

## 三比特类 GHZ 态的 Bell 型不等式和非定域性\*

赵加强<sup>†</sup> 曹连振 逯怀新 王晓芹

(山东省多光子纠缠与操纵重点实验室, 潍坊学院物理与光电工程学院, 潍坊 261061)

(2012年11月1日收到; 2013年2月18日收到修改稿)

研究了一般形式类 GHZ(Greenberger-Horne-Zeilinger) 态的共生纠缠度及非定域性, 给出了类 GHZ 纠缠态的共生纠缠、Mermin 不等式和 Svetlichny 不等式的解析表达式, 并通过数值计算讨论纠缠与非定域性之间的关系. 结果表明, 类 GHZ 纠缠态的共生纠缠和两个 Bell 型不等式描述的非定域性是一致的, Bell 算符及其参量, 能够明显展示量子态的非定域特性.

**关键词:** 量子信息, 类 GHZ 态, 共生纠缠, Bell 型不等式

**PACS:** 03.65.Ud, 03.67.-a, 42.50.Dv

**DOI:** 10.7498/aps.62.120301

## 1 引言

量子纠缠是量子信息理论中最奇特的性质之一, 纠缠体系是量子信息处理<sup>[1]</sup>最核心的资源, 在量子隐形传态<sup>[2]</sup>、量子密钥分发<sup>[3]</sup>、量子计算<sup>[4]</sup>等应用中起着关键作用. 纠缠体系也可以用来证明量子力学体系所具有的非定域特性<sup>[5,6]</sup>. 量子信息研究中量子纠缠和非定域性之间的关系是人们一直关注的一个重要问题<sup>[7]</sup>. Bell 不等式提出后, 使仅在理论层面上的 Einstein-Bohr 之争, 变成了可以通过实验测量和检验的问题<sup>[8]</sup>, 也证实了量子力学的完备性. 最大纠缠态是量子通信和量子计算的理想资源, 例如人们基于 GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) 态、W 态等纯态提出了一系列量子态隐形传送<sup>[3]</sup>、量子密钥分发<sup>[5]</sup>的可行性方案. 但是, 非最大纠缠态会使量子信息处理过程的效率和可靠性降低<sup>[9-11]</sup>. 实际上, 由于各种非理想因素的存在, 实验中制备的纠缠态也往往很难是最大纠缠态, 所以判断一个实际纠缠体系在用作量子信道时是否安全便是一个前提问题. 1991 年 Ekert<sup>[12]</sup> 理论证明, 只要纠缠体系违背了 Bell 定理, 即使用非最大纠缠态来进行量子密钥分发也是安全的, 并提出了

基于非最大纠缠态量子密钥分发的 E91 协议, 这也是目前量子通信领域仍在使用的量子密钥分发理论基础. 因此, 研究一般形式量子体系的非定域性具有重要的现实意义.

Mermin 不等式和 Svetlichny 不等式已经被广泛用于研究多体纠缠系统的非定域性<sup>[13-16]</sup>, 可以很好地验证量子力学和隐变量理论之间的矛盾. 实际上, 真正完全对称的 GHZ 态实验上是难以实现的. 对于一般形式的纠缠体系, 给出其纠缠与非定域性之间的关系, 是人们一直关心的重要问题. 本文将给出一个一般形式类 GHZ 态的共生纠缠及两个 Bell 型不等式描述的非定域性解析表达式, 并通过数值计算讨论纠缠与非定域性之间的关系. 由于 GHZ 态在量子信息处理中的重要地位, 研究其纠缠与非定域性之间的关系, 是对多粒子纠缠态的制备、性质描述和在量子信息处理中的应用提供参考.

## 2 类 GHZ 态的共生纠缠

类 GHZ 三体纠缠纯态为<sup>[17]</sup>

$$|\psi_{GS}\rangle = \cos\theta|000\rangle + \sin\theta|11\rangle\{\cos\theta_3|0\rangle + \sin\theta_3|1\rangle\}, \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11174224)、山东省科技发展计划 (批准号: 2011GGA07158)、山东省自然科学基金 (批准号: ZR2011AL012, ZR2009AL018) 和山东省高等学校科技计划 (批准号: J11LA56) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: zhaojiaqiang@eyou.com

显然, 当  $\theta = \pi/4$  且  $\theta_3 = \pi/2$  时, (1) 式所示的类 GHZ 态退化为熟知的 GHZ 态.

