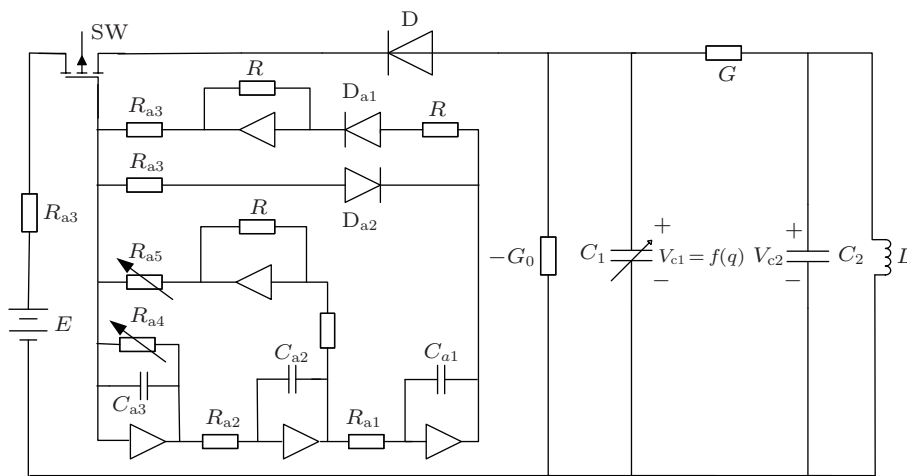


图 1 切换电路系统

3 平衡点分析

A 子系统有两个对称的平衡点 $E_A^\pm = (\pm 1, 0, 0)$, 其对应的特征方程为

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + \lambda \pm 1 = 0. \quad (5)$$

从特征方程可知平衡点 $E_A^+ = (+1, 0, 0)$ 总是不稳定的. 当 $a < -1$ 时, 平衡点 $E_A^- = (-1, 0, 0)$ 为稳定的焦点. 当 $a = -1$ 时, 特征方程有一对共轭的纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i$ 和一个负实根 $\lambda_3 = -1$, 使得 A 子

系统产生超临界 Hopf 分岔, 导致 A 子系统周期振荡, 振荡的频率为 $\Omega_1 = 1$. 当 $a > -1$ 时, 稳定的平衡点经 Hopf 分岔产生周期解, 再由倍周期分岔导致混沌.

B 子系统有两个非光滑的分界面 $\Sigma_{1,2} = \{(x, y, z) | x = \pm 1\}$ 把相空间分成了三个部分

$$V_1 = \{(x, y, z) | x < -1\},$$

$$V_2 = \{(x, y, z) | -1 < x < 1\},$$

$$V_3 = \{(x, y, z) | x > 1\}.$$

在不同的区域中平衡点是不同的, V_1 和 V_3 中的平衡点分别为 $E_B^- = \left(-\frac{b-a}{b}, 0, 0\right)$ 和 $E_B^+ = \left(\frac{b-a}{b}, 0, 0\right)$, E_B^- 和 E_B^+ 关于 $yo z$ 坐标平面对称, V_2 中的平衡点为 $E_B^0 = (0, 0, 0)$. 这些平衡点的性质可以通过各自特征多项式的特征值来确定.

