

两个周期激励下 Duffing-van der Pol 系统的混沌瞬态和广义激变*

韩群[†] 徐伟 刘涛 刘莉

(西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

(2013年1月14日收到; 2013年2月27日收到修改稿)

运用广义胞映射图方法研究两个周期激励作用下 Duffing-van der Pol 系统的全局特性. 发现了系统的混沌瞬态以及两种不同形式的瞬态边界激变, 揭示了吸引域和边界不连续变化的原因. 瞬态边界激变是由吸引域内部或边界上的混沌鞍和分形边界上周期鞍的稳定流形碰撞产生. 第一种瞬态边界激变导致吸引域突然变小, 吸引域边界突然变大; 第二种瞬态边界激变使两个不同的吸引域边界合并成一体. 此外, 在瞬态合并激变中两个混沌鞍发生合并, 最后系统的混沌瞬态在内部激变中消失. 这些广义激变现象对混沌瞬态的研究具有重要意义.

关键词: 广义胞映射图方法, Duffing-van der Pol, 混沌瞬态, 广义激变

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.120506

1 引言

Duffing-van der Pol (DVP) 振子在物理、工程、电子及金融等众多领域有着广泛的应用. 已有研究表明, 在外部激励作用下, DVP 振子会产生复杂的动力学现象^[1,2]. 而针对多频激励作用下 DVP 振子的研究较少, Kakmeni 等^[3]研究了两个周期激励作用下 DVP 振子的奇怪吸引子和混沌控制; Yagasaki^[4]研究了双频拟周期激励下单势阱 DVP 振子的同宿运动和混沌.

对于非线性系统, 通过全局分析能够得到比局部分析更多的信息, 而胞映射就是一个准确有效并且应用广泛的全局分析方法. Hsu^[5,6]先后提出了两种胞映射方法: 简单胞映射和广义胞映射. Hong 和 Xu^[7]在 1999 年提出了广义胞映射图 (generalized cell mapping digraph, GCMD) 方法. 贺群等^[8]提出了基于自循环胞集的瞬态胞的新分类方法, 用以逼近动力系统的不变流形. 此外, 还有一些学者发展了胞映射相关方法^[9-11]. 本文采用文献 [7, 8] 中

的 GCMD 方法, 其基本思想是先把状态空间离散成胞化空间, 每一个胞被看成是一些状态的集合, 利用庞加莱映射建立从胞到胞的映射从而得到与原系统对应的胞映射动力系统. 然后引入图论和偏序集^[12]的概念, 将每一个胞看作是有向图中的顶点, 胞与胞之间的转移关系则转化为图中的有向边. 最后运用图分析方法可以得到系统的吸引子、吸引域、吸引域边界、鞍以及不变流形的逼近. 随着对运算精度的要求不断提高, GCMD 方法消耗的运算时间以及占用的计算机内存不容忽视. 选用边界-内部非均匀采样法^[13]和图的链式存储法则有利于提高该方法的效率.

混沌瞬态在工程试验和数值模拟中普遍存在, 虽然其生存时间 (lifetime) 相对有限, 但它却是比混沌吸引子更丰富的动力学行为. 如果只有常规稳态响应, 由于混沌瞬态的存在, 系统的演化在一段有限时间内表现出混沌的特征, 但是最终到达常规运动状态^[14]. 激变是非线性耗散系统中常见的一种全局分岔现象, 当系统参数在变化过程中经过某一临界值时, 吸引子与周期鞍或混沌鞍发生碰撞导致

* 国家自然科学基金 (批准号: 11172233, 10932009) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: hanqun.11@mail.nwpu.edu.cn

吸引子突然发生不连续的变化. 根据这种不连续变化的性质可分为三种不同的激变: 边界激变、内部激变和吸引子合并激变^[15]. 近年来, 胞映射技术在非线性系统全局分析中得到了广泛应用, Hong 和 Xu^[7] 用 GCMD 方法研究了受迫 Duffing 振子的激变和混沌瞬态, 为混沌瞬态和激变现象的研究提供了新的思路^[16-18].

Stewart 等^[19] 在 1995 年提出了混沌基本集和广义激变的概念, 混沌基本集不仅包括混沌吸引子还包括混沌瞬态, 即分形边界上的混沌鞍以及吸引域内部的混沌鞍; 广义激变则是将激变中的混沌吸引子推广成了混沌基本集. 本文旨在研究一类多频周期激励下的 DVP 系统的混沌瞬态和广义激变, 混沌鞍诱发丰富的动力学现象, 在广义激变中系统的瞬态发生不连续的变化, 而稳态吸引子却不会发生非连续变化. 首先简单说明系统的混沌状态和多吸引子共存现象, 阐述了混沌行为由稳态到瞬态的转化机理, 然后揭示了由混沌瞬态引发的广义激变过程, 并着重讨论了混沌瞬态在激变中的作用.

