

具有涨落质量的线性谐振子的共振行为*

蔚涛 张路 罗懋康†

(四川大学数学学院, 成都 610064)

(2013年1月12日收到; 2013年1月12日收到修改稿)

Brown 运动中, 环境分子的吸附能力使 Brown 粒子的质量存在涨落. 本文将这一质量涨落建模为对称双态噪声, 以考察其对系统共振行为的影响. 首先, 利用 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换推导系统稳态响应振幅的解析表达式, 并根据相应数值结果, 研究系统的共振行为; 然后, 通过仿真实验对理论与实际的符合情况进行对比分析, 验证理论结果的可靠性及其对实际应用的指导意义. 理论结果和仿真实验均表明: 1) 系统稳态响应为频率与外部驱动相同的简谐振动; 2) 稳态响应振幅随外部驱动频率、振子质量、噪声强度及相关率的变化分别相应出现真实共振、参数诱导共振、随机共振现象; 3) 质量涨落噪声导致系统共振形式出现多样化现象, 包括单峰共振、单峰单谷共振、双峰共振等.

关键词: 质量涨落噪声, 随机共振, 双峰共振

PACS: 05.40.-a, 05.40.Ca, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.62.120504

1 引言

物理、化学等自然科学及社会科学中广泛存在的复杂振动现象, 无不以简谐振动为基本因素构成, 其基本模型是经典的确定性谐振子模型, 一般形式为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = A_0 \cos(\Omega t).$$

目前, 确定性谐振子的动力学行为已得到充分研究^[1]. 然而, 一切自然现象都会受到随机力的影响, 为了更真实地刻画客观现象, 需针对实际情况在模型中引入随机力.

随机力按其起源不同可分为内噪声和外噪声^[2,3]: 内噪声来源于系统内部环境分子对 Brown 粒子的无规律碰撞, 在系统中通常以加性噪声形式出现, 相应系统模型如下:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = A_0 \cos(\Omega t) + \eta(t),$$

外噪声来源于外部输入或外部控制参数的无规律涨落, 在系统中通常以乘性噪声形式出现. 以系统

阻尼涨落噪声^[4,5]为例, 相应系统模型如下:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + (\gamma + \xi(t)) \frac{dx}{dt} + kx = A_0 \cos(\Omega t).$$

对线性谐振子而言, 外噪声对其动力学行为影响很大, 相关问题的研究近年来在统计物理中引起了学者们的强烈兴趣^[4-7]. 以往的研究工作通常考虑系统阻尼或固有频率受扰动而引入的外噪声, 即阻尼涨落噪声和固有频率涨落噪声^[6,7], 对系统振子质量受扰动而引入的外噪声的研究却相对较少. 事实上, 在很多化学、生物系统^[8-10]中, 环境介质中的分子往往具有一定吸附能力, 会随机地吸附于 Brown 粒子, 使 Brown 粒子质量存在随机涨落, 因此环境分子的吸附能力对系统动力学特性的影响是必须考虑的重要因素. 对此, 在模型中如 [11—13] 引入质量涨落噪声 $\xi(t)$:

$$(m + \xi(t)) \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = A_0 \cos(\Omega t).$$

典型的具有涨落质量的系统有: 随机吸放粒子的纳米谐振器^[14]、具有随机质量的团簇扩散系统^[15]、离子交换反应系统^[16]等.

* 国家自然科学基金(批准号: 11171238)和国家自然科学基金创新研究群体科学基金(批准号: 11221101)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

对谐振子而言,共振是其典型动力学特性之一,特别地,随机谐振子的随机共振^[17]现象从20世纪80年代被提出以来便受到学者们的普遍关注.随机共振现象表明,在一定的前提条件下,适当增加系统的输入噪声,不仅不会降低,反而会大幅增加系统输出的有序成分.目前,对具有涨落质量的谐振子的共振行为研究报道较少.Gitterman和Shapiro^[18]通过将质量涨落噪声建模为非对称双态噪声的二次函数,发现具有涨落质量的谐振子的响应幅值增益存在随机共振现象.但其研究工作在讨论噪声参数及振子质量对共振形式的影响方面未能深入,因而只发现了传统的单峰共振形式;再者,该研究工作也未进一步从仿真实验的角度展开,未能验证其理论研究结果与实际情况的符合程度.基于质量涨落振子的重要性及其共振行为的研究现状,相应研究工作需进一步深入.

本文主要关注质量涨落噪声对系统共振行为的影响.首先,在最基本的行为层面上,将质量涨落噪声建模为对称双态噪声,使得本文研究结果具有一定普适性.在此基础上,推导了系统响应一阶矩及稳态响应振幅的解析表达式,并根据相应数值结果,分析了质量涨落噪声作用下系统稳态响应振幅的共振行为,发现了在此类系统以往的研究工作中未见报道的双峰共振、单峰单谷共振等新共振形式.最后,通过仿真实验分析了理论结果与实际情况的符合程度,两者的一致性体现了本文研究结果的可靠性,同时也对本文研究结果的实际应用具有指导作用.

