

$N00N$ 态的 Wigner 函数及 $N00N$ 态作为 输入的量子干涉*

徐学翔^{1)†} 张英孔²⁾ 张浩亮¹⁾ 陈媛媛¹⁾

1) (江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330022)

2) (广州杰赛科技股份有限公司, 广州 510310)

(2012 年 10 月 31 日收到; 2013 年 2 月 22 日收到修改稿)

根据量子力学相干态表象下的 Wigner 函数公式, 推导了 $N00N$ 态在相空间的 Wigner 分布函数的解析表达式. 基于相空间方法, 研究 $N00N$ 态作为输入的量子干涉. 推导了与输入光场参数和干涉仪参数相关的输出端探测光子概率的解析表达式, 并进行了数值分析. 从分析结果发现, 当相移参数 ϕ 取 0 和 π 时, 输出量子态仍为 $N00N$ 态. 当输入 2002 态时, 输出结果总是 2002 态, 与相移参数无关. 随着 N 的增加, 条件概率随相位的分布峰数一般只有一个, 两个, 三个或四个, 且峰变得更窄. 这些结果可以为实验提供理论指导.

关键词: $N00N$ 态, Wigner 函数, 相空间, 量子干涉

PACS: 42.50.Dv, 42.25.Hz, 85.35.Ds

DOI: 10.7498/aps.62.114204

1 引言

简单的量子力学体系的干涉被人们所熟知, 如弱光的双缝干涉、单电子的干涉等^[1-3]. 对于双缝干涉, 狄拉克有一个著名的论断: 光子只和光子自身发生干涉, 不同的光子从不发生干涉^[4]. 而后来却在实验上发现双光子也可以发生干涉现象^[5,6]. 于是关于狄拉克的论述就成为学术界长期的争论话题^[7]. 在研究了大量的实验现象和已有的理论成果的基础上, 研究者认为只要描述量子体系的波被分成多个路径并重新合起来, 在相同的时空内干涉就会发生. 因此我们说, 量子干涉指的是一个量子系统通过描写该量子系统的波函数自身与自身发生的干涉^[8]. 这种量子体系不但包括原子这样的紧致的量子力学体系, 而且包括几个独立光子这样的松散体系. 在实际工程中, 量子干涉效应被广泛应用于人们感兴趣的量子度量学中^[9].

量子度量学, 作为量子技术中新兴领域, 其目

的就是研究统计误差的精度尺度范围, 并寻找能达到这些范围的量子策略^[10,11]. 量子度量学的基本流程, 一般包括这些基本环节: 光场输入(初态), 经过相互作用(动力学过程)后, 输出光场(末态), 对输出结果进行测量并评估. 针对这些环节, 科学工作者做了大量研究, 根据研究问题在各环节的物理规律以及所选择策略, 寻求实现探测结果的最优化. 例如在输入环节中, 通过改变输入光场, 利用它们的特殊属性(如压缩、纠缠)来实现优化^[12,13]; 在动力学过程环节, 可以考虑有泄露损耗或有噪声的相互作用关系^[14]; 在输出环节, 选择最佳方案测量^[15]. 由于量子干涉仪可作为量子度量学中光场的传感器, 人们通常以光场量子干涉作为首选工具进行相位估计. 关于量子干涉的相敏感度以及相位测量精度的研究, 国内外有许多人已进行了理论和实验探索. 普遍认为, 通过纠缠等可以增强量子精度尺度范围^[16].

纠缠在量子光学和量子信息处理中起着重要作用. 例如在量子密集编码, 量子态隐形传输, 量子

* 国家自然科学基金(批准号: 11175113, 11264018, 11247301), 江西省自然科学基金(批准号: 2011BAB202004)和江西省教育厅科技项目(批准号: GJJ12171)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xxxjxnu@gmail.com

密钥分发和其他量子信息处理等领域,都需要具有纠缠特性的量子信号源^[17].最近一些年,在量子信息领域,一种具有纠缠性质的 $N00N$ 态引起了人们的极大关注^[18].该量子态定义为

$$|N00N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N,0\rangle + |0,N\rangle), \quad (1)$$

它是一种双模最大纠缠态,其中 $|p,q\rangle = |p\rangle_a|q\rangle_b$ 表示分别处于 a(b) 的粒子数态.该量子态表现为 N 个光子, $1/2$ 的概率全处在 a 模,另外有 $1/2$ 的概率全处于 b 模,其最大特点在于它的纠缠.

量子干涉实质上是一个输入输出过程^[19],只要知道输入量子态以及输入输出变换关系,可以从理论上得到输出量子态的所有统计属性^[20].以往的研究者大多都是直接用算符及其变换的关系进行相关问题的研究.然而由于算符之间存在非对易的关系,给计算和处理问题带来不便.例如, Suda 小组就用算符方法计算了单光子和相干态作为输入的量子干涉效应^[21],如果考虑任意光子作为输入情况,利用算符方法就很难计算,而利用相空间分析方法却比较方便地解决问题^[22].基于以上原因,本文将考虑利用相空间方法^[23]对 $N00N$ 态作为输入的量子干涉进行理论研究.首先在相干态表象下推导出 $N00N$ 态的 Wigner 函数,利用已知的输入光场的 Wigner 分布函数,根据干涉仪的结构得到输入输出光场的经典变换关系,得到输出光场的 Wigner 分布函数,解析地推导出了在输出端探测到的光场的统计属性.本文所采纳的技巧将展示相空间方法在量子干涉研究中的有力作用.