2 DVP 系统的多吸引子共存和混沌瞬态

考虑如下具有两个外部周期激励的 DVP 系统:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - u(1-x^2)\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 \\ = f \cos(\omega_1 t) + g \cos(\omega_2 t), \end{aligned} \quad (1)$$

式中 x 表示状态变量, \cdot 表示变量关于时间 t 的导数, 而 $u, \alpha, \beta, f, \omega_1, \omega_2$ 和 g 均为系统的实参数. 令 $y = \dot{x}$, 则系统 (1) 可转化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u(1-x^2)y - \alpha x - \beta x^3 \\ \quad + f \cos(\omega_1 t) + g \cos(\omega_2 t). \end{cases} \quad (2)$$

文献 [3] 在系统参数取值分别为: $u = 0.2, \alpha = 1.0, \beta = 0.8, f = 0.48, \omega_1 = 1.0, \omega_2 = 3.0$ 的情形下, 考虑高频激励强度 g 的变化对系统稳态响应的影响, 通过对分岔图的研究发现参数 g 在 0—4 之间变化时系统通过环面破缺并产生吸引性的同宿结构^[20] 到达混沌状态.

分岔图只能刻画系统的局部稳态性质, 从分岔图上分析系统的混沌状态往往会忽略多吸引子共存的情形. 另一方面, 虽然可以从分岔图上观测到

在参数变化过程中系统可能出现激变现象, 但是对于激变发生的原因却不得而知. 近年来人们越来越关心系统的瞬态行为, 特别是对混沌瞬态做了大量的研究. 全局分析可以得到系统的鞍, 已有研究表明周期鞍或混沌鞍在系统的激变过程中扮演着重要的角色.

GCMD 方法在研究非线性系统多吸引子共存现象和不稳定解特别是混沌瞬态方面具有很大的优势. 在文献 [3] 的基础上采用 GCMD 方法对上述 DVP 系统进行研究. 运用 Wolf 算法^[21] 计算系统 (2) 的最大李雅普诺夫指数 (top Lyapunov exponent, TLE) 随着参数 g 的变化情况, 结果如图 1 所示.

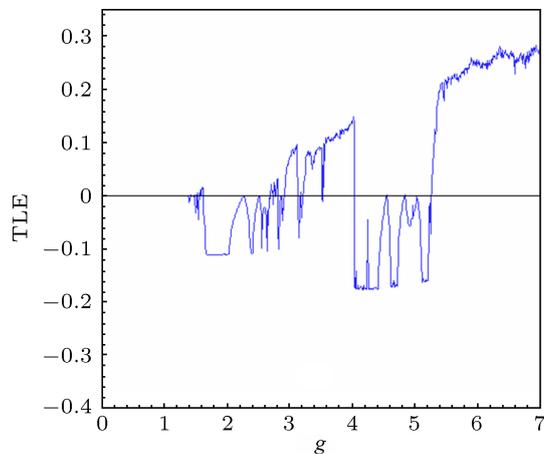


图 1 系统 (2) 的 TLE 图 选取的初值为 $x(0) = 0.01, y(0) = 0.01$

首先选定感兴趣区域 $\Omega = \{-4.0 \leq x \leq 3.0, -5.0 \leq y \leq 5.0\}$, 并将该区域均匀划分为 1000×1000 个常规胞, 区域以外全部视为陷胞. 运用边界-内部采样法, 在每一个常规胞的边界上均匀选取 96 个采样点, 内部均匀选取 25 个采样点, 以每个采样点为起点运用定步长四阶 Runge-Kutta 算法求解系统 (2) 在一个周期内的积分轨线, 在庞加莱截面上建立胞映射动力系统并进行全局分析.

2.1 多吸引子共存

当 g 在 3.60—3.75 之间时, 系统 (2) 有一个混沌吸引子 CA 和一个周期鞍 S1, 混沌吸引子的吸引域被记为 BA. 在该过程中混沌吸引子所包围的区域内先后出现两个鞍, 分别标记为 S2 和 S3, 它们均由两部分组成, 如图 2(a) 所示. 在以下过程中, 鞍 S1, S2 和 S3 所在的位置都随着包围它们的混沌基本集一起变化.