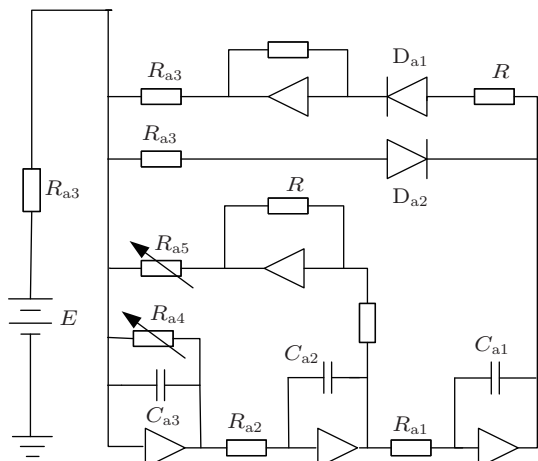


图2 A子系统

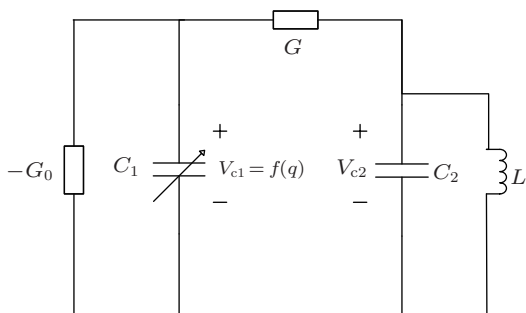


图3 B子系统

平衡点 $E_B^0 = (0, 0, 0)$ 的特征多项式为

$$\lambda^3 + [1 - \alpha(\gamma - 1)a]\lambda^2 + (\beta - \alpha\alpha\gamma)\lambda - \alpha(\gamma - 1)a\beta = 0.$$

根据 Routh-Hurwitz 判定定理可知, 当

$$1 - \alpha(\gamma - 1)a > 0, \quad \beta - \alpha\alpha\gamma > 0, \\ \alpha(\gamma - 1)a\beta < 0$$

且 $\beta - \alpha\alpha\gamma + a^2\alpha^2\gamma(\gamma - 1) > 0$ 时, 特征方程具有负实部的根, 即平衡点 $E_B^0 = (0, 0, 0)$ 是稳定的; 当 $\beta - \alpha\alpha\gamma + a^2\alpha^2\gamma(\gamma - 1) = 0$ 时, 特征方程有一对纯虚根和一个负实根, 即满足此条件时, 子系统 B 产生 Hofp 分岔; 当 $\beta - \alpha\alpha\gamma + a^2\alpha^2\gamma(\gamma - 1) < 0$ 时, 特征方程有一对正实部的复根, 即平衡点 $E_B^0 = (0, 0, 0)$

是不稳定的. 取参数 $a = -1.5, \alpha = 2$, 子系统 B 在平衡点 E_B^0 附近的分岔图如图 4 所示. 由图 4 可知, 当 $a < 0, 0 < \gamma < 1$ 且参数 β 满足上述条件时, 稳定的平衡点 E_B^0 经 Hofp 分岔演化为两个稳定的焦点 E_B^-, E_B^+ 和一个不稳定的平衡点 E_B^0 .

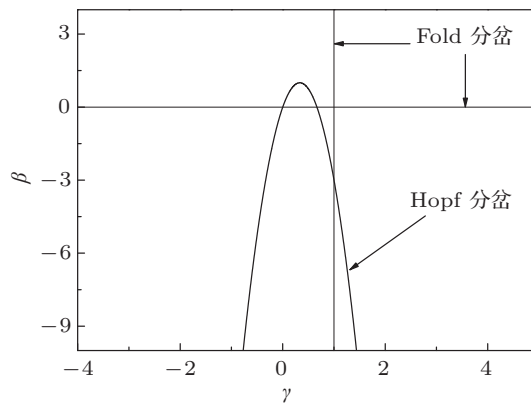


图4 B子系统在平衡点 E_B^0 附近的分岔图

平衡点 $E_B^- = \left(-\frac{b-a}{b}, 0, 0\right)$ 和 $E_B^+ = \left(\frac{b-a}{b}, 0, 0\right)$ 的特征多项式为

$$\lambda^3 + [1 - \alpha(\gamma - 1)b]\lambda^2 + (\beta - b\alpha\gamma)\lambda - \alpha(\gamma - 1)b\beta = 0.$$