2 系统模型及系统稳态响应振幅

2.1 系统模型

一个具有涨落质量的线性谐振子可由如下随机微分方程描述:

$$(m + \xi(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + m\omega^2 x(t) = A_0 \cos(\Omega t) + \eta(t), \quad (1)$$

其中, $x(t)$ 代表振子的位移, m 为振子的质量, $\gamma > 0$ 为阻力系数, ω 为系统固有频率, $A_0 \cos(\Omega t)$ 表示系统受到的外部驱动力,其振幅和频率分别为 A_0 , Ω . $\xi(t)$ 表示振子质量 m 受到的随机扰动,为系统外噪声,本文将其建模为对称双态噪声. $\xi(t)$ 在

$\{\sigma, -\sigma\}$, $\sigma \geq 0$ 中取值,具有指数关联性,满足如下的统计性质:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t) \xi(s) \rangle &= \sigma^2 \exp(-\lambda |t - s|), \end{aligned} \quad (2)$$

其中, σ^2 为噪声强度, λ 为噪声相关率.为保证振子质量始终为正,要求系统外噪声幅度小于振子质量,即 $\sigma < m$.

$\eta(t)$ 表示系统内部环境分子的随机作用力,为系统内噪声,本文将其建模为高斯白噪声. $\eta(t)$ 满足如下的统计性质:

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \eta(t) \eta(s) \rangle &= D \delta(t - s), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, D 为噪声强度.

由于内、外噪声起源不同,本文假设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 互不相关,即

$$\langle \xi(t) \eta(s) \rangle = 0. \quad (4)$$

2.2 系统响应一阶矩

下面我们通过矩方程求解法推导系统响应一阶矩的解析表达式,推导过程将利用指数关联噪声所满足的 Shapiro-Loginov 公式^[19]:

$$\left\langle \xi(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\rangle = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \langle \xi(t) x(t) \rangle. \quad (5)$$

对(1)式两端取均值并利用 Shapiro-Loginov 公式可得

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi(t) x(t) \rangle \\ + \gamma \frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} + m\omega^2 \langle x(t) \rangle \\ = A_0 \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式中出现了耦合项 $\langle \xi(t) x(t) \rangle$,需建立该耦合项所满足的方程以便对变量进行联立求解.为此,在(1)式两端分别乘上 $\xi(t)$ 后取均值,利用 Shapiro-Loginov 公式可得:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi(t) x(t) \rangle + \sigma^2 \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} \\ + \gamma \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle \xi(t) x(t) \rangle + m\omega^2 \langle \xi(t) x(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

(6) 式和 (7) 式构成了 $\langle x(t) \rangle, \langle \xi(t)x(t) \rangle$ 所满足的线性微分方程组:

$$\begin{cases} \left(m \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + m\omega^2 \right) \langle x(t) \rangle \\ + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi(t)x(t) \rangle = A_0 \cos(\Omega t), \\ \sigma^2 \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \right. \\ \left. + \gamma \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) + m\omega^2 \right] \langle \xi(t)x(t) \rangle = 0. \end{cases} \quad (8)$$

记 $\langle x(t) \rangle = x_1, \langle \xi(t)x(t) \rangle = x_2$, 对方程组 (8) 做 Laplace 变换可得:

$$\begin{cases} d_{11}X_1(s) + d_{12}X_2(s) = A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} + d_{13}, \\ d_{21}X_1(s) + d_{22}X_2(s) = d_{23}, \end{cases} \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} d_{11} &= ms^2 + \gamma s + m\omega^2, \\ d_{12} &= (s + \lambda)^2, \\ d_{13} &= (ms + \gamma)x_1(0) + m\dot{x}_1(0) + (s + 2\lambda)x_2(0) \\ &\quad + \dot{x}_2(0), \\ d_{21} &= \sigma^2 s^2, \\ d_{22} &= m(s + \lambda)^2 + \gamma(s + \lambda) + m\omega^2, \\ d_{23} &= \sigma^2 s x_1(0) + \sigma^2 \dot{x}_1(0) + (ms + 2m\lambda + \gamma)x_2(0) \\ &\quad + m\dot{x}_2(0). \end{aligned}$$

求解方程组 (9) 可得:

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \\ \quad + \frac{d_{13}d_{22} - d_{12}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}, \\ X_2(s) = -\frac{d_{21}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \\ \quad + \frac{d_{11}d_{23} - d_{21}d_{13}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}. \end{cases} \quad (10)$$

记 $x_3(0) = \dot{x}_1(0), x_4(0) = \dot{x}_2(0)$, 对 (10) 式做 Laplace 逆变换, 可得系统响应一阶矩 $x_1 = \langle x(t) \rangle, x_2 = \langle \xi(t)x(t) \rangle$ 的解析表达式:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= A_0 \int_0^t h_{i0}(t-t') \cos(\Omega t') dt' \\ &\quad + \sum_{k=1}^4 h_{ik}(t)x_k(0) \quad (i=1,2), \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $h_{ik}(t)$ 的 Laplace 变换为 $H_{ik}(s), H_{ik}(s)$ 可通过方程组 (10) 确定. 特别地, $H_{10}(s)$ 和 $H_{20}(s)$ 可看作