2 $N00N$ 态的 Wigner 函数

在相空间方法中,人们优先选用 Wigner 函数^[24,25]来处理问题.为进一步研究 $N00N$ 态作为输入的量子干涉,我们首先推导出 $N00N$ 态的 Wigner 函数的解析表达式.对于密度算符为 ρ 的双模量子系统,其在相干态表象下的 Wigner 函数公式^[26]为

$$W(\alpha;\beta) = \frac{4e^{2|\alpha|^2+2|\beta|^2}}{\pi^2} \times \int \frac{d^2z_1 d^2z_2}{\pi^2} \langle -z_1, -z_2 | \rho | z_1, z_2 \rangle \times e^{-2(z_1\alpha^* - z_1^*\alpha)} e^{-2(z_2\beta^* - z_2^*\beta)}, \quad (2)$$

其中 $|z_1, z_2\rangle = |z_1\rangle_a|z_2\rangle_b$ 是双模相干态^[27],且

$$\alpha = (x_1 + iy_1)/\sqrt{2}, \quad \beta = (x_2 + iy_2)/\sqrt{2}.$$

将 $N00N$ 态的密度算符 $\rho = |N00N\rangle\langle N00N|$ 代入 (2) 式中,利用相干态的粒子数表象展开 $|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ 和积分公式^[28]

$$\int \frac{d^2z}{\pi} e^{\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^*} = -\frac{1}{\zeta} e^{-\xi\eta/\zeta}, \quad \text{Re}(\zeta) < 0,$$

可得 $N00N$ 态的 Wigner 函数

$$W(\alpha;\beta) = W_1 + W_2 + W_3 + W_4, \quad (3)$$

其中 W_1, W_2, W_3, W_4 分别表达为

$$W_1 = \frac{2(-1)^N}{\pi^2 N!} \partial_{\mu_1}^N \partial_{\nu_1}^N \times e^{-2|\alpha|^2 - 2|\beta|^2 + 2\mu_1\alpha - 2\nu_1\alpha^* + \mu_1\nu_1} \Big|_{\mu_1=\nu_1=0}, \quad (4)$$

$$W_2 = \frac{2(-1)^N}{\pi^2 N!} \partial_{\mu_2}^N \partial_{\nu_2}^N \times e^{-2|\alpha|^2 - 2|\beta|^2 + 2\beta\mu_2 - 2\alpha^*\nu_2} \Big|_{\mu_2=\nu_2=0}, \quad (5)$$

$$W_3 = \frac{2(-1)^N}{\pi^2 N!} \partial_{\mu_3}^N \partial_{\nu_3}^N \times e^{-2|\alpha|^2 - 2|\beta|^2 + 2\alpha\mu_3 - 2\beta^*\nu_3} \Big|_{\mu_3=\nu_3=0}, \quad (6)$$

以及

$$W_4 = \frac{2(-1)^N}{\pi^2 N!} \partial_{\mu_4}^N \partial_{\nu_4}^N \times e^{-2|\alpha|^2 - 2|\beta|^2 + 2\mu_4\beta - 2\nu_4\beta^* + \mu_4\nu_4} \Big|_{\mu_4=\nu_4=0}. \quad (7)$$

注意到 Laguerre 多项式满足关系式

$$L_m(xy) = \frac{(-1)^m}{m!} \partial_t^m \partial_\tau^m e^{-t\tau + tx + \tau y} \Big|_{t=\tau=0},$$

可将 W_1, W_2, W_3, W_4 进一步简化,最后得到 $N00N$ 态 Wigner 函数的完整解析表达式为

$$W(\alpha;\beta) = \frac{2}{\pi^2} e^{-2|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} \left[\frac{2^{2N}}{N!} (\alpha^* \beta^N + \alpha^N \beta^{*N}) + (-1)^N (L_N(4|\alpha|^2) + L_N(4|\beta|^2)) \right], \quad (8)$$

其中 $L_N(x)$ 为 N 阶 Laguerre 多项式.

为清楚地展示不同 $N00N$ 态的 Wigner 分布函数图像,我们在相空间 (x_1, y_1, x_2, y_2) 选定 $(y_1 = 0, y_2 = 0)$ 后,绘制三维 x_1-x_2 相空间图形.由图 1 可以看出,当粒子数 N 为偶数时,在 Wigner 函数的相空间分布中心处,有一个向上的峰;而当粒子数 N 为奇数时,峰向下.这一特点与 (8) 式得到的 $W(0;0) = \frac{4}{\pi^2} (-1)^N$ 相符.而且发现,随着 N 的增大, Wigner 函数分布出现了“振荡型”分布,这也正是粒子数态的 Wigner 函数的特点^[29].

众所周知,对于双模真空态 $|0,0\rangle$,其 Wigner 函数为 $W(\alpha;\beta) = 4e^{-2|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} / \pi^2$,呈现明显的高斯特性.对于 $N \neq 0$,由于 N 阶 Laguerre 多项式 $L_N(x)$

的存在, $N00N$ 态的 Wigner 函数失去了高斯特点. 以 $N = 1$ 为例, (8) 式可退化为

$$W_{N=1}(\alpha; \beta) = \frac{4}{\pi^2} e^{-2|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} (2|\alpha + \beta|^2 - 1), \quad (9)$$

很明显, 由于 (9) 式中含有交叉项 $\beta\alpha^* + \alpha\beta^*$, 预示着 1001 态的纠缠属性. 而且我们发现, 对于处于 $|\alpha + \beta|^2 < 1/2$ 的相空间区域, 1001 态的 Wigner 函数呈现负值.