根据 Routh-Hurwitz 判定定理可知, 当

$1 - \alpha(\gamma - 1)b > 0, \quad \beta - b\alpha\gamma > 0, \quad \alpha(\gamma - 1)b\beta < 0$ 且 $\beta - b\alpha\gamma + b^2\alpha^2\gamma(\gamma - 1) > 0$ 时, 特征方程具有负实部的根, 即平衡点 $E_B^- = \left(-\frac{b-a}{b}, 0, 0\right)$ 和 $E_B^+ = \left(\frac{b-a}{b}, 0, 0\right)$ 是稳定的; 当 $\beta - b\alpha\gamma + b^2\alpha^2\gamma(\gamma - 1) = 0$ 时, 特征方程有一对纯虚根和一个负实根, 即满足此条件时, 子系统 B 产生 Hofp 分岔; 当 $\beta - b\alpha\gamma + b^2\alpha^2\gamma(\gamma - 1) < 0$ 时, 特征方程有一对正实部的复根, 即 $E_B^- = \left(-\frac{b-a}{b}, 0, 0\right)$ 和 $E_B^+ = \left(\frac{b-a}{b}, 0, 0\right)$ 是不稳定的. 取参数 $b = 0.2, \alpha = 20$, 子系统 B 在平衡点 E_B^+ 附近的分岔图如图 5 所示.

4 切换系统的动力学演化及其机理

当开关 SW 以固定时间间隔 T 在两个子系统之间切换时, 导致切换系统的运动受到两个子系统的控制, 从而会引起复杂的动力学特性. 为了分析切换系统的复杂动力学行为, 我们选取 B 子系统的参数 $\beta = 14, \gamma = 0.5, a = -1, b = 1.5$.

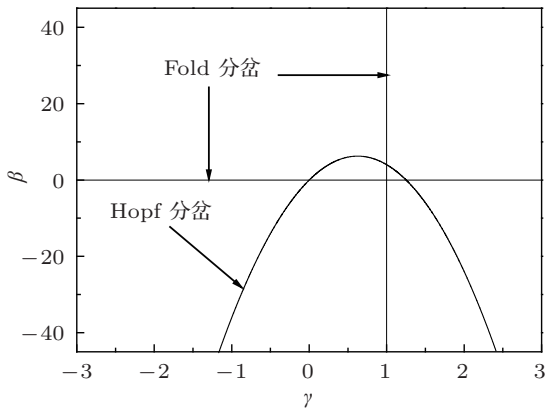


图5 B 子系统在平衡点 E_B^+ 附近的分岔图

4.1 点/环切换周期振荡

当 A 子系统的参数 $a = -0.9$ 时, A 子系统由 Hopf 分岔产生周期振荡. 当 B 子系统的参数 $\alpha = 4$ 时, B 子系统有两个稳定平衡点 $E_B^- = (-\frac{5}{3}, 0, 0)$ 和 $E_B^+ = (\frac{5}{3}, 0, 0)$. 图 6 给出了切换周期 $T = 2$ 时切换系统的振荡特性, 其相应的轨迹存在两个不同的切换点

$$P_1 = (-0.87668, 0.20243, -0.20535),$$

$$P_2 = (-1.49628, 0.31687, 0.16037),$$

分别指向两个子系统. 周期切换的轨道起始点 P_1 在 A 子系统, 在 $[0, T]$ 时间内, 切换系统受 A 子系统控制, 从点 P_1 开始, 轨迹沿 A 子系统的轨线 P_1MP_2 运动, 在未到达切换条件时, 系统一直在 A 子系统内运动, 并向其相应的极限环逐渐逼近. 当系统运动到点 P_2 时, 满足周期切换条件, 切换系统转向 B 子系统, 系统受 B 子系统控制, 即以切换点 P_2 为初值, 进入 B 子系统, 在 $[T, 2T]$ 内, 系统轨迹逐渐逼近 B 子系统的稳定点 $E_B^+ = (\frac{5}{3}, 0, 0)$. 如果不存在切换点, 系统轨迹最终趋于 B 子系统的稳定点 E_B^+ . 但是当 $T = 2T$ 时又满足周期切换条件, 此时系统轨迹刚好回到切换点 P_1 , 导致切换系统再次以 P_1 为初值, 受 A 子系统控制, 趋于 A 子系统的极限环. 上述过程不断重复, 得到周期为 $2T$ 的周期解.