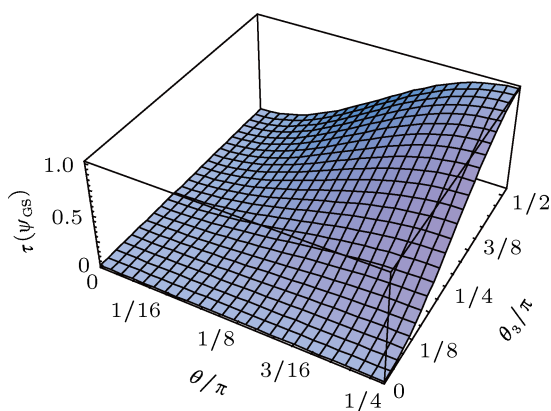


图 1 类 GHZ 态的共生纠缠度

首先给出 (1) 式共生纠缠度 (concurrence) 的具体表示. 对于三比特纯态, 根据 Coffman 的定义, 三共生纠缠度为 [18]

$$\tau(\psi) = C_{1(23)}^2 - C_{12}^2 - C_{13}^2, \quad (2)$$

$\tau(\psi)$  也称为三体纠缠度. 其中  $C_{1(23)}$  为比特 1 与比特 2-3 的共生纠缠度, 表示比特 1 和联合比特 2-3 间两体纠缠,  $C_{12}$  和  $C_{13}$  分别表示约化态  $\rho_{12}$  和  $\rho_{13}$  的共生纠缠度, 为比特 1 和比特 2 以及比特 1 和比特 3 之间的两体纠缠. 一般形式的三体纠缠态为

$$\begin{aligned} |\Psi_g\rangle = & a_{000}|000\rangle + a_{100}|100\rangle + a_{010}|010\rangle \\ & + a_{001}|001\rangle + a_{110}|110\rangle + a_{101}|101\rangle \\ & + a_{011}|011\rangle + a_{001}|001\rangle + a_{111}|111\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $a_{000}, a_{010}, \dots, a_{111}$  为展开系数. 根据文献 [19] 的处理方法,

$$\tau(\psi) = 4|d_1 - 2d_2 + 4d_3|, \quad (4)$$

其中

$$d_1 = a_{000}^2 a_{111}^2 + a_{001}^2 a_{110}^2 + a_{010}^2 a_{101}^2 + a_{100}^2 a_{011}^2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} d_2 = & a_{000} a_{111} a_{011} a_{100} + a_{000} a_{111} a_{101} a_{010} \\ & + a_{000} a_{111} a_{110} a_{001} + a_{011} a_{100} a_{101} a_{010} \\ & + a_{011} a_{100} a_{110} a_{001} + a_{101} a_{010} a_{110} a_{001}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$d_3 = a_{000} a_{110} a_{101} a_{011} + a_{111} a_{001} a_{010} a_{100}. \quad (7)$$

利用 (3) 式的展开方法, 很容易得到类 GHZ 态的展开系数为

$$a_{000} = \cos \theta, \quad a_{110} = \sin \theta \cos \theta_3,$$

$$a_{111} = \cos \theta \sin \theta_3,$$

$$a_{100} = a_{010} = a_{001} = a_{101} = a_{011} = a_{001} = 0. \quad (8)$$

利用 (4)—(7) 式可以得到类 GHZ 态的三体纠缠度  $\tau(\psi_{GS})$

$$\tau(\psi_{GS}) = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \theta_3, \quad (9)$$

图 1 给出了  $\tau(\psi_{GS})$  与参数  $\theta$  和  $\theta_3$  的关系.