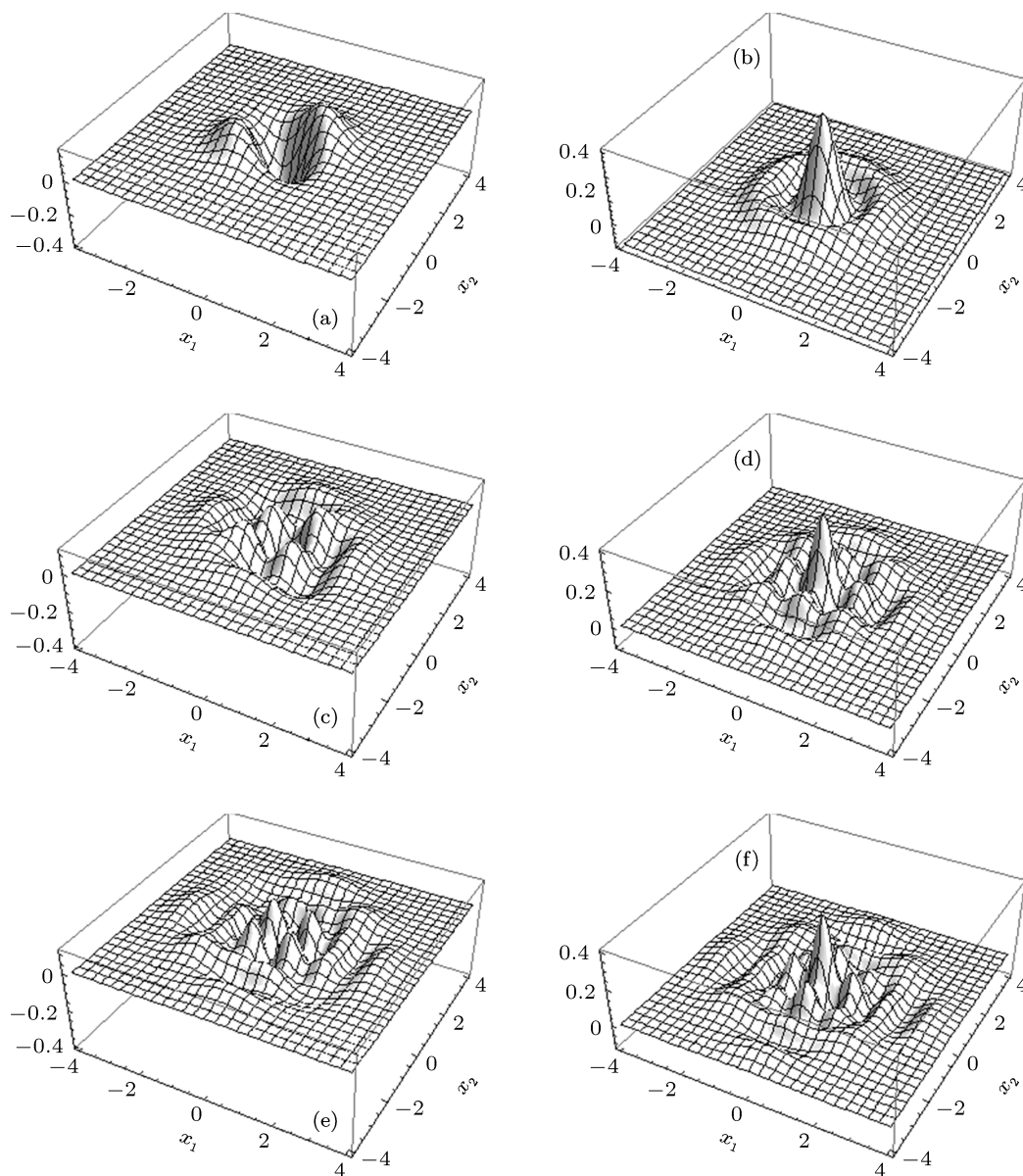


图1 几种不同 $N00N$ 态的 Wigner 函数 $W(\alpha; \beta)$ 在相空间 $(x_1, 0; x_2, 0)$ 的分布 (a), (b), (c), (d), (e), (f) 分别对应 $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

3 $N00N$ 态作为输入的量子干涉

本环节考虑利用双模纠缠 $N00N$ 态作为干涉仪的输入源, 讨论量子干涉后在输出端联合探测光子的概率受干涉仪相位参数的影响. 基于相空间方法, 利用前面得到的输入光场 Wigner 分布函

数, 通过变换关系找出输出光场 Wigner 分布函数, 接着推导输出端探测光子概率的解析表达式并进行分析.

3.1 光场的输入输出理论

输入输出理论已经在物理学的许多分支领域

得到了成功应用, 比如量子场论的散射理论等. 在量子光学中, 有很多光学器件, 比如反射镜、光学分束器、以及参量放大器等, 都可以用相应的变换矩阵反映出输入和输出之间的关系. 因此在量子光学中, 利用输入输出方法解决一些问题 (如量子干涉) 也是很常见的. 由于量子干涉本身就是一种输入输出的物理过程, 只要知道输入量子态以及输入输出变换关系, 可以得到输出量子态的所有统计属性. 输入输出变换, 实际上就是研究如何将已知的输入光场的统计属性变换为相应的输出光场的统计属性^[20]. 由于光场产生算符和湮没算符之间存在的不对易关系, 直接利用算符方法可能给计算带来不便, 有些情形下可以考虑利用相空间方法处理量子干涉问题.

一些常见的干涉装置, 例如分束器, 马赫-曾德尔 (Mach-Zehnder) 干涉仪等, 通常可以作为一个具有两个输入和两个输出端口的四端设备 (如图 2 所示), 图中 a_i, b_i, a_f, b_f 分别为干涉装置四个端口所对应光场的湮没算符^[19]. 假定输入两分立的光场 ρ_1 和 ρ_2 (或纠缠的光场 ρ_{12}), 对应图中 a_i 和 b_i 模, 输入端光场的 Wigner 函数可以表达为

$$\begin{aligned} W_{\text{in}}(\alpha_i, \beta_i) &= W_{\rho_1}(\alpha_i)W_{\rho_2}(\beta_i), \\ W_{\text{in}}(\alpha_i, \beta_i) &= W_{\rho_{12}}(\alpha_i, \beta_i), \end{aligned} \quad (10)$$

通过量子力学和量子光学相关知识找出经典变换关系, 那么输出光场的 Wigner 函数就可以用输入光场 Wigner 函数的形式表达为

$$W_{\text{out}}(\alpha_f, \beta_f) = W_{\text{in}}(\alpha_i(\alpha_f, \beta_f), \beta_i(\alpha_f, \beta_f)), \quad (11)$$

也就是说, 只要知道初始输入 Wigner 函数, 利用经典变换关系就可以表达出输出光场的 Wigner 函数. 由于 Wigner 函数反映量子态性质, 这样可以计算讨论输出光场的所有的量子统计属性. 值得一提的是, 以上套路和方法一般适用于存在么正输入输出变换关系的情况. 对于存在泄露 (光子损失)、有噪声等以及退相干的情况, 输入输出光场的密度算符关系不能简单应用么正变换的方法来描述, 通常可以用 Kraus 和的形式表示. 这些问题也可以用相空间方法进行研究处理.