从切换系统的轨迹及其相应的时间历程来看, 可以发现两切换点的非光滑性明显不同, 根据数值仿真可知, 在 P_1 点切换前后的向量场分别为 $(-0.87845, 0.20507, -0.19702)$, $(-0.87804, 0.20467, -0.19732)$, 而 P_2 点切换前后的向量场分别为 $(-1.49704, 0.31677, 0.16481)$,

$(-1.49553, 0.31696, 0.15593)$, 从而导致其相应的轨线在两切换点的非光滑性存在显著差异.

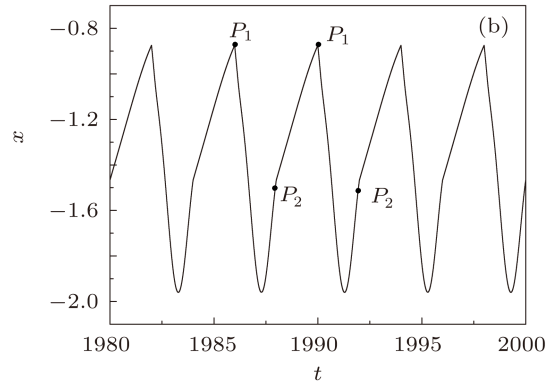
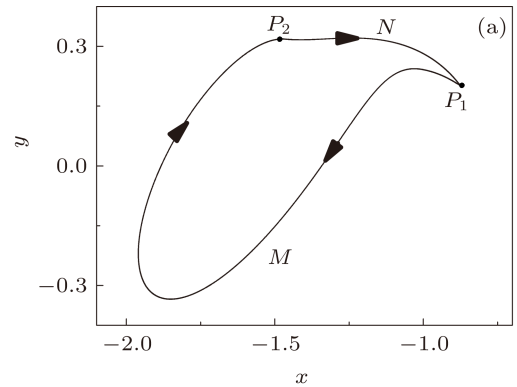


图6 切换系统的 $2T$ 周期解 (a) 平面相图; (b) 时间历程

4.2 环/环切换周期振荡

当 B 子系统的参数 $\alpha > 4.367$ 时, B 子系统的平衡点 E_B^\pm 由 Hopf 分岔失稳, 产生周期振荡. A 子系统的参数 $a = -0.9$, 此时 A 子系统也处于周期振荡. 图 7 给出了切换系统的振荡特征, 其运动轨迹在两个稳定极限环之间切换, 表现为环环切换特征, 其轨迹存在四个切换点 P_1, P_2, P_3, P_4 . 周期切换的轨道起始点 P_1 在 A 子系统, 在 $[0, T]$ 时间内, 切换系统受 A 子系统控制, 从点 P_1 开始, 轨迹沿 A 子系统的轨线 P_1P_2 运动, 在未到达切换条件时, 系统一直在 A 子系统内运动, 并向其相应的极限环逐渐逼近. 当系统运动到点 P_2 时, 满足周期切换条件, 切换系统转向 B 子系统, 在 $[T, 2T]$ 内系统受 B 子系统控制, 即以切换点 P_2 为初值, 进入 B 子系统. 当 $T = 2T$ 时又满足周期切换条件, 此时系统轨迹运动到切换点 P_3 , 导致切换系统以 P_3 为初值, 受 A 子系统控制, 趋于 A 子系统的极限环. 当 $T = 3T$ 时又满足周期切换条件, 此时系统轨迹运动到切换点 P_4 , 导致切换系统以 P_4 为初值, 受 B 子系统控制, 趋于

B子系统的极限环. 当 $T = 4T$ 时, 切换系统刚好运动到点 P_1 . 上述过程不断重复, 得到周期为 $4T$ 的周期解. 从切换系统的轨迹及其相应的时间历程来看, 可以发现四个切换点的非光滑性明显不同, 从而导致其相应的轨线在四个切换点的非光滑性存在显著差异.