在 g 从 3.75 变化到 3.98 的过程中混沌吸引子的外侧周围先后发生四次鞍结分岔, 每一次鞍结分岔后混沌吸引子 CA 的外侧都会出现一个结点型的吸引子和一个周期鞍, 并且鞍点所在的吸引域边界具有分形结构. 如图 2(b) 所示, 当 $g = 3.98$ 时系统有 5 个吸引子共存, 4 个周期吸引子分别记为 A1, A2, A3 和 A4, 中间的一个混沌吸引子 CA 被重新记为 A5, 空白处表示各个吸引子的吸引域. 另外将位于 4 个吸引域边界上的周期鞍分别记为 S(1, 5), S(2, 5), S(3, 5), 和 S(4, 5), 此时在庞加莱截面上混沌吸引子 A5 与吸引域边界上的周期鞍 S(1, 5) 和 S(2, 5) 非常靠近, 但实际上并未接触.

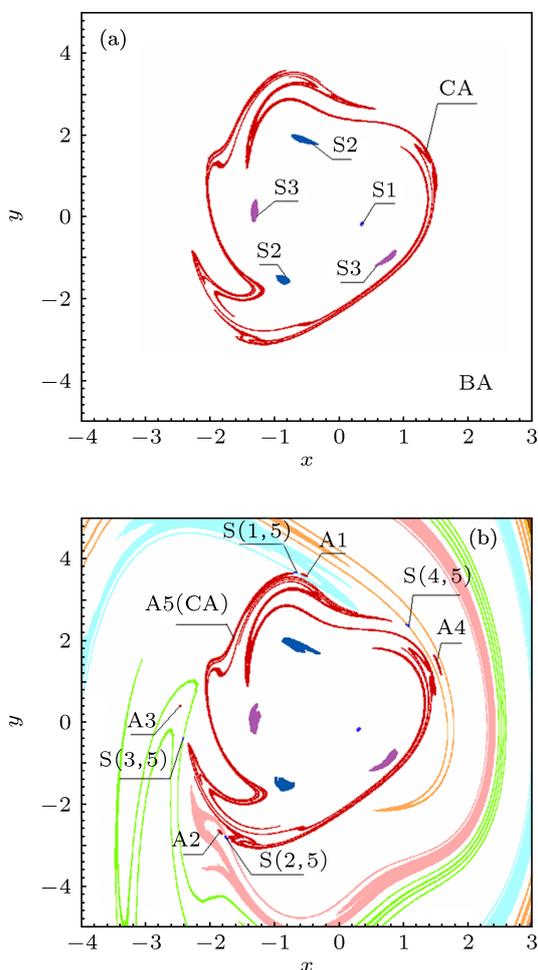


图 2 系统 (2) 在庞加莱截面上的吸引子和鞍 (a) $g = 3.75$; (b) $g = 3.98$

2.2 常规边界激变和混沌瞬态

随着 g 的增大, 混沌吸引子 A5 与边界 B(1, 5) 上的周期鞍 S(1, 5) 之间的距离逐渐变小. 当 g 经过 3.993 到 3.994 之间的临界值时, 系统 (2) 发生一次常规边界激变, 激变过程中混沌吸引子 A5 与吸引

域边界 B(1, 5) 相切, 并与鞍 S(1, 5) 发生碰撞, 如图 3(a) 所示. 而从图 3(b) 中可以看出, 激变的发生导致混沌吸引子 A5 及其吸引域 B5 立即消失, 吸引子 A1 的吸引域 B1 瞬间变大, 周期鞍 S(1, 5) 突然变成 B1 内部的一个混沌鞍, 记为 S4. 对应各分形边界也会发生变化, 例如分形边界 B(3, 5) 突然变化成吸引域 B1 和 B3 的分形边界 B(1, 3).