3.2 马赫-曾德尔干涉仪及输出光场的 Wigner 函数

量子干涉方面的典型应用装置就是马赫-曾德尔干涉仪^[10], 其装置如图 3 所示, 两束输入光场 (分

立或纠缠) 经过第一个 50/50 分束器 BS_1 后, 各有一半的可能性沿着两个不同路径 (通过相移器 PS 产生相移 $\phi \in [0, 2\pi)$) 传播, 再经过第二个 50/50 分束器 BS_2 输出.



图 2 四端干涉装置示意图. 输入输出各两个端口, 中间相互作用环节可以建立与装置相关参数有关的输入输出关系

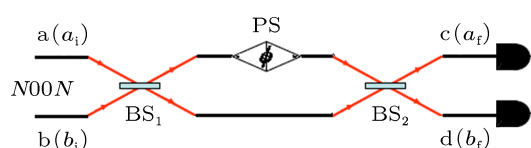


图 3 马赫-曾德尔干涉仪示意图. 其中包括两个分束器 (BS_1, BS_2) 以及相移器 (PS), a_i, b_i, a_f, b_f 分别对应为输入端口 (a, b) 输出端口 (c, d) 光场的湮没算符. 考虑以纠缠 $N00N$ 态作为输入信号, 调节相移参数 ϕ , 探测输出信号

在量子光学中, 马赫-曾德尔干涉仪输入输出光场的量子变换关系为

$$\begin{pmatrix} a_f \\ b_f \end{pmatrix} = U_{\text{MZI}} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad (12)$$

这里干涉仪的散射矩阵 $U_{\text{MZI}} = U_{BS_2}U_{PS}U_{BS_1}$ 分别由三个基本器件的散射矩阵组合而成, 其中

$$\begin{aligned} U_{BS1(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \\ U_{PS} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

由 (12) 式, 用经典复数取代量子算符 ($\alpha \rightarrow \alpha, \beta \rightarrow \beta$), 从而得到经典输入输出变换关系为

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = U_{\text{MZI}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix}. \quad (14)$$

通过计算得到

$$\alpha_i = -i e^{-i\frac{\phi}{2}} \left(-\alpha_f \sin \frac{\phi}{2} + \beta_f \cos \frac{\phi}{2} \right), \quad (15)$$

$$\beta_i = -i e^{-i\frac{\phi}{2}} \left(\alpha_f \cos \frac{\phi}{2} + \beta_f \sin \frac{\phi}{2} \right). \quad (16)$$

以纠缠的 $N00N$ 态作为干涉仪的输入源, 根据 (10) 和 (11) 式的关系, 利用 $N00N$ 态的 Wigner 函数

作为 $W_{in}(\alpha_i, \beta_i)$ 并将 (15) 和 (16) 式代入, 得到输出端光场的 Wigner 函数为

$$W_{out}(\alpha_f; \beta_f) = W_{1out} + W_{2out} + W_{3out} + W_{4out}. \quad (17)$$

鉴于后面计算方便性考虑, 这里 $W_{1out}, W_{2out}, W_{3out}, W_{4out}$ 表达为偏导形式, 分别是

$$\begin{aligned} W_{1out} &= \frac{2(-1)^N}{\pi^2 N!} \partial_{\mu_1}^N \partial_{\nu_1}^N e^{-2|\alpha_f|^2 - 2|\beta_f|^2 + \mu_1 \nu_1} \\ &\times e^{+2\mu_1 i e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \alpha_f + 2\nu_1 i e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \alpha_f^*} \\ &\times e^{-2\mu_1 i e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} \beta_f - 2\nu_1 i e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} \beta_f^*} \Big|_{\mu_1=\nu_1=0}, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{2out} &= \frac{2(-1)^N}{\pi^2 N!} \partial_{\mu_2}^N \partial_{\nu_2}^N e^{-2|\alpha_f|^2 - 2|\beta_f|^2} \\ &\times e^{-2\mu_2 i e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} \alpha_f + 2\nu_2 i e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \alpha_f^*} \\ &\times e^{-2\mu_2 i e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \beta_f - 2\nu_2 i e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} \beta_f^*} \Big|_{\mu_2=\nu_2=0}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{3out} &= \frac{2(-1)^N}{\pi^2 N!} \partial_{\mu_3}^N \partial_{\nu_3}^N e^{-2|\alpha_f|^2 - 2|\beta_f|^2} \\ &\times e^{+2\mu_3 i e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \alpha_f - 2\nu_3 i e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} \alpha_f^*} \\ &\times e^{-2\mu_3 i e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} \beta_f - 2\nu_3 i e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \beta_f^*} \Big|_{\mu_3=\nu_3=0}, \quad (20) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} W_{4out} &= \frac{2(-1)^N}{\pi^2 N!} \partial_{\mu_4}^N \partial_{\nu_4}^N e^{-2|\alpha_f|^2 - 2|\beta_f|^2 + \mu_4 \nu_4} \\ &\times e^{-2\mu_4 i e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} \alpha_f - 2\nu_4 i e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} \alpha_f^*} \\ &\times e^{-2\mu_4 i e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \beta_f - 2\nu_4 i e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \beta_f^*} \Big|_{\mu_4=\nu_4=0}. \quad (21) \end{aligned}$$

我们发现, 输出端的 Wigner 函数 $W_{out}(\alpha_f; \beta_f)$ 不仅与输入 $N00N$ 态的 N 有关, 而且与装置相移参数 ϕ 有关, 这些因素直接对实验测量结果产生影响.

3.3 输出端的光子联合概率分布函数

前面我们已经知道, 以 $N00N$ 态作为输入, 意味着其中有 $1/2$ 的概率 N 个光子完全从端口“a”输入, 即 $(n_a, n_b) = (N, 0)$, 另外有 $1/2$ 的概率 N 个光子完全从输出端口“b”输入, 即 $(n_a, n_b) = (0, N)$, 但总的输入光子数为 N . 经过干涉仪发生量子干涉后, 在输出端口“c”和“d”探测到光子的可能的测量结果却有 $N+1$ 种, 分别为 $(n_c, n_d) = (0, N)$,

$(1, N-1), \dots, (N-1, 1), (N, 0)$. 受干涉仪相移参数 ϕ 的影响, 在不同情形下探测结果的概率会有所不同. 接下来我们将利用相空间方法, 从所得到的输出 Wigner 函数着手, 从理论上给出输出端探测到光子的联合概率分布函数解析表达式, 并进行细致分析. 这样实验人员可以通过这些结果获取关于相位方面的信息, 对实验进行指导.