系统传递函数, 相应表达式如下:

$$\begin{cases} H_{10}(s) = \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}, \\ H_{20}(s) = -\frac{d_{21}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}. \end{cases} \quad (12)$$

2.3 系统稳态响应振幅

为保证 (11) 式所确定的系统响应一阶矩的稳定性, 要求系统传递函数分母所对应的特征方程

$$d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = \sum_{i=0}^4 a_i s^i = 0 \quad (13)$$

的所有根均不能具有正实部, 其中,

$$\begin{aligned} a_0 &= m\omega^2(\gamma\lambda + m\omega^2 + m\lambda^2), \\ a_1 &= 2m\omega^2\gamma + 2m^2\omega^2\lambda + m\lambda^2\gamma + \lambda\gamma^2, \\ a_2 &= (m^2 - \sigma^2)\lambda^2 + 3m\gamma\lambda + 2m^2\omega^2 + \gamma^2, \\ a_3 &= 2\lambda(m^2 - \sigma^2) + 2m\gamma, \quad a_4 = m^2 - \sigma^2. \end{aligned}$$

根据 Routh-Hurwitz 稳定性判据, 结合参数条件 $\sigma < m$, 可得系统稳定性条件为

$$a_1 a_4 < a_2 a_3, \quad a_0 a_3^2 < a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4. \quad (14)$$

本文后续讨论均在系统稳定性条件 (14) 式成立的情况下展开, 此时, 令 $t \rightarrow \infty$, 经长时间演化, 初始条件对系统响应的影响将逐渐消失, 系统将进入稳定状态. 由 (11) 式可知, 系统稳态响应均值为

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle_{as} &= \langle x(t) \rangle|_{t \rightarrow \infty} \\ &= A_0 \int_0^t h_{10}(t-t') \cos(\Omega t') dt'. \end{aligned} \quad (15)$$

从信号与系统的角度出发, $\langle x(t) \rangle_{as}$ 可看作正弦信号 $\cos(\Omega t)$ 输入传递函数为 $H_{10}(s)$ 的线性时不变系统后的输出, 从而 (15) 式可进一步表示为

$$\langle x(t) \rangle_{as} = A \cos(\Omega t + \phi), \quad (16)$$

其中, A 和 ϕ 分别为系统稳态响应的振幅和相移, 满足:

$$A = |H_{10}(j\Omega)|, \quad \phi = \arg(H_{10}(j\Omega)). \quad (17)$$

利用 $H_{10}(s)$ 的表达式 (12), 可得系统稳态响应振幅 A 和相移 ϕ 的解析表达式:

$$\begin{cases} A = A_0 \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_3^2 + f_4^2}}, \\ \phi = \arctan\left(\frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1 f_3 + f_2 f_4}\right), \end{cases} \quad (18)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 f_1 &= m\omega^2 - m\Omega^2 + m\lambda^2 + \gamma\lambda, \\
 f_3 &= (m\omega^2 - m\Omega^2)f_1 - \gamma\Omega f_2 \\
 &\quad - \sigma^2\Omega^4 + \sigma^2\Omega^2\lambda^2, \\
 f_2 &= 2m\lambda\Omega + \gamma\Omega, \\
 f_4 &= (m\omega^2 - m\Omega^2)f_2 + \gamma\Omega f_1 + 2\lambda\sigma^2\Omega^3.
 \end{aligned}$$

3 系统稳态响应振幅的共振行为

在上一节中通过理论推导给出了系统稳态响应振幅 A 的解析表达式 (18), 下面结合相应数值结果, 讨论稳态响应振幅 A 随外部驱动频率 Ω , 振子质量 m , 质量涨落噪声强度 σ 及噪声相关率 λ 的变化所具有的共振行为.

3.1 稳态响应振幅随外部驱动频率的变化

当质量涨落噪声强度 $\sigma = 0.6, 0.8, 1$ 时, 根据 (18) 式得到的 $A-\Omega$ 曲线如图 1(a) 所示. 从图 1(a) 可