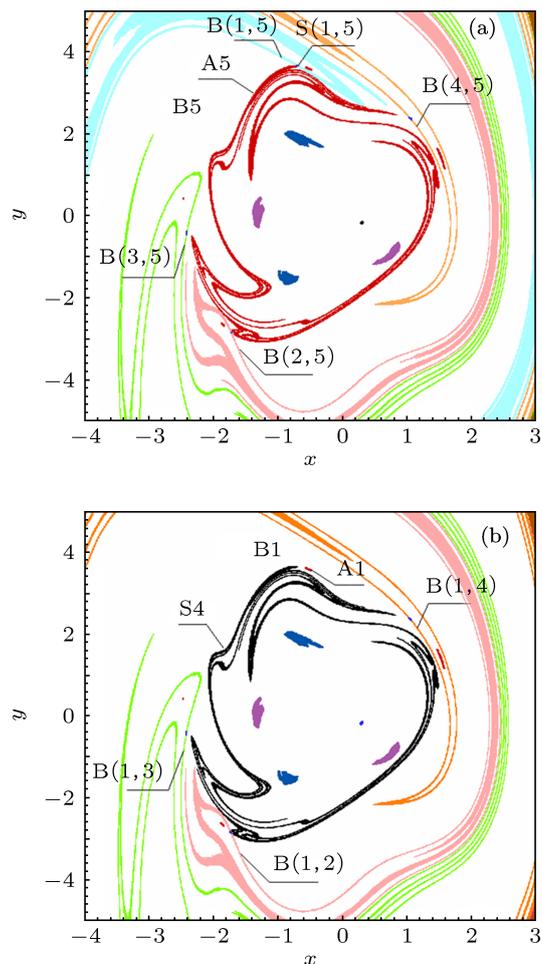


图 3 常规边界激变 (a) $g = 3.993$; (b) $g = 3.994$

常规边界激变导致系统的混沌吸引子消失, 并且从图 1 中可以看到 g 的取值在 4.02 附近时, 系统的 TLE 值由正变为负, 这说明在此次常规边界激变后系统的稳态响应由混沌变为周期. 混沌鞍的出现则说明激变后系统在到达稳态之前将经历混沌瞬态. TLE 符号改变的临界值稍微大于常规边界激变的临界值的原因就是由于存在混沌瞬态, 系统轨线的演化在有限时间内表现出混沌性质, 这导致数值方法计算得到的 TLE 值会稍微偏大.

3 DVP 系统的广义激变

在非线性系统的一般激变中,通常都会有吸引子参与到激变当中,或者说激变过后吸引子都会发生变化,吸引子可以是混沌的也可以是非混沌的.通过对混沌瞬态的研究发现,混沌鞍可以引发一些广义激变,在这类激变中没有吸引子参与,激变前后吸引子的形状和个数也不会发生非连续的变化.

3.1 瞬态边界激变

常规边界激变之后,系统 (2) 的混沌吸引子消失,一个新的混沌瞬态出现,这里混沌瞬态对应吸引域内部的混沌鞍 S_4 ,除此之外系统无其他混沌基本集.利用 GCMD 方法分析,发现混沌鞍同样会引发丰富的广义激变行为.当分岔参数 g 在一定范围内变化时,混沌鞍与吸引域边界上周期鞍的稳定流形发生碰撞导致激变产生,我们称这种广义激变为瞬态边界激变.

当 g 变大时,庞加莱截面上的混沌鞍逐渐向周期鞍点靠近,分形边界 $B(1, 3)$ 演化成吸引子 A_1, A_2 和 A_3 的吸引域边界 $B(1, 2, 3)$. 在 g 由 4.004 变化到 4.005 的过程中,系统发生第一种瞬态边界激变,如图 4(a) 和 (c) 所示,激变中吸引域 B_1 内部的混沌鞍 S_4 与吸引域分形边界 $B(1, 2)$ 上的周期鞍 $S(1, 2)$ 发生碰撞,并与其稳定流形 $SM(1, 2)$ 相切,过后吸引子 A_1 的吸引域 B_1 瞬间变小,而吸引子 A_1 和 A_2 的吸引域边界 $B(1, 2)$ 突然变大,周期鞍 $S(1, 2)$ 与混沌鞍 S_4 合并后成为边界 $B(1, 2)$ 上的一个新的混沌鞍 $S(1, 2)$,如图 4(b) 所示.

如图 5(a) 所示,当 g 进一步增大到 4.093 时,吸引域边界 $B(1, 2)$ 上的混沌鞍 $S(1, 2)$ 与吸引域分形边界 $B(1, 2, 4)$ 上的周期鞍 $S(1, 2, 4)$ 碰撞,并与其稳定流形 $SM(1, 2, 4)$ 相切,过后吸引域边界 $B(1, 2)$ 被 $B(1, 2, 4)$ 合并成一体,周期鞍 $S(1, 2, 4)$ 与混沌鞍 $S(1, 2)$ 合并在一起成为吸引域边界 $B(1, 2, 4)$ 上的混沌鞍 $S(1, 2, 4)$,如图 5(b) 所示.到此系统又发生了一次不同的瞬态边界激变,激变由吸引域边界上的混沌鞍与另一个分形边界上周期鞍的稳定流形相切产生,我们称之为第二种瞬态边界激变.该激变中混沌鞍和常规鞍合并引发吸引域边界合并.

随后当 g 增大到 4.121 时,系统将再次发生第二种瞬态边界激变,混沌鞍 $S(1, 2, 4)$ 与吸引域边

界 $B(1, 2, 3, 4)$ 上的周期鞍 $S(1, 2, 3, 4)$ 的稳定流形 $SM(1, 2, 3, 4)$ 相切导致激变发生,激变过后吸引域边界 $B(1, 2, 3, 4)$ 和 $B(1, 2, 4)$ 合并成 4 个吸引域的新边界 $B(1, 2, 3, 4)$,混沌鞍 $S(1, 2, 4)$ 和周期鞍 $S(1, 2, 3, 4)$ 合并成边界 $B(1, 2, 3, 4)$ 上的一个新的混沌鞍 $S(1, 2, 3, 4)$,如图 5(c) 和 (d) 所示.