对于特定的相移 ϕ , 在输出端口“c”和“d”分别探测到 n_c 和 n_d 个光子的概率, 可以用条件概率 $P((n_c, n_d)|\phi)$ 来表示. 根据守恒原理, 在输出端两端口探测到的光子数总和必为 $N (= n_c + n_d)$, 条件概率 $P((n_c, n_d)|\phi)$ 可以重新表示为

$$P((n_c, n_d)|\phi) = P((m, N-m)|\phi), \quad (22)$$

这里 m 可以分别取 $0, 1, \dots, N$. 根据相空间理论, $P((m, N-m)|\phi)$ 可以通过利用输出端 a_f 模粒子数 Wigner 函数 $W_{|m\rangle}(\alpha_f)$ 和 b_f 模粒子数 Wigner 函数 $W_{|N-m\rangle}(\beta_f)$, 与已知的输出 Wigner 函数进行内积分计算得到, 即

$$\begin{aligned} P((m, N-m)|\phi) &= \pi^2 \int \int d^2 \alpha_f d^2 \beta_f W_{|m\rangle}(\alpha_f) \\ &\times W_{|N-m\rangle}(\beta_f) W_{out}(\alpha_f; \beta_f), \quad (23) \end{aligned}$$

其中输出端口“c”和“d”的粒子态 Wigner 函数^[22]分别为

$$\begin{aligned} W_{|m\rangle}(\alpha_f) &= \frac{2(-1)^m}{\pi m!} \partial_{s_1}^m \partial_{t_1}^m \\ &\times \exp(-2|\alpha_f|^2 + 2s_1 \alpha_f - 2t_1 \alpha_f^* + s_1 t_1) \Big|_{s_1=t_1=0}, \quad (24) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} W_{|N-m\rangle}(\beta_f) &= \frac{2(-1)^{N-m}}{\pi(N-m)!} \partial_{s_2}^{N-m} \partial_{t_2}^{N-m} \\ &\times \exp(-2|\beta_f|^2 + 2s_2 \beta_f - 2t_2 \beta_f^* + s_2 t_2) \Big|_{s_2=t_2=0}. \quad (25) \end{aligned}$$

为方便书写, 令 $P((m, N-m)|\phi) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$, 这里

$$\begin{aligned} P_j &= \pi^2 \int \int d^2 \alpha d^2 \beta W_{|m\rangle}(\alpha_f) W_{|N-m\rangle}(\beta_f) \\ &\times W_{jout}(\alpha_f; \beta_f). \quad (26) \end{aligned}$$

以计算 P_1 为例, 将 (18), (24) 和 (25) 式代入 (26) 式, 作积分得

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2m!(N-m)!N!} \partial_{s_1}^m \partial_{t_1}^m \partial_{s_2}^{N-m} \partial_{t_2}^{N-m} \partial_{\mu_1}^N \partial_{\nu_1}^N \\ &\times \exp\left(+i e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \nu_1 s_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -i e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\phi}{2} \mu_1 t_1 \Big|_{s_1=t_1=0} \\
 & \times \exp \left(-i e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} v_1 s_2 \right. \\
 & \left. + i e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} \mu_1 t_2 \right) \Big|_{\mu_1=v_1=s_2=t_2=0}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

继续将 (27) 式中各指数项作级数展开, 并利用 $\partial_x^m x^n|_{x=0} = m! \delta_{mn}$ (其中 δ_{mn} 为 Kronecker 符号), 最后得到

$$P_1 = \frac{N!}{2m!(N-m)!} \sin^{2m} \frac{\phi}{2} \cos^{2N-2m} \frac{\phi}{2}, \quad (28)$$

同理, 可得

$$P_2 = \frac{N!(-1)^m}{2m!(N-m)!} \sin^N \frac{\phi}{2} \cos^N \frac{\phi}{2}, \quad (29)$$

$$P_3 = \frac{N!(-1)^m}{2m!(N-m)!} \sin^N \frac{\phi}{2} \cos^N \frac{\phi}{2}, \quad (30)$$

以及

$$P_4 = \frac{N!}{2m!(N-m)!} \sin^{2N-2m} \frac{\phi}{2} \cos^{2m} \frac{\phi}{2}. \quad (31)$$

这样得到条件概率 $P((m, N-m)|\phi)$ 的解析表达式为

$$\begin{aligned}
 & P((m, N-m)|\phi) \\
 & = \frac{N!}{2m!(N-m)!} \left[\sin^m \frac{\phi}{2} \cos^{N-m} \frac{\phi}{2} \right. \\
 & \left. + (-1)^m \sin^{N-m} \frac{\phi}{2} \cos^m \frac{\phi}{2} \right]^2. \quad (32)
 \end{aligned}$$

从 (32) 式明显知道, 对于特定的 $N00N$ 态输入, 调节相移参数 ϕ 值, 可以改变在输出端探测光子的概率.

接下来我们列举一些特殊情况. 在调节相移参数 ϕ 方面, 当 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$ 时, 我们发现在探测端口只能探测到 $(n_c, n_d) = (0, N), (N, 0)$, 而且

$$P((N, 0)|\phi = 0) = P((0, N)|\phi = 0) = \frac{1}{2}, \quad (33)$$

$$P((N, 0)|\phi = \pi) = P((0, N)|\phi = \pi) = \frac{1}{2}, \quad (34)$$

我们发现, 当 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$ 时, 在探测端口只能探测到 $(n_c, n_d) = (0, N), (N, 0)$, 而且概率各为 $1/2$, 表明这种情况下输出态也为 $N00N$ 态. 而当 $\phi = \pi/2$ 时, 在探测端口只能探测到端口“c”的光子数 m 为偶数的情形, 且

$$P((m, N-m)|\phi = \pi/2) = \begin{cases} \frac{N!}{(2k)!(N-2k)!2^N}, & m = 2k, \\ 0, & m = 2k + 1, \end{cases} \quad (35)$$