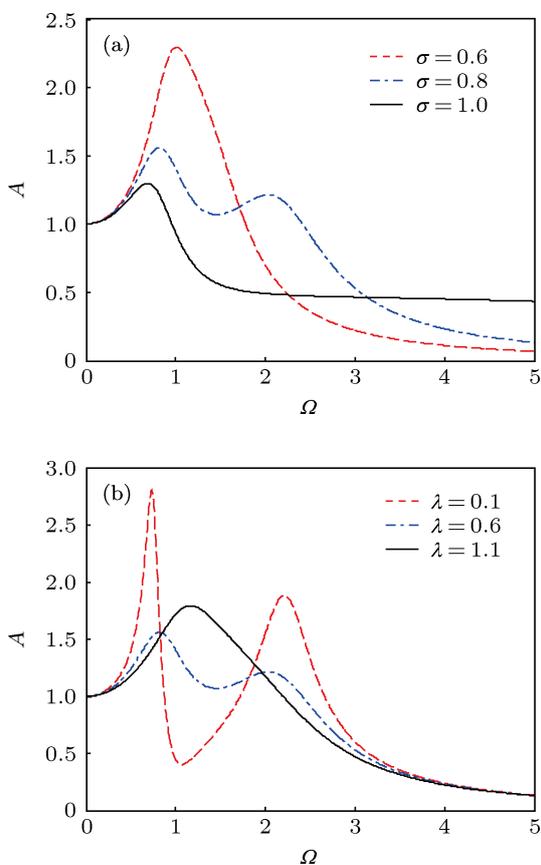


图 1 振幅 A 随外部驱动频率 Ω 的变化, $m = 1, \gamma = 0.1, \omega = 1, A_0 = 1$ (a) $\lambda = 0.6$; (b) $\sigma = 0.8$

以看出: 振幅 A 随着外部驱动频率 Ω 的变化出现了真实共振现象. 当 $\sigma = 0.6$ 时, 振幅 A 表现出传统的单峰共振; 随着噪声强度的增大, 当 $\sigma = 0.8$ 时, 振幅 A 表现出明显的双峰共振, 此时, 系统具有两个共振频率, 且在第一个共振频率处的响应幅值较大; 随着噪声强度的进一步增大, 当 $\sigma = 1$ 时, 双峰共振现象逐渐消失, 系统恢复到原有的单峰共振状态, 且共振峰逐渐左移, 峰值逐渐减小.

当质量涨落噪声相关率 $\lambda = 0.1, 0.6, 1.1$ 时, 根据 (18) 式得到的 $A-\Omega$ 曲线如图 1(b) 所示. 从图 1(b) 可以看出: 噪声相关率 λ 对系统真实共振行为影响很大. 当 $\lambda = 0.1$ 时, 振幅 A 表现出明显的双峰共振; 随着噪声相关率的增大, 当 $\lambda = 0.6$ 时, 振幅 A 仍表现出双峰共振, 但两个波峰逐渐向波谷靠拢, 且波峰逐渐下降, 波谷逐渐上升; 随着噪声相关率的进一步增大, 当 $\lambda = 1.1$ 时, 由于波谷的持续上升, 振幅 A 在波谷位置处形成了一个新共振峰, 双峰共振现象消失, 系统恢复到传统的单峰共振状态.

上述结果表明: 在质量涨落噪声驱动下的谐振子具有比传统谐振子更为丰富的真实共振行为, 其共振行为与噪声统计性质关系密切, 当噪声参数在一定范围内时, 系统将出现传统谐振子所不具有的双峰共振现象.

3.2 稳态响应振幅随振子质量的变化

当质量涨落噪声强度 $\sigma = 0.7, 0.75, 0.8$ 时, 根据 (18) 式得到的 $A-m$ 曲线如图 2(a) 所示. 从图 2(a) 可以看出: 振幅 A 随着振子质量 m 的变化出现了参数诱导共振现象. 随着噪声强度的增大, 共振峰位置逐渐右移, 峰值则基本保持不变.

当质量涨落噪声相关率 $\lambda = 0, 0.4, 2$ 时, 根据 (18) 式得到的 $A-m$ 曲线如图 2(b) 所示. 从图 2(b) 可以看出: 随着噪声相关率的增大, 共振峰位置逐渐左移, 峰值先逐渐减小后逐渐增大, 也即存在某一特定的 λ , 使得系统的共振峰达到最小值.

上述结果表明: 系统稳态响应振幅关于振子质量具有明显的参数诱导共振行为, 且质量涨落噪声强度直接影响共振峰位置, 噪声相关率则同时影响共振峰位置及共振强度. 在未考虑质量涨落噪声的情况下, 这一共振现象在以往的研究工作中很少受到关注 [20].

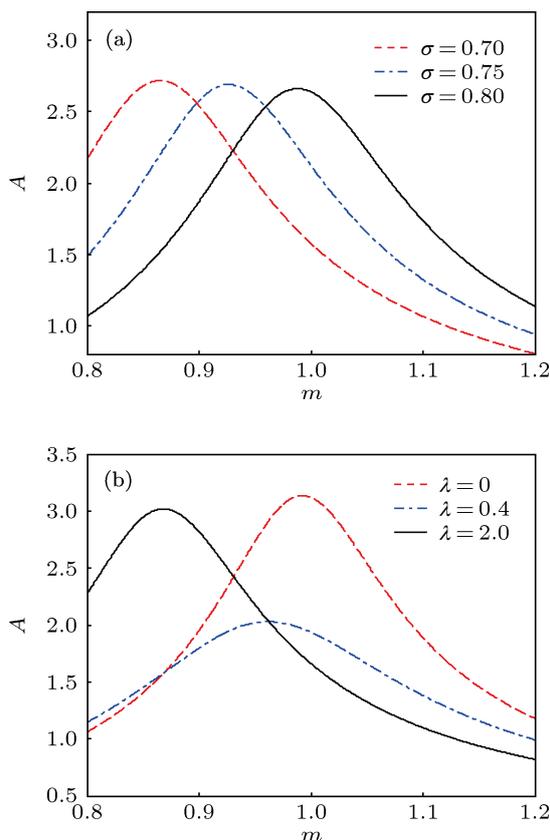


图2 振幅 A 随振子质量 m 的变化, $\gamma = 0.1, \omega = 0.7, A_0 = 1, \Omega = 1.6$ (a) $\lambda = 0.1$; (b) $\sigma = 0.8$