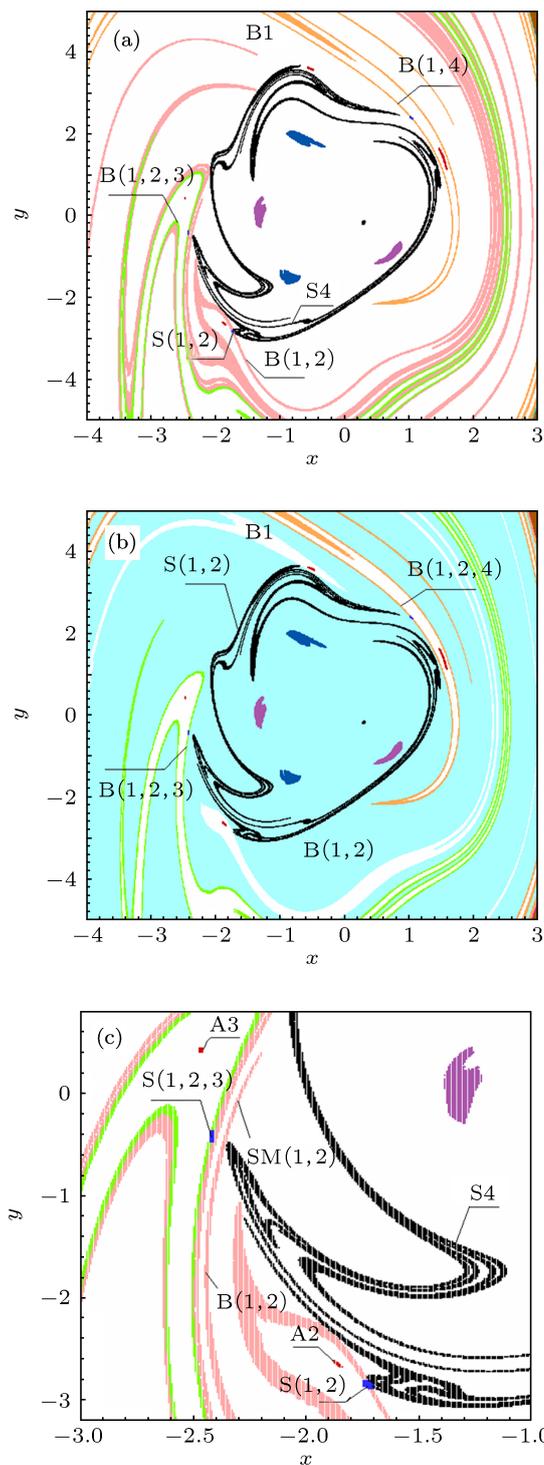


图 4 第一种瞬态边界激变 (a) $g = 4.004$; (b) $g = 4.005$; (c) 对 (a) 局部放大

至此系统发生了三次瞬态边界激变,第一次是由于吸引域内部的混沌鞍与吸引域分形边界上周期鞍的稳定流形碰撞产生,激变导致相关吸引域大范围减小,吸引域边界面积增加.后两次瞬态边界激变是由于域边界上的混沌鞍与另一个分形域边界上的周期鞍或其稳定流形发生碰撞相切,这种情

况下的激变,会引发吸引域边界的合并.由此可以发现,混沌瞬态导致的瞬态边界激变虽然没有影响系统的常规稳态行为,但在激变中部分吸引域或吸引域边界的形状和大小会瞬间发生很大的变化.由于对吸引域及其边界的研究具有重要的实际意义,所以对这类瞬态边界激变的研究非常有必要.