和 $\phi = 3\pi/2$ 时, 在探测端口只能探测到端口“d”的光子数 $N-m$ 为偶数的情形, 且

$$P((m, N-m)|\phi = 3\pi/2) = \begin{cases} \frac{N!}{(2k)!(N-2k)!2^N}, & N-m = 2k, \\ 0, & N-m = 2k + 1. \end{cases} \quad (36)$$

当输入单光子 $N00N$ 态 ($N = 1$) 时, 测量结果只有两种可能, 分别为 $(n_c, n_d) = (0, 1), (1, 0)$, 且概率分别为 $P((0, 1)|\phi) = 1/2 + (1/2) \sin \phi$ 和 $P((1, 0)|\phi) = 1/2 - (1/2) \sin \phi$, 验证了单光子源具有最大光子反聚束效应的特点 [30]. 对于输入 2 个光子 ($N = 2$) 的 2002 态情形, 有三种可能的测量结果, 分别为 $(n_c, n_d) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$, 且概率分别为 $P_{N=2}((0, 2)|\phi) = 1/2$, $P_{N=2}((1, 1)|\phi) = 0$, $P_{N=2}((2, 0)|\phi) = 1/2$. 我们发现, 不管如何调节相移参数 ϕ , 这两个光子要么一起从端口“c”出来, 要么一起从端口“d”出来, 且概率各为 $1/2$, 而不可能分开从两个端口分别出来一个光子. 表明两个光子在选择透射和反射时相互发生影响, 且完全从一端出射, 不可能分别从两端出射, 这也就是所谓的双光子结合 (群聚) 干涉效应 [31,32]. 另外, 对于 2 光子的 $N00N$ 态输入情形, 马赫-曾德尔干涉仪等效于一个对称分束器, 测量结果与相移 ϕ 无关, 因此利用 2 光子 $N00N$ 态作为输入, 不能用来确定关于相移方面的信息.

为清楚展现各种情形下的条件概率 $P((m, N-m)|\phi)$ 的一些特征, 图 4 我们绘制了 $N = 1, 2, 3, 4, 30, 100$ 时, 一些测量结果随相移 ϕ 的变化图形. 我们发现, 当 $N = 1$ 和 2 时, 图形现实结果与上面分析一致. 其他情况则有所不同. 例如, 当 $N = 3$ 时, 测量到 $(n_c, n_d) = (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ 四种结果的概率在相移 ϕ 所在的调节区间只有一个峰值. 对于各种 $N00N$ 态输入, 概率 $P((m, N-m)|\phi)$ 的峰数量一般为一个 (见 $N = 1$ 情形), 两个, 三个或四个峰. 例如, 当 $N = 4$ 时, 发现 $P((0, 4)|\phi) = P((4, 0)|\phi)$ 且有三个峰, $P((1, 3)|\phi) = P((3, 1)|\phi)$ 且有四个峰, 而 $P((2, 2)|\phi)$ 有两个峰. 随着输入光子数 N 的增加, 一些概率分布的峰值变得更窄, 表明在大多相位段概率为 0, 探测不到一些结果 (见图 4(e), (f)). 我们还发现, 当 N 为偶数时, 对于特定的 ϕ 值, 探测光子的概率都是对称的, 即 $P((m, N-m)|\phi) = P((N-m, m)|\phi)$. 图 5 我们利用三维柱状图直观展示了当 $N = 20$ 时在 ϕ 分别取 $0, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ 四种情形下的概率 $P((m, N-m)|\phi)$.