3.3 稳态响应振幅随质量涨落噪声强度的变化

当振子质量 $m = 0.6, 0.8, 1$ 时, 根据 (18) 式得到的 $A-\sigma$ 曲线如图 3(a) 所示. 从图 3(a) 可以看出: 振幅 A 随着质量涨落噪声强度 σ 的变化出现了随机共振现象. 随着振子质量的增大, 共振峰位置逐渐右移, 峰值逐渐减小.

当质量涨落噪声相关率 $\lambda = 0, 0.6, 1.2$ 时, 根据 (18) 式得到的 $A-\sigma$ 曲线如图 3(b) 所示. 从图 3(b) 可以看出: 随着噪声相关率的增大, 共振峰位置逐渐右移, 峰值先逐渐减小后逐渐增大, 也即存在某一特定的 λ 使得系统随机共振强度最弱.

上述结果表明: 系统稳态响应振幅关于质量涨落噪声强度具有随机共振现象, 也即在一定参数条件下, 质量涨落噪声有助于增强系统对外部驱动信号的响应强度. 该增强作用随振子质量的增大而减弱, 随噪声相关率的增大先减弱后加强.

3.4 稳态响应振幅随质量涨落噪声相关率的变化

当振子质量 $m = 0.8, 1, 1.2$ 时, 根据 (18) 式得到的 $A-\lambda$ 曲线如图 4(a) 所示, 图中内插图为曲线 $m = 1$ 的局部图. 从图 4(a) 可以看出: 振幅 A 随着质量涨落噪声相关率 λ 的变化出现了随机共振和抑制两种现象. 当 $m = 0.8$ 时, 振幅 A 表现出传统的单峰随机共振; 随着振子质量的增大, 当 $m = 1$ 时, 振幅 A 的变化曲线先出现一个波谷, 后出现一个波峰, 也即出现了抑制和共振两种现象, 称其为单峰单谷随机共振; 随着振子质量的进一步增大, 当 $m = 1.2$ 时, 抑制和共振两种现象均消失.

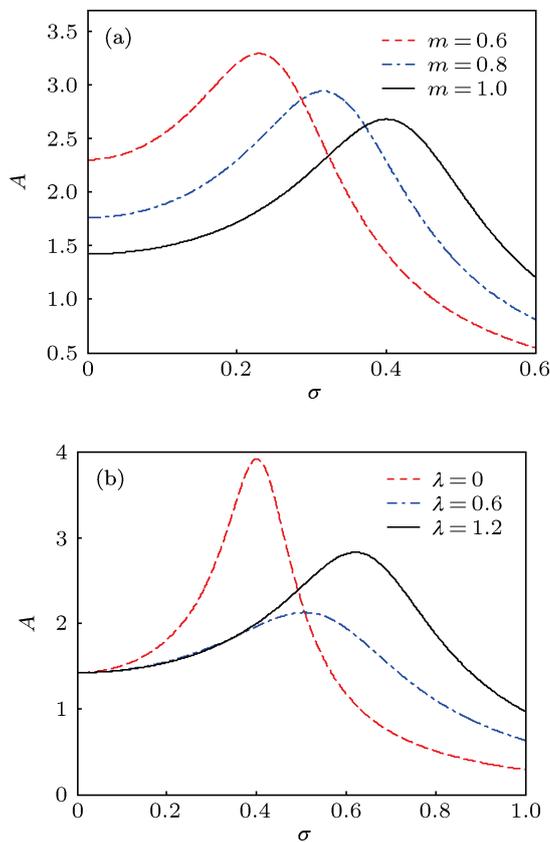


图3 振幅 A 随质量涨落噪声强度 σ 的变化, $\gamma = 0.1, \omega = 1, A_0 = 1, \Omega = 1.3$ (a) $\lambda = 0.1$; (b) $m = 1$

当质量涨落噪声强度 $\sigma = 0.7, 0.8, 0.9$ 时, 根据 (18) 式得到的 $A-\lambda$ 曲线如图 4(b) 所示, 图中内插图为曲线 $\sigma = 0.8$ 的局部图. 从图 4(b) 可以看出: 噪声强度对系统共振行为影响很大. 当 $\sigma = 0.9$ 时, 振幅 A 表现出传统的单峰随机共振; 随着噪声强度的减小, 当 $\sigma = 0.8$ 时, 振幅 A 表现出抑制和共振两种现象, 也即单峰单谷随机共振; 随着噪声强度

的进一步减小, 当 $\sigma = 0.7$ 时, 抑制和共振两种现象均消失.