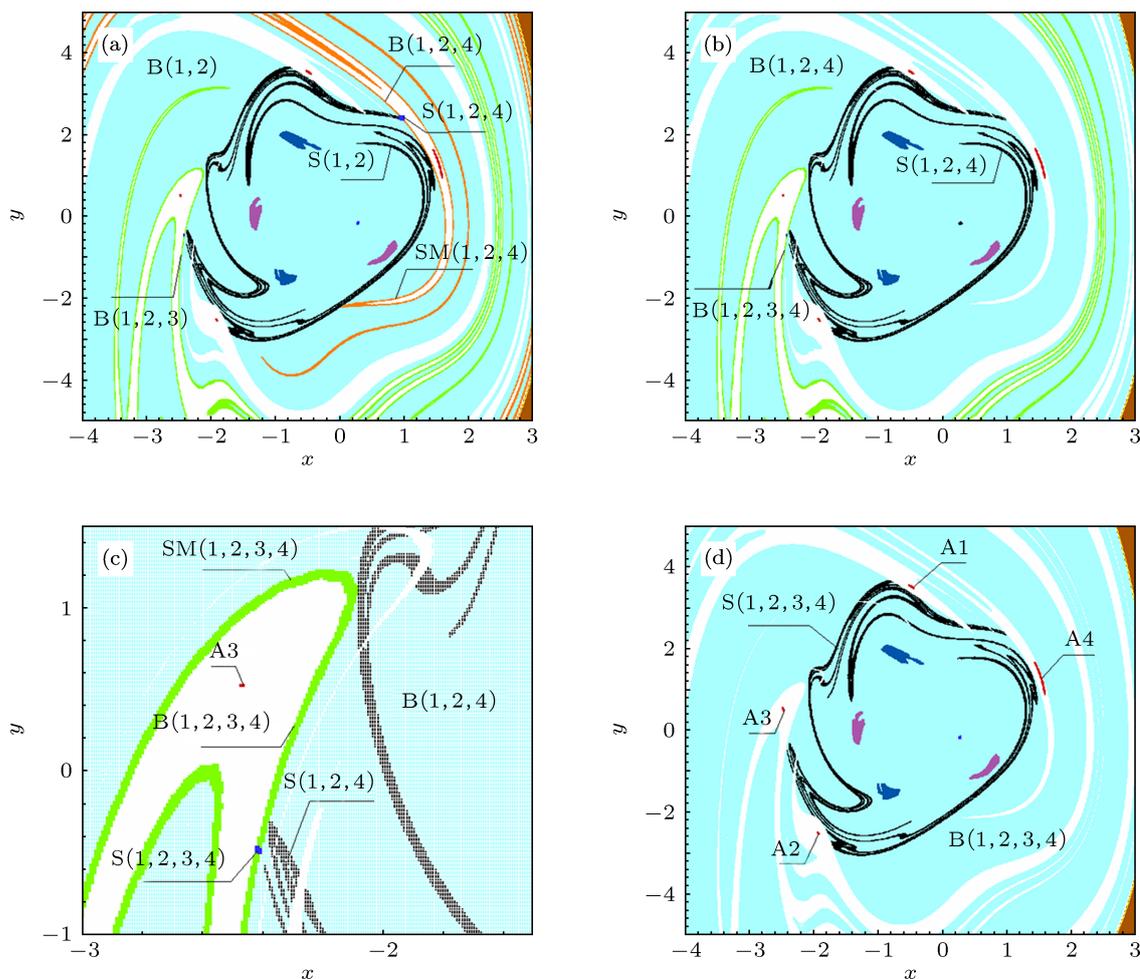


图5 第二种瞬态边界激变 (a) $g = 4.093$; (b) $g = 4.094$; (c) $g = 4.121$; (d) $g = 4.122$

在 g 从 4.122 增大到 4.558 的过程中,陷胞的吸引域 B_0 逐渐变大,系统先后发生两次混沌边界激变,分别导致吸引子 A_4 和 A_3 以及它们的吸引域消失.相空间中只剩下吸引子 A_1 和 A_2 ,在它们的吸引域边界 $B(1,2)$ 上有一个周期鞍 S_1 ,还有三个混沌鞍,分别是 $S(1,2)$, S_2 和 S_3 ,如图 6(a) 所示,混沌鞍均表示系统的混沌瞬态.

3.2 瞬态合并激变

混沌鞍所表征的混沌瞬态之间还会发生合并

激变,这种激变类似于吸引子合并激变,因此称之为瞬态合并激变.

如图 6(a) 所示,在吸引域边界上的混沌鞍 S_2 和 S_3 各由两支组成.随着参数 g 的变化,混沌鞍 S_2 和 S_3 稍微变形并逐渐向混沌鞍 $S(1,2)$ 移动,在 g 经过 4.558 到 4.559 之间的临界值时,同一域边界上的混沌鞍 S_3 与混沌鞍 $S(1,2)$ 碰撞接触,过后 S_3 瞬间被合并成混沌鞍 $S(1,2)$ 的一部分,如图 6(b) 所示.这类瞬态合并激变导致两个独立的混沌瞬态合并成一个新的混沌瞬态,对混沌瞬态的研究具有重要的意义.