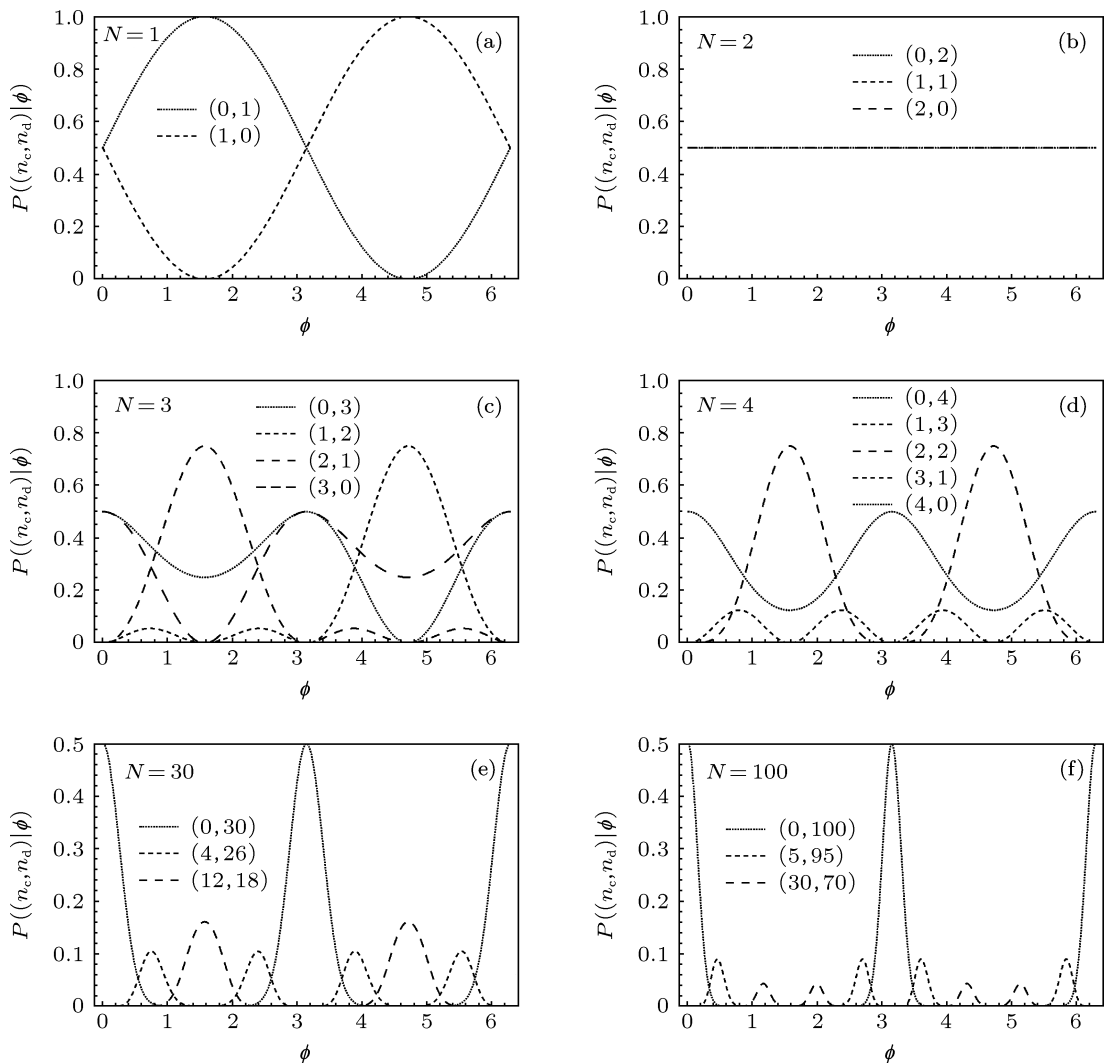


图4 输入不同 $N00N$ 态的情形, 对于特定 ϕ 在输出端探测到光子 $(n_c, n_d) = (0, N), (1, N-1), \dots, (N-1, 1), (N, 0)$ 的条件概率分布 $P((n_c, n_d)|\phi)$ 随相移参数 ϕ 的变化

4 结论

本文根据量子力学相干态表象下的 Wigner 函数公式, 推导了 $N00N$ 态在相空间的 Wigner 分布函数的解析表达式. 在此基础上进一步利用相空间方法研究 $N00N$ 态作为输入的量子干涉, 推导了在输出端探测到的光子的条件概率的解析表达式, 讨论条件概率受输入光场参数和干涉仪参数的影响. 我们发现, 当相移参数取 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$ 时, 输出量子态仍为 $N00N$ 态; 当相移参数取 $\phi = \pi/2$ 和 $\phi = 3\pi/2$ 时, 只能探测到至少有一端光子数为偶数的输出情况. 当输入 2002 态时, 输出结果也是 2002 态, 与相移参数无关, 不能反映相位信息. 随着 N 的增加, 条件概率随相位 ϕ 的分布峰数一般只有一个, 两个, 三个或四个, 且峰变得更窄. 我们还发现, 当 N 为偶数时, 对于特定的 ϕ 值, 探测光子的

概率分布是对称的. 这些结果对实验可以提供理论指导.

从本文的研究方案我们可以总结相空间方法研究量子干涉的基本套路: 将输入光场的 Wigner 函数表示出来, 找出输入输出光场之间的算符变化关系 (包括么正矩阵或 Kraus 求和形式等), 相应得到经典对应变换, 从而找出输出光场的相空间 Wigner 分布函数. 借助所得输出光场的 Wigner 函数并充分利用算符编序理论, 根据 Wigner-Weyl 规则计算得到所需研究物理量的期望值, 给出统计量的解析表达式, 从而对干涉效应的结果进行全面分析. 另一方面, 干涉仪种类很多, 研究可以考虑多种干涉仪 (包括马赫-曾德尔干涉仪, 法布里-珀罗干涉仪, 另外还有四波混合器, 以及简并参量放大器等), 输入不同属性 (考虑非经典性如压缩或纠缠因素, 高斯和非高斯因素等) 的光场, 并考虑有光

子损失及有噪声的干涉情形, 利用相空间方法给出干涉前后以及过程中各物理量的解析表达式, 清晰地分析干涉后所得的结果 (包括计算光强、动量分

布、位置分布, 进行相敏感分析, 宇称等) 受系统参数的影响. 建立利用相空间方法研究量子干涉的基本套路, 对量子度量学进行理论指导.