### 3 类 GHZ 态的 Mermin 不等式

Mermin 给出了判断  $N$  个自旋为  $1/2$  的粒子体系非定域性可测条件的 Bell 型不等式 [13]. 三粒子体系中, 用四个联合可测力学量给出 Mermin 算符期望值的上限, 并且已有多个研究组利用不同的实验系统加以验证 [20–23]. 对于自旋为  $1/2$  的三粒子纠缠体系, Mermin 算符可表示为一组可测力学量的形式:

$$\begin{aligned} M = & -\sigma_{y1} \sigma_{y2} \sigma_{y3} + \sigma_{y1} \sigma_{x2} \sigma_{x3} \\ & + \sigma_{x1} \sigma_{y2} \sigma_{x3} + \sigma_{x1} \sigma_{x2} \sigma_{y3}, \end{aligned} \quad (10)$$

$\sigma_x, \sigma_y$  为 Pauli 算符. 量子力学理论 (QM) 和隐变量理论 (LM) 给出的值分别为

$$|\langle M \rangle_{LM}| \leq 2, \quad |\langle M \rangle_{QM}| \leq 4, \quad (11)$$

也就是说, 算符  $M$  的期望值在 QM 中不超过 2, 而在 LM 中不大于 4, 在 2—4 之间就是对 LM 的违背.

理论上, 对于 (1) 式所示的类 GHZ 态, 可以计算得到

$$|\langle \psi_{GS} | M | \psi_{GS} \rangle| = 4 \sin(2\theta) \sin \theta_3, \quad (12)$$

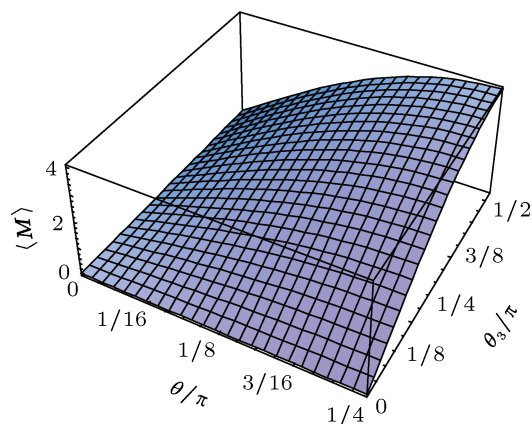


图 2 类 GHZ 态的 Mermin 算符期望值

图 2 表明, 类 GHZ 态中 Mermin 算符的期望值和共生纠缠度与参数  $\theta$  和  $\theta_3$  的关系是一致的, 也

就是说, 利用共生纠缠度和 Mermin 不等式描述 (1) 式所定义类 GHZ 纠缠态的纠缠和非定域性是等价的.

### 4 类 GHZ 态的 Svetlichny's 不等式

Svetlichny<sup>[24]</sup> 把两比特的 Bell 不等式推广到三比特, 给出了描述三体纠缠体系非定域性的 Bell 型 Svetlichny 算符为

$$S = A(BK + B'K') + A'(BK' + B'K), \quad (13)$$

其中,  $K = C + C'$ ,  $K' = C - C'$ ,  $A = a \cdot \sigma_1$  和  $A' = a' \cdot \sigma_1$  作用于比特 1,  $B = b \cdot \sigma_2$  和  $B' = b' \cdot \sigma_2$  作用于比特 2,  $C = c \cdot \sigma_3$  和  $C' = c' \cdot \sigma_3$  作用于比特 3.  $a, a', b, b'$  和  $c, c'$  是单位矢量,  $\sigma_i$  为可写作 Pauli 矩阵的自旋投影算符. Svetlichny 指出, 对任意的三粒子态, 隐变量理论预言

$$|\langle \phi | S | \phi \rangle| = S(\phi) \leq 4, \quad (14)$$

(14) 式称为 Svetlichny 不等式.

对给定的量子态  $|\psi\rangle$ , 需要给出  $S(\psi)$  的具体表达式, 对于

$$a = (\sin \theta_a \cos \phi_a, \sin \theta_a \sin \phi_a, \cos \theta_a), \quad (15)$$

其他单位矢量  $a', b, b', c, c'$  也可记为与 (15) 式类似的形式.