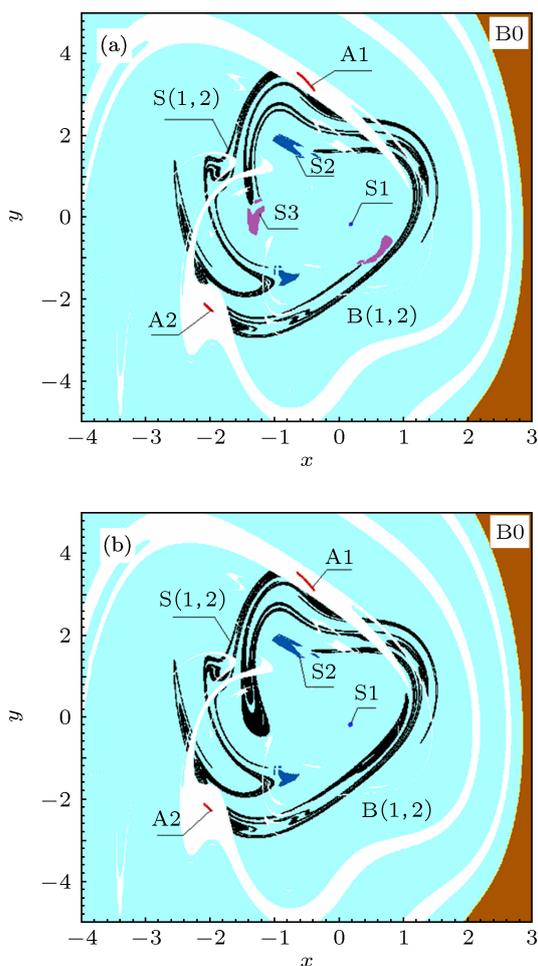


图6 瞬态合并激变 (a) $g = 4.558$; (b) $g = 4.559$

在 g 从 4.621 变化到 4.622 过程中混沌鞍 S_2 与混沌鞍 $S(1, 2)$ 发生碰撞, 过后 S_2 同样也被合并成 $S(1, 2)$ 的一部分.

3.3 混沌瞬态消失

在 g 继续增大过程中, 吸引子 A_1 变大逐渐伸向吸引域边界 $B(1, 2)$, 当 g 的值取到 5.193 时, 系统将再一次发生混沌边界激变. 吸引子 A_1 与边界 $B(1, 2)$ 上的混沌鞍 $S(1, 2)$ 发生碰撞, 激变导致吸引子 A_1 及其吸引域 B_1 消失, A_2 的吸引域 B_2 变大, 其内部留下一个混沌鞍, 记为 S .

随着 g 的增大, 吸引域 B_2 内部的混沌鞍 S 逐渐变丰满并向吸引子 A_2 靠近, 在 g 从 5.226 变化到 5.227 过程中, 系统发生一次内部激变. 激变中吸引子 A_2 与混沌鞍 S 发生碰撞, 过后混沌鞍消失, 吸引子 A_2 合并混沌鞍所在的区域形成一个新的混沌吸引子, 记为 A , 其吸引域记为 B , 如图 7(a) 和 (b) 所

示. 经过一次内部激变后, 混沌瞬态消失, 混沌吸引子重新出现, 标志着系统的混沌行为由不稳定变为稳定.

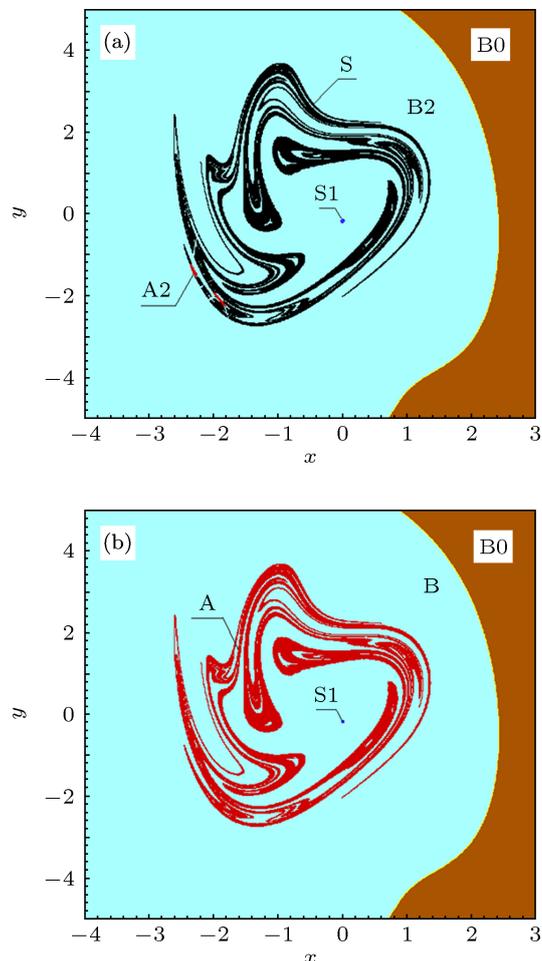


图7 内部激变 (a) $g = 5.226$; (b) $g = 5.227$

4 结论

本文采用 GCMD 方法对一个具有两个外部周期激励的 DVP 系统进行全局分析, 讨论了高频激励强度的增加对系统的影响. 研究表明, 系统在到达混沌状态之后出现多吸引子共存现象. 在一次常规边界激变后, 系统的响应由混沌运动转变为常规运动, 并且出现混沌鞍, 这表明系统的稳态混沌消失, 混沌瞬态出现.