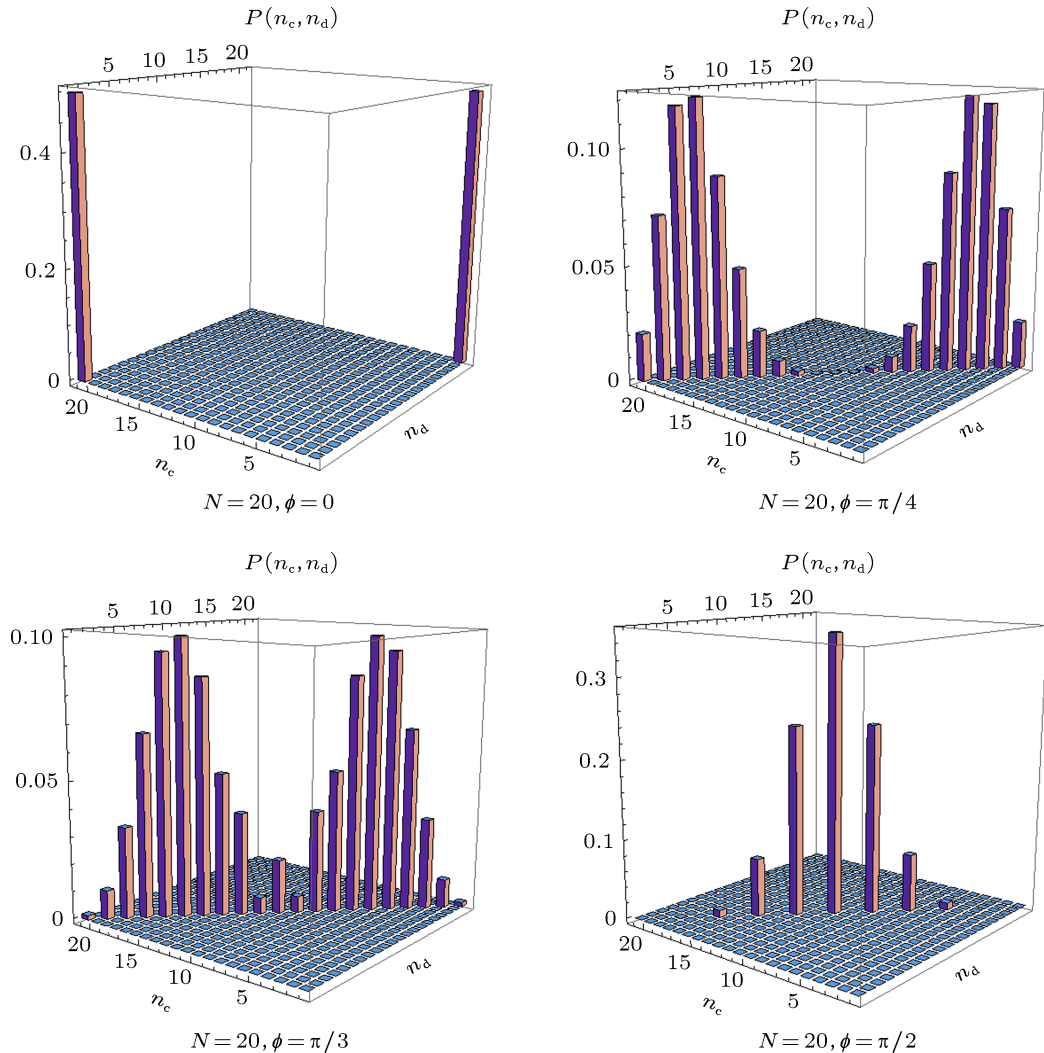


图5 当 $N = 20$, 相位 ϕ 分别取 $0, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ 时, 探测输出端光子分布 $P(n_c, n_d)$ 的柱状图

[1] Hariharan P 2003 *Optical interferometry*, (2nd Edn) (Elsevier)

[2] Taylor G I 1909 *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **15** 14

[3] Paul H 1986 *Rev. Mod. Phys.* **58** 209

[4] Dirac P A M 1930 *The Principles of Quantum Mechanics* (Clarendon: Oxford University Press)

[5] Hong C K, Ou Z Y, Mandel L 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 204

[6] Mandel L 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S274

[7] Glauber R J 1995 *Am. J. Phys.* **63** 12

[8] Long G L, Deng F G, Zeng J Y 2011 *Recent Progress in Quantum Mechanics, fifth volume* (Beijing: Tsinghua University Press) [龙桂鲁, 邓富国, 曾谨言 2011 量子力学新进展第五辑 (北京: 清华大学出版社)]

[9] Bahder T B, Lopata P A 2006 *Phase Sensitivity of a Mach-Zehnder Quantum Sensor* (Conference proceedings of QCMC)

[10] Escher B M, de Matos Filho R L, Davidovich L 2011 *Nature Phys.* **7** 406

[11] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nature Photon.* **5** 222

[12] Grangier P, Slusher R E, Yurke B, LaPorta A 1986 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2153

[13] O'Brien J L 2007 *Science* **318** 1393

[14] Dörner U, Dobrzanski R D, Smith B J, Lundeen J S, Wasilewski W, Banaszek K, Walmsley I A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 040403

[15] Gerry C C, Mimić J 2010 *Contemp. Phys.* **51** 497

- [16] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2004 *Science* **306** 1330
 [17] Bouwmeester D, Ekert A, Zeilinger A 2000 *The Physics of Quantum Information* (Berlin: Springer-Verlag)
 [18] Dowling J P 2008 *Contemp. Phys.* **49** 125
 [19] Yurke B, McCall S L, Klauder J R 1986 *Phys. Rev. A* **33** 4033
 [20] Ekert A K, Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **43** 3934
 [21] Windhager A, Suda M, Pache C, Peev M, Poppe A 2011 *Opt. Commu.* **284** 1907
 [22] Xu X X, Jia F, Hu L Y, Duan Z L, Guo Q, Ma S J 2012 *J. Mod. Opt.* **59** 1624
 [23] Schleich W P 2001 *Quantum Optics in Phase space* (Berlin: Verlag)
 [24] Xu X X, Yuan H C, Hu L Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4661
 [25] Zhang H L, Jia Fang, Xu X X, Guo Q, Tao X Y, Hu L Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 014208
 [26] Hu L Y, Xu X X, Fan H Y 2010 *J. Opt. Soc. Am. B* **27** 286
 [27] Glauber R 1963 *Phys. Rev.* **131** 2766
 [28] Puri R R 2001 *Mathematical Methods of Quantum Optics* (Berlin: Springer-Verlag) Appendix A
 [29] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Chin Phys. B* **18** 4657
 [30] Leonhardt U 1997 *Measuring the quantum state of light* (Cambridge: Cambridge University Press)
 [31] Wang K, Zhu S 2003 *Euro Phys. Lett.* **64** 22
 [32] Wang K, Yang G 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 302

Wigner function of $N00N$ state and quantum interference with $N00N$ state as input*

Xu Xue-Xiang^{1)†} Zhang Ying-Kong²⁾ Zhang Hao-Liang¹⁾ Chen Yuan-Yuan¹⁾

1) (College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

2) (Guangzhou GCI Science & Technology Corporation Limited, Guangzhou 510310, China)

(Received 31 October 2012; revised manuscript received 22 February 2013)

Abstract

Using the formula of Wigner function in coherent representation, we have obtained the analytical expression for Wigner function of $N00N$ state. Based on phase space method, we study the quantum interference with $N00N$ state as input. We derive the analytical expression of conditional probability related with the input parameter N and phase parameter ϕ and analyze it numerically. It is shown that, when ϕ is 0 or π , the output is just $N00N$ state. It is also shown that, for 2002 state as input, the output must be 2002 state, which is independent of phase parameters. Moreover, as the number of input photon N increases, the phase probability distributions remain to have one, two, three and four peaks and get narrower. All these results can offer theoretical reference for experiments.

Keywords: $N00N$ state, wigner function, phase space, quantum interference

PACS: 42.50.Dv, 42.25.Hz, 85.35.Ds

DOI: 10.7498/aps.62.114204

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11175113, 11264018, 11247301), the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (Grant No. 2011BAB202004), and the Research Foundation of the Education Department of Jiangxi Province of China (Grant No. GJJ12171).

† Corresponding author. E-mail: xxxjxnu@gmail.com