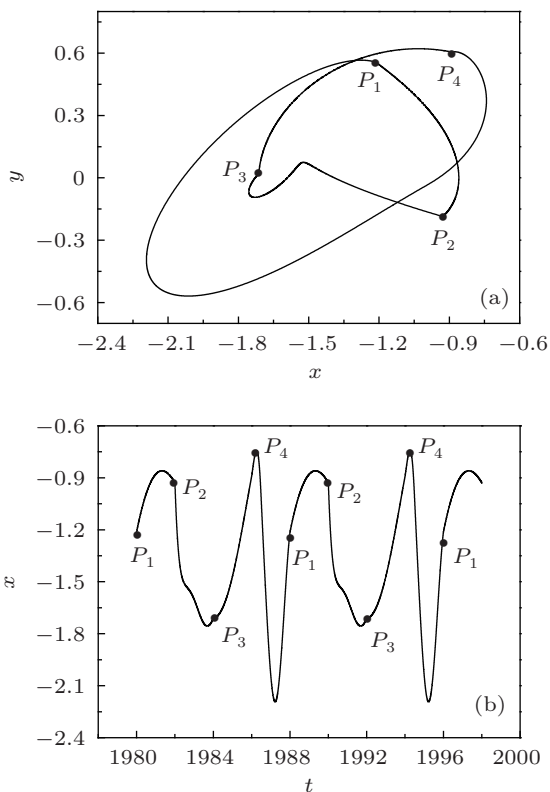


图7 切换系统的 $4T$ 周期解 (a) 平面相图; (b) 时间历程

4.3 倍周期分岔与混沌失稳

图 8 给出了切换系统在 $\alpha = 4.535$ 时的振荡特征, 此时 A 与 B 子系统都处于周期振荡, 即切换系统趋于两个子系统的极限环的轨迹之间做切换. 从图 8 可知切换系统存在 8 个不同的切换点, 使得切换系统的周期由 $4T$ 转化为 $8T$. 切换点数量的倍增表现为倍周期分岔. 随着参数的不断增大, 切换点的数量也会成倍增加, 不断的倍周期分岔构成倍周期分岔序列, 最终导致切换系统进入混沌振荡, 如图 9 所示.

在参数的不断变化中, 还会出现各种不同的周期窗口, 这些都是由于倍周期分岔产生的不同振荡特征之间的演化, 即切换系统的切换点的数量是成倍变化的, 切换点的数量对应切换系统的振荡周期.

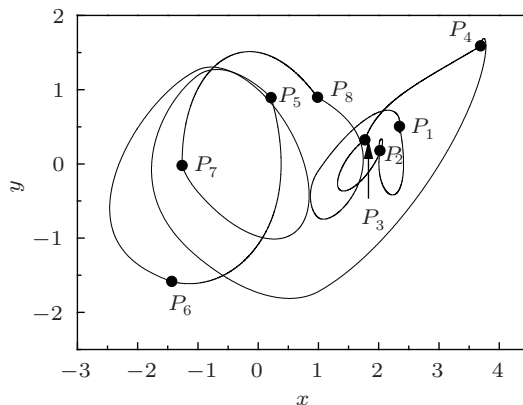


图8 切换系统的 $8T$ 周期解

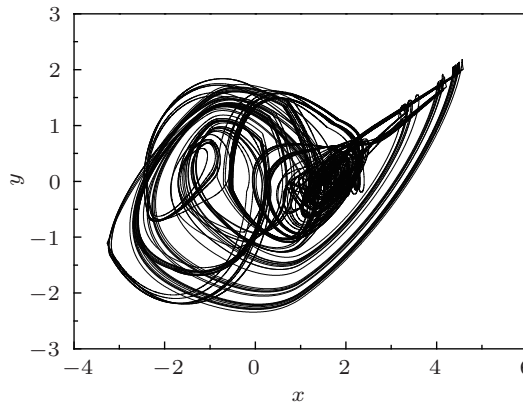


图9 切换系统的混沌解

5 结论

分段线性电路系统在周期开关的切换下产生了复杂的动力学行为, 在不同的参数条件下, 子系统存在不同的平衡态, 导致切换系统产生不同的振荡特征. 当两子系统在稳定的平衡点和周期运动之间切换时, 切换系统产生了点环周期切换振荡; 当两个子系统在两个周期运动之间切换时, 切换系统产生了环环周期振荡. 随着参数的增加, 切换点的数量成倍增加, 导致倍周期分岔, 最终进入混沌态.