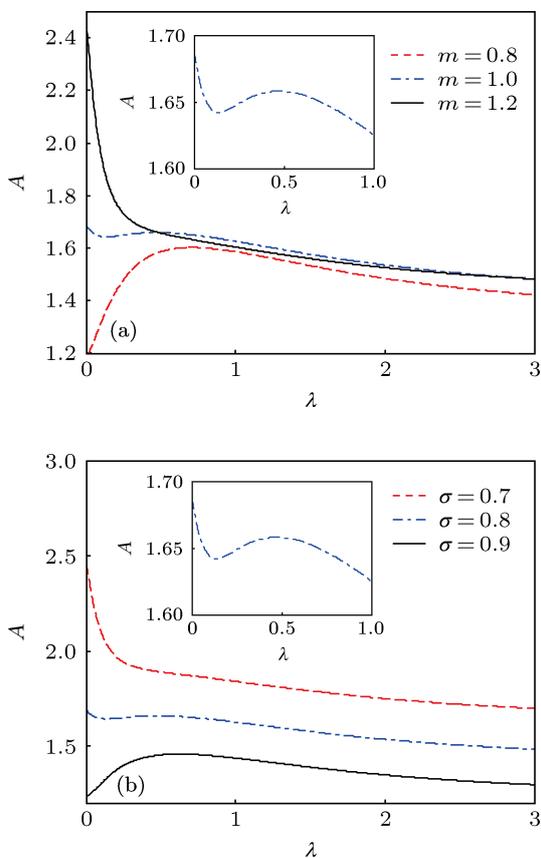


图4 振幅 A 随质量涨落噪声相关率 λ 的变化, $\gamma = 0.1$, $\omega = 0.97, A_0 = 1, \Omega = 0.8$ (a) $\sigma = 0.8$; (b) $m = 1$

上述结果表明: 系统稳态响应振幅关于质量涨落噪声相关率具有随机共振和抑制两种不同的现象, 具体共振形式与振子质量及噪声强度密切相关, 且这两个参数对共振现象的作用效果刚好相反.

4 仿真实验

为分析上述理论结果与真实情况的符合程度, 下面通过仿真实验模拟模型 (1) 所刻画振子运动, 并将相应仿真结果与理论结果进行对比. 本文后续仿真均采用四阶 Runge-Kutta 算法, 仿真时间为 3000 s, 采样间隔为 0.01 s.

在图 1 的参数条件下, 取 $\Omega = 1.6$, 得到系统输出信号时域和频域如图 5 所示.

由图 5(b) 可知, 系统输出在外部驱动频率 ($\Omega = 1.6$) 处出现了明显的尖峰, 其峰值代表系统对外部驱动信号的响应幅值. 然而, 噪声的存在使得系统输出具有随机性, 相应的响应幅值为随机

变量. 为此, 采用 Monte-Carlo 方法在相同参数条件下, 取 N 次仿真实验结果的平均值作为系统稳态响应振幅. 在图 5 的参数条件下, 以 (18) 式所确定的理论结果为参考值, 可得仿真误差与仿真次数 N 间的关系如图 6 所示.

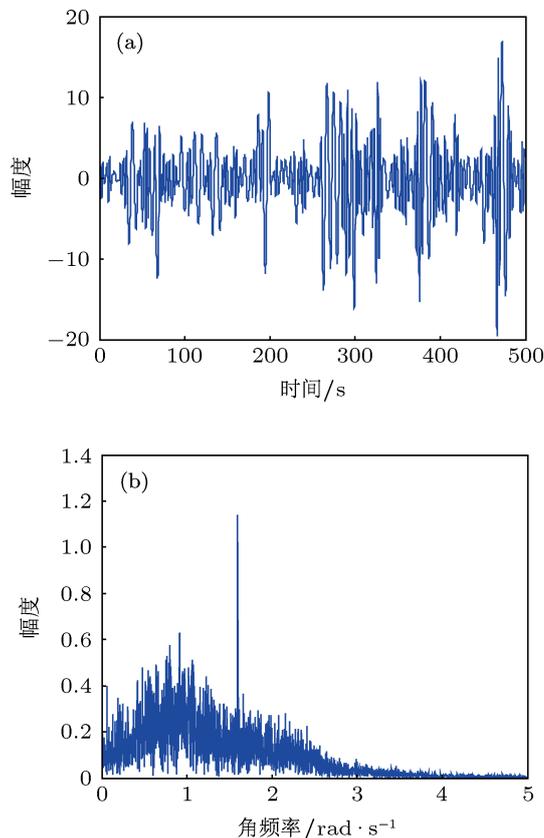


图5 系统输出信号 (a) 时域图; (b) 频域图

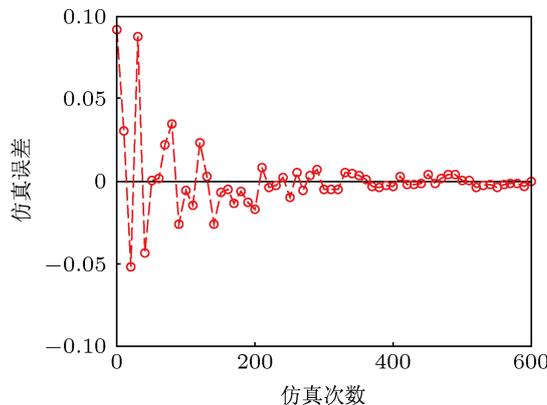


图6 仿真误差与仿真次数关系图

由图 6 可知: 随着仿真次数 N 的增大, 仿真误差将逐渐趋近于 0, 也即仿真结果将逐渐趋近于理论结果. 进一步, 取仿真次数 $N = 500$ 可仿真给出系