系统的混沌瞬态会引发多次广义激变现象, 其中包括两种不同形式的瞬态边界激变和瞬态合并激变. 在瞬态边界激变中吸引域内部或吸引域边界上的混沌鞍与分形边界上周期鞍的稳定流形发生碰撞, 如果混沌鞍在吸引域内部, 激变导致吸引域突然变小, 吸引域边界突然变大; 如果混沌鞍在吸

引域边界上, 激变中两个吸引域边界合并为一体. 这些瞬态边界激变虽然不影响系统的稳态响应, 但会引起部分吸引域或吸引域边界的不连续变化. 此外, 混沌瞬态也会发生类似吸引子合并的激变, 即

瞬态合并激变, 激变中同一吸引域边界上的两个混沌鞍相互碰撞接触合并成一个新的混沌鞍. 最后, 混沌瞬态在一次内部激变中消失, 系统重新到达稳态混沌状态.

-
- [1] Venkatesan A, Lakshmanan M 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6321
- [2] Xu W, He Q, Rong H W, Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese) [徐伟, 贺群, 戎海武, 方同 2003 物理学报 **52** 1365]
- [3] Kakmeni F M, Bowong S, Tchawoua C, Kaptouom E 2004 *J. Sound Vib.* **227** 783
- [4] Yagasaki K 1994 *Proceedings of the Royal Society of London A* **445** 597
- [5] Hsu C S 1980 *J. Appl. Mech.* **47** 931
- [6] Hsu C S 1981 *J. Appl. Mech.* **48** 634
- [7] Hong L, Xu J X 1999 *Phys. Lett. A* **262** 361
- [8] He Q, Xu W, Li S, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 743 (in Chinese) [贺群, 徐伟, 李爽, 肖玉柱 2008 物理学报 **57** 743]
- [9] Jiang J, Xu J X 1994 *Phys. Lett. A* **188** 137
- [10] He Q, Xu W, Li S, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4021 (in Chinese) [贺群, 徐伟, 李爽, 肖玉柱 2008 物理学报 **57** 4021]
- [11] Yue X L, Xu W, Zhang Y 2011 *Nonlinear Dyn.* **69** 437
- [12] Hsu C S 1995 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **5** 1085
- [13] Zou H L, Xu J X 2009 *Sci. China E* **52** 787
- [14] Wang W X, Lu Y Q, Chen H S, Ma M Q, Zhu Y Z, He D R 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 901
- [15] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1983 *Physica D* **7** 181
- [16] Hong L, Xu J X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1228 (in Chinese) [洪灵, 徐健学 2000 物理学报 **49** 1228]
- [17] Hong L, Xu J X 2001 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **11** 723
- [18] Xu W, He Q, Fang T, Rong H W 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 141
- [19] Stewart H B, Ueda Y, Grebogi C, Yorke J A 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 2478
- [20] Kozlov A K, Sushchik M M, Molkov Y I, Kuznetsov A S 1999 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **9** 2271
- [21] Wolf A, Swift B, Swinney H L, Vastano A 1985 *Physica D* **16** 285

Chaotic transients and generalized crises of a Duffing-van der Pol oscillator with two external periodic excitations*

Han Qun[†] Xu Wei Liu Tao Liu Li

(*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China*)

(Received 14 January 2013; revised manuscript received 27 February 2013)

Abstract

Global property of a Duffing-van der Pol oscillator with two external periodic excitations is investigated by generalized cell mapping digraph method. As the bifurcation parameter varies, a chaotic transient appears in a regular boundary crisis. Two kinds of transient boundary crises are discovered to reveal some reasons for the discontinuous changes for domains of attraction and boundaries. A chaotic saddle collides with the stable manifold of a periodic saddle at the fractal boundary of domains when the crisis occurs, if the chaotic saddle lies in the basin of attraction, the basin of attraction decreases suddenly while the boundary increases after the crisis; if the chaotic saddle is at a boundary, the two boundaries merge into one because of the crisis. In addition, two chaotic saddles can be merged into a new one, when they touch each other in a transient merging crisis. Finally the chaotic transient disappears in an interior crisis. The characteristics of these generalized crises are quite important for the study of chaotic transients.

Keywords: generalized cell mapping digraph method, Duffing-van der Pol, chaotic transients, generalized crises

PACS: 05.45.—a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.120506

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11172233, 10932009).

[†] Corresponding author. E-mail: hanqun_11@mail.nwpu.edu.cn