定义单位矢量  $d$  和  $d'$  满足如下关系

$$b + b' = 2d \cos \theta, \quad (16)$$

$$b - b' = 2d' \sin \theta, \quad (17)$$

显然

$$d \cdot d' = \cos \theta_d \cos \theta_{d'} + \sin \theta_d \sin \theta_{d'} \cos(\phi_d - \phi_{d'}) = 0, \quad (18)$$

令  $D = d \cdot \sigma_2$ ,  $D' = d' \cdot \sigma_2$ . 则  $S$  算符在  $|\psi\rangle$  态中的平均值可以写为

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_\psi &= 2 | \cos \theta \langle ADC \rangle + \sin \theta \langle AD'C' \rangle \\ &\quad + \sin \theta \langle A'D'C \rangle - \cos \theta \langle A'DC' \rangle | \\ &\leq 2 \{ \langle ADC \rangle^2 + \langle AD'C' \rangle^2 \}^{1/2} \\ &\quad + \{ \langle A'D'C \rangle^2 + \langle A'DC' \rangle^2 \}^{1/2}, \end{aligned} \quad (19)$$

这里应用了关系式

$$x \cos \theta + y \sin \theta \leq (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (20)$$

当  $\tan \theta = y/x$  时, (20) 式中等号成立.

对于 (1) 式所示的类 GHZ 态, 取  $\theta_{d'} = \theta_a = \theta_c = \theta_{c'} = \pi/2$ ,  $\theta_a = \phi_{c'} = 0$ . 定义  $\cos^2 \varphi_{ijk} = \cos^2(\phi_i + \phi_j + \phi_k)$ , 取  $\varphi_{adc'} = \varphi_{adc} = 0$ ,  $\varphi_{adc'} = \pi/2$ , 利用 (19) 式可以计算得到

$$S(\psi_{GS}) = 4\sqrt{2} \sin(2\theta) \sin \theta_3. \quad (21)$$

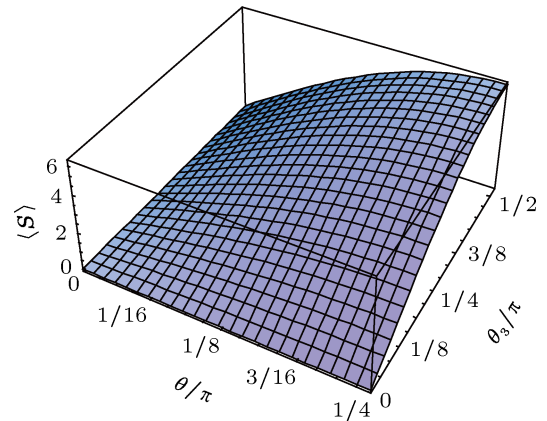


图 3 类 GHZ 态的 Svetlichny 算符期望值

图 3 表明类 GHZ 态中 Svetlichny 算符的期望值、共生纠缠度和参数  $\theta$  和  $\theta_3$  的关系是一致的, 并且和 Mermin 不等式描述的非定域性一致, 这也充分说明了 (1) 式所示的类 GHZ 纠缠态的纠缠和非定域性之间的内在关系.

### 5 结论

本文讨论了类 GHZ 态的共生纠缠度与两个 Bell 型不等式描述的非定域性之间的关系. 结果表明, Bell 算符及其相关参量将会更明显展示量子态的非定域特性. 同时说明, (1) 式给出的类 GHZ 纠缠态是 GHZ 态的一种广义表示形式. 实际上实验上是难以实现的真正完全对称的 GHZ 态, Ghose<sup>[17]</sup> 分别对  $|\psi_S\rangle = 1/\sqrt{2}[|000\rangle + |11\rangle(\cos \theta_3 |0\rangle + \sin \theta_3 |1\rangle)]$  和  $|\psi_G\rangle = \cos \theta |000\rangle + \sin \theta |111\rangle$  进行了理论分析. 由于自旋对称失调, 实验中制备出的体系往往是 (1) 式中  $\theta$  和  $\theta_3$  两个参数取一般值. 所以, 若从实验上制备了这种形式的类 GHZ 态, 只要满足  $\theta$  和  $\theta_3$  的取值范围, 用作量子信息处理过程便是安全的, 从而为量子信息处理的理论和实验研究提供有价值的参考.

- [1] Man Z X, Xia Y J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 052306  
 [2] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895  
 [3] Zheng Y Z, Gu Y J, Guo G C 2002 *Chin. Phys.* **11** 537  
 [4] Prevedel T, Walther P, Tiefenbacher F 2007 *Nature* **445** 05346  
 [5] Chen Z B, Pan J W, Zhang Y D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 160408  
 [6] Xia Y J, Guo G C 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1877  
 [7] Wang Z W, Zhou X F, Huang Y F, Zhang Y S, Ren X F, Guo G C 2006 *Physics* **35** 913 (in Chinese) [王志伟, 周祥发, 黄运锋, 张永生, 任希锋, 郭光灿 2006 物理 **35** 913]  
 [8] Hossein N H, Stock R, James D F V 2009 *Phys. Rev. A* **80** 022308  
 [9] Pan J W, Daniell M, Gasparoni S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4435  
 [10] Deutsch D, Ekert A, Jozsa R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2818  
 [11] Howell H C, Linares A L, Bouwmeester D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 030401  
 [12] Ekert A 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 611  
 [13] Mermin N D 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1838  
 [14] Bouwmeester D, Pan J W, Daniell M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1345  
 [15] Pan J W, Daniel M, Gasparoni S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4435  
 [16] Zhao Z, Yang T, Chen Y A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 207901  
 [17] Ghose S, Sinclair N, Debnath S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 250404  
 [18] Coffman V, Kundu J, Wootters W K 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052306  
 [19] Miyake A 2003 *Phys. Rev. A* **67** 012108  
 [20] Jungnitsch B, Niekamp S, Kleinmann M 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 210401  
 [21] Lu H X, Zhao J Q, Wang X Q 2011 *Phys. Rev. A* **84** 044101  
 [22] Zhao J Q, Cao L Z, Wang X Q, Lu H X 2012 *Phys. Lett. A* **376** 2377  
 [23] Zhao J Q, Cao L Z, Wang X Q, Lu H X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170301 (in Chinese) [赵加强, 曹连振, 王晓芹, 逯怀新 2012 物理学报 **61** 170301]  
 [24] Svetlichny G 1987 *Phys. Rev. D* **35** 3066

## Bell-type inequality and tripartite nonlocality in three-qubit GHZ-class states\*

Zhao Jia-Qiang<sup>†</sup> Cao Lian-Zhen Lu Huai-Xin Wang Xiao-Qin

(Shandong Provincial Key Laboratory of Multi-photon Entanglement and Manipulation, Department of Physics and Optoelectronic Engineering, Weifang University, Weifang 261061, China)

(Received 1 November 2012; revised manuscript received 18 February 2013)

### Abstract

In this paper, we theoretically study the relation between concurrence and nonlocality depicted by Bell-type inequality violation of quantum mechanics prediction versus local realism prediction for the GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) class states. Analytical expressions of concurrence, violations of the Mermin inequality and the Svetlichny inequality are obtained. Through numerical calculations, the relationship between entanglement and nonlocality of GHZ-class states is discussed. Our results show that the concurrence is consistent with the degree of nonlocality described by violations of the two Bell-type inequalities of GHZ-class states. The Bell operator and its parameters can obviously reveal the nonlocal features of quantum states.

**Keywords:** quantum information, GHZ-type states, concurrence, Bell-type inequalities

**PACS:** 03.65.Ud, 03.67.-a, 42.50.Dv

**DOI:** 10.7498/aps.62.120301

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11174224), the Science and Technology Development Program of Shandong Province, China (Grant No. 2011GGA07158), the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant Nos. ZR2011AL012, ZR2009AL018), and the Science and Technology Program of Higher Education of Shandong Province, China (Grant No. J11LA56).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: zhaojiaqiang@eyou.com