统稳态响应幅值在不同参数情况下关于外部驱动频率 Ω , 振子质量 m , 质量涨落噪声强度 σ 以及噪

声相关率 λ 的变化曲线, 这些曲线与理论结果的对比如图 7.

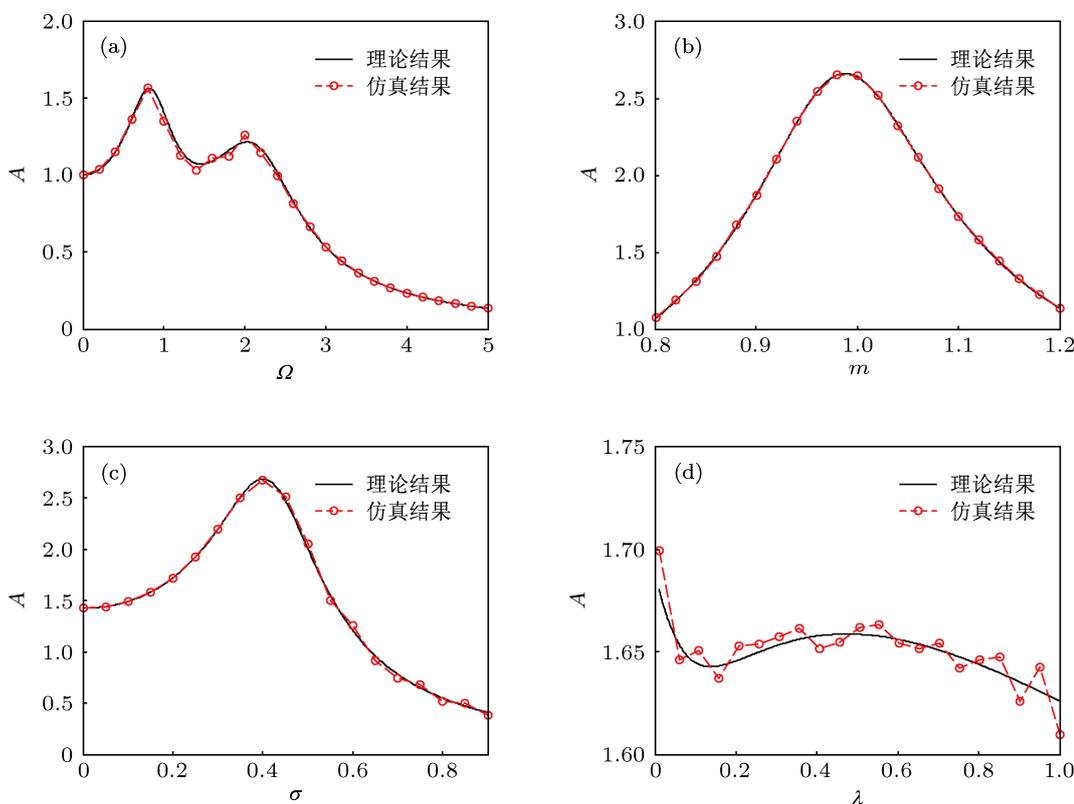


图 7 理论结果与仿真结果对比 (a) $\sigma = 0.8$, 其他参数同图 1(a); (b) $m = 1$, 其他参数同图 2(a); (c) $m = 1$, 其他参数同图 3(a); (d) $m = 1$, 其他参数同图 4(a)

图 7 表明: 1) 仿真结果与理论结果高度符合, 非常明显地体现了该理论结果对实际应用的预测作用和指导意义; 2) 在不同系统参数下, 仿真结果与理论结果的符合程度略有差别, 相对而言, 在图 7(a) 中, 当频率 Ω 处于两个共振峰之间时, 由于噪声在该频段较为集中 (见图 5(b)), 系统输出受噪声扰动较大, 故符合程度相对较差; 在图 7(c) 中, 噪声强度 σ 越大, 噪声对系统输出的影响就越大, 相应符合程度越差; 当系统参数处于上述区间时, 可适当增加仿真次数, 以减小仿真误差; 3) 在图 7(d) 中, 由于振幅 A 随参数 λ 的变化幅度较小, 在放大尺度的显示下, 同一量级上的仿真误差显得略为明显; 但实际上如果需要, 通过增加仿真次数, 便可进一步提高仿真结果与理论结果的符合程度.