[1] Bartissol P, Chua L O 1988 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **35** 1512
 [2] Bai E W, Lonngren K E 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 1515
 [3] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 (in Chinese) [于洪洁,

刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]
 [4] Cveticanin L, Abd El-Latif G M, El-Naggar A M, Ismail G M 2008 *J. Sound and Vibration* **318** 580

- [5] Ji Y, Bi Q S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7612 (in Chinese) [季颖, 毕勤胜 2010 物理学报 **59** 7612]
- [6] Madan R N 1993 *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos* (Singapore: World Scientific Press) p122
- [7] Koliopoulos C L, Kyprianidis I M, Stouboulos I N, Anagnostopoulos A N, Magafas L 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 173
- [8] Contou-Carrere M N, Daoutidis P 2005 *IEEE Trans. Auto. Cont.* **50** 1831
- [9] Karagiannopoulos C G 2007 *J. Electrostatics* **65** 535
- [10] Zhang X F, Chen X K, Bi Q S 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010502 (in Chinese) [张晓芳, 陈小可, 毕勤胜 2013 物理学报 **62** 010502]
- [11] Daniele F P, Pascal C, Laura G 2001 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 916
- [12] Ueta T, Kawakami H 2002 *Int. Symposium on Circuits and Systems Tokushima Japan*, May 26-29, 2002II-544
- [13] Zhusubaliyev Z H, Mosekilde E 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2237
- [14] Zhusubaliyev Z H, Mosekilde E 2003 *Bifurcation and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems* (Singapore: World Scientific)
- [15] Putyrski M, Schultz C 2011 *Chem. Biol.* **18** 1126
- [16] Zhang W, Yu P 2000 *J. Sound Vib.* **231** 145
- [17] Sun Z D, Zheng D Z 2001 *IEEE Trans. Auto. Cont.* **46** 291
- [18] Leine R I 2006 *Phys. D* **223** 121
- [19] Guo S Q, Yang S P, Guo J B 2005 *J. Vibra. Engineering* **18** 276 (in Chinese) [郭树起, 杨绍普, 郭京波 2005 振动工程学报 **18** 276]
- [20] Baglietto M, Battistelli G, Scardovi L 2007 *Automatica* **43** 1442
- [21] Branicky M S 1998 *IEEE Automat. Contr.* **43** 475
- [22] Xu X P, Antsaklis P J 2000 *Int. J. Contr.* **73** 1261
- [23] Gao C, Bi Q S, Zhang Z D 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020504 (in Chinese) [高超, 毕勤胜, 张正娣 2013 物理学报 **62** 020504]
- [24] Sprott J C 2000 *Amer. J. Phys.* **68** 758
- [25] Wang X F, Zhang B 2007 *Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics Jinan China August 2462*

Complicated behaviors and non-smooth bifurcation of a switching system with piecewise linear chaotic circuit*

Wu Li-Feng¹⁾ Guan Yong¹⁾ Liu Yong^{2)†}

¹⁾ (College of Information Engineering, Capital Normal University, Beijing 100048, China)

²⁾ (School of Mathematical Science, Yancheng Teachers University, Yancheng 224002, China)

(Received 4 March 2013; revised manuscript received 26 March 2013)

Abstract

The complex dynamical and non-smooth bifurcations of a compound system with periodic switches between two piecewise linear chaotic circuits are investigated. Based on the analysis of equilibrium states, the conditions for Fold bifurcation and Hopf bifurcation are derived to explore the bifurcations of the compound system with periodic switches while there are different stable solutions in the two subsystems. Different types of oscillations of the swithing system are observed, and the mechanism is studied and presented. In the difference of periodic oscillations, the number of the swithing points increases doubly with the variation of the parameter, which leads from period-doubling bifurcation to chaos.

Keywords: piecewise linear circuit, switching system, non-smooth bifurcation

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 84.30.-r

DOI: 10.7498/aps.62.110510

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61070049, 61202027), the National Key Technology R&D Project of China (No. 2012DFA11340), and the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 4122015).

† Corresponding author. E-mail: yongliumath@hotmail.com