5 结论

本文从理论和仿真两个方面深入研究了具有涨落质量的线性谐振子的共振行为, 且理论结果和仿真结果具有很好的一致性, 两方面结果均表明:

1) 虽然受到质量涨落噪声的影响, 但具有涨落质量的线性谐振子的稳态响应仍然是外部驱动频率下的简谐振动, 质量涨落噪声仅影响系统稳态响应的振幅和相位, 这与阻尼涨落噪声^[4,5]和固有频率涨落噪声^[6,7]下的研究结果一致;

2) 稳态响应振幅随外部驱动频率、振子质量、质量涨落噪声强度及噪声相关率的变化分别出现了真实共振、参数诱导共振、随机共振现象, 且质量涨落噪声的统计性质将直接影响共振峰位置及共振强度, 这一研究结果说明环境分子的吸附能力对系统共振行为影响很大;

3) 质量涨落噪声作用下, 系统展现出传统谐振子所不具有的单峰单谷共振、双峰共振等新的共振形式, 这在以往对具有涨落质量的谐振子的研究工作中尚未见报道;

4) 对线性谐振子而言, 以往的研究工作几乎都停留于理论阶段, 也在不同程度上尚欠深入, 更未见仿真研究的相关报道; 本文首次采用理论与仿真相结合的研究方式, 对线性谐振子的随机共振现象

进行了更为深入的研究, 相应研究结果对实际应用更具指导意义.

综上所述, 本文的研究工作为深入研究环境分子的吸附能力对系统共振行为的影响提供了理论

基础及仿真指导, 后续研究可针对具体介质环境, 细化对质量涨落噪声的建模, 使研究工作进一步深入.

-
- [1] Landau L D, Lifshitz E M (Translated by Li J F) 2007 *Mechanics* (5th Ed.) (Beijing: Higher Education Press) pp75–102 (in Chinese) [朗道 L. D., 栗弗席兹 E. M. 著, 李俊峰译 2007 力学 (第五版)(北京: 高等教育出版社) 第 75—102 页]
- [2] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Press) pp5, 32 (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第 5, 32 页]
- [3] Bao J D 2009 *Random Simulation Method of Classical and Quantum Dissipation System* (Beijing: Science Press) pp79–80 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 79–80 页]
- [4] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101
- [5] Méndez V, Horsthemke W, Mestres G, Campos D 2011 *Phys. Rev. E* **84** 041137
- [6] Guo L M, Xu W, Ruan C L, Zhao Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7482 (in Chinese) [郭立敏, 徐伟, 阮春雷, 赵燕 2008 物理学报 **57** 7482]
- [7] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
- [8] Blum J, Wurm G, Kempf S, Poppe T 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2426
- [9] Pérez A T, Saville D, Soria C 2001 *Europhys. Lett.* **55** 425
- [10] Goldhirsch I, Zanetti G 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1619
- [11] Gitterman M, Klyatskin V I 2010 *Phys. Rev. E* **81** 051139
- [12] Gitterman M 2012 *Physica A* **391** 3033
- [13] Gitterman M 2012 *Physica A* **391** 5343
- [14] Portman J, Khasin M, Shaw S W, Dykman M I 2010 *APS March Meeting* Portland, USA, March 15–19, 2010 Abstract V14.010
- [15] Luczka J, Hanggi P, Gadowski A 1995 *Phys. Rev. E* **51** 5762
- [16] Rubi J M, Gadowski A 2003 *Physica A* **326** 333
- [17] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L453
- [18] Gitterman M, Shapiro I 2011 *J. Stat. Phys.* **144** 139
- [19] Shapiro V E, Loginov V M 1978 *Physica A* **91** 563
- [20] Li P, Nie L R, Huang Q R, Sun X X 2011 *Chin. Phys. B* **21** 050503

The resonant behavior of a linear harmonic oscillator with fluctuating mass^{*}

Yu Tao Zhang Lu Luo Mao-Kang[†]

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

(Received 12 January 2013; revised manuscript received 12 January 2013)

Abstract

The mass of Brownian particle is fluctuant in a viscous medium, because the molecules of surrounding medium may randomly stick on it. This mass fluctuation influence on the system resonant behavior is studied by modeling it as a symmetric dichotomous noise. Using Shapiro-Loginov formula and Laplace transformation, the analytical expression of system steady response amplitude is presented. The corresponding numerical results are used to discuss system resonant behavior. Furthermore, the reliability of theoretical results is tested by simulation experiments. All the research results show that: 1) the system steady response is a simple harmonic vibration which has the same frequency as the driving signal; 2) with the variations of driving frequency, oscillator mass and noise parameters, the system presents real resonance, parameter induced resonance and stochastic resonance phenomenon, respectively; 3) because of the mass fluctuation, some new resonant forms are observed, such as one-peak and one-valley resonance, two-peak resonance, etc.

Keywords: mass fluctuation noise, stochastic resonance, two-peak resonance

PACS: 05.40.-a, 05.40.Ca, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.62.120504

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238) and the Science Fund for Creative Research Groups of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11221101).

[†] Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn