

# 周期脉冲作用下 Logistic 映射的复杂动力学行为及其分岔分析\*

姜海波<sup>†</sup> 李涛 曾小亮 张丽萍

(盐城师范学院数学科学学院, 盐城 224002)

(2013年1月18日收到; 2013年2月12日收到修改稿)

研究了两种周期脉冲作用下 Logistic 映射的复杂动力学行为. 随着参数的变化, 该系统产生平衡解、周期解、混沌等现象, 且该系统可经级联倍周期分岔到达混沌. 通过构造 Poincaré 映射, 对周期脉冲作用下 Logistic 映射进行了分岔分析. 最后基于 Floquet 理论揭示了该系统周期解的分岔机理.

**关键词:** Logistic 映射, 脉冲, 周期解, 分岔机理

**PACS:** 05.45.Ac, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.120508

## 1 引言

Logistic 映射从数学形式上来看是一个非常简单的二次映射, 然而此系统具有极其复杂的动力学行为. 早在 20 世纪 50 年代, 生态学家们就开始利用这个简单的差分方程来描述种群的变化. 当前 Logistic 映射的研究已取得许多成果, 并已应用于人口预测、生态环境、保密通信等领域 [1-4].

脉冲控制具有控制量小、实现方便等优点, 因此被广泛应用于大型航天器的减震装置、卫星轨道的转换、混沌系统及复杂网络的控制与同步等 [5-10]. 另一方面, 脉冲作用下线性/非线性系统的动力学行为比一般 (无脉冲作用的) 系统丰富得多, 所以脉冲作用下线性/非线性系统的动力学行为及其分岔受到了学者们的广泛关注 [11-18]. 文献 [11, 12] 提出了非光滑系统的局部映射法, 并给出了 Floquet 乘子的计算方法; 文献 [13] 研究了周期脉冲激励下的一类倒立摆的周期解及其分岔问题; 文献 [14, 15] 研究了一类线性脉冲系统的周期解及

其分岔问题; 文献 [16] 研究了一类三种群食物链系统在周期脉冲作用下的丰富动力学行为; 文献 [17] 对一类受脉冲影响的生物系统进行了分岔分析; 文献 [18] 研究了脉冲作用下 Chen 系统的动力学行为, 并基于 Floquet 理论揭示其分岔机理. 然而当前对脉冲作用下离散映射的动力学行为, 尤其是分岔机理研究得较少 [19-21]. 文献 [19] 研究了一类具有出生脉冲的单种群离散生物系统的复杂动力学行为; 文献 [20] 基于脉冲控制通过数值仿真研究了 Logistic 映射的分岔控制问题; 文献 [21] 基于脉冲控制研究了互联网传输协议的分岔控制问题.

本文以典型的 Logistic 映射为例, 研究了周期脉冲作用下离散映射的复杂动力学行为及其分岔机理. 首先分别研究了两种周期脉冲作用下离散映射的复杂动力学行为, 即常量与比例两种形式; 然后通过构造 Poincaré 映射, 对周期脉冲作用下 Logistic 映射进行了分岔分析; 最后基于 Floquet 理论揭示了该系统周期解的分岔机理.

Logistic 映射的方程为

$$x(k+1) = rx(k)(1-x(k)), \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11202180, 61273106, 11171290)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK2010292, BK2010293)、江苏省高校自然科学基金 (批准号: 10KJB510026)、国家级大学生创新创业训练计划 (批准号: 201210324009) 和江苏省大学生实践创新训练计划 (批准号: 2012JSSPITP2378) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: yctcjhbb@gmail.com

其中  $x(k) \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$  为系统状态,  $\mathbb{N}$  为自然数集,  $r$  为系统参数.

设 Logistic 映射受到周期  $\tau$  的脉冲作用, 即

$$\begin{cases} x(k+1) = rx(k)(1-x(k)) & k \neq m\tau, \\ \Delta x(k+1) = x(k+1) - x(k) = g(x(k)) & k = m\tau, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $m, \tau \in \mathbb{N}, \tau \geq 2, g(x(k))$  为函数.

系统 (2) 也可表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = rx(k)(1-x(k)) & k \neq m\tau, \\ x(k+1) = x(k) + g(x(k)) & k = m\tau. \end{cases} \quad (3)$$

未加脉冲作用时 Logistic 映射的分岔图与 Lyapunov 指数如图 1 所示.

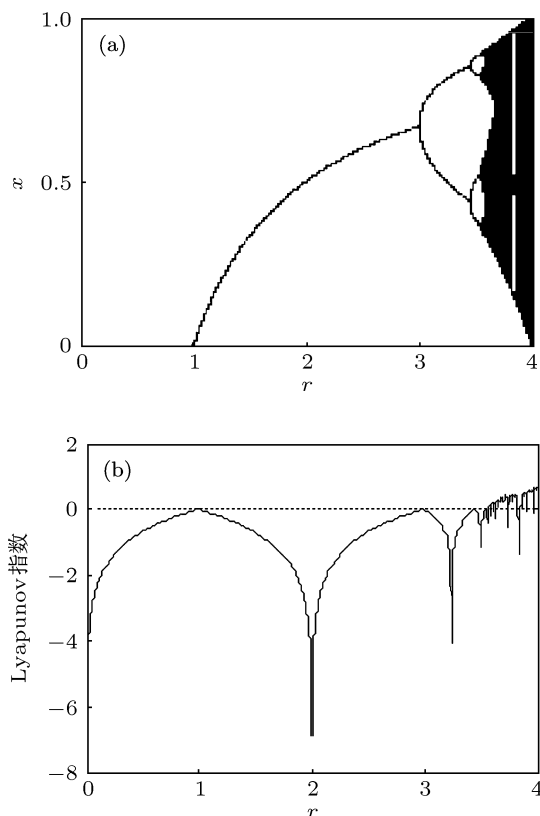


图 1 Logistic 映射的分岔图与 Lyapunov 指数图 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数图

从图 1 可知, 当  $0 \leq r < 1$  时, 系统 (1) 有稳定的平衡点, 即  $x = 0$ ; 当  $r = 1$  时, 系统经鞍结分岔变为稳定的周期一解; 当  $r = 3$  时, 系统经倍周期分岔, 由周期一解变为稳定的周期二解; 当  $r = 3.449$  时, 系统经倍周期分岔, 由周期二解变为稳定的周期四解. 随着  $r$  的逐渐增加, 系统经倍周期分岔到达混

沌. 在混沌区域中存在周期窗口.

## 2 分岔及混沌

本文考虑周期脉冲作用的两种典型情形: (I)  $g(x) = \alpha$ ; (II)  $g(x) = \alpha x$ , 即常量和比例两种脉冲作用. 本文首先固定周期  $\tau, \alpha$ , 取  $r$  为分岔参数, 利用频闪映射研究参数  $r$  对系统的影响. 针对  $r$  的某个变化范围中的每一个值, 求出系统的数值解, 然后取出系统状态的频闪映射的点 (即周期脉冲作用后的点) 来得到  $r$  对系统的影响. 对每一个  $r$  的值, 求出长度为 250 个脉冲周期的数值解; 然后对每一个  $r$  的值, 给出该系统的最后 50 个频闪点, 从而得到该系统的分岔图. 根据频闪映射与原系统的关系得知: 频闪映射的不动点对应于原系统存在一个以脉冲周期为周期的周期解, 即  $1T$  周期解; 频闪映射的  $k$  周期点对应于原系统存在一个以  $k$  倍脉冲周期为周期的周期解, 即  $kT$  周期解; 频闪映射的不变环对应于原系统的拟周期解或圆环面 [16,18].

### 2.1 情形 I: $g(x) = \alpha$

固定周期  $\tau = 3, \alpha = 0.1$ , 系统 (3) 随  $r$  变化的分岔图与 Lyapunov 指数图如图 2 所示. 分岔图上的点为周期脉冲作用后 Logistic 映射的状态, 而文献 [20] 中的分岔图上的点为 Logistic 映射的所有状态, 即本文采用频闪映射进行分析, 这样有利于揭示分岔机理.

从图 2 知, 当  $0 \leq r < 3.018$  时系统为稳定的  $1T$  周期解, 如图 3 所示. 当  $r = 3.018$  时系统经倍周期分岔由  $1T$  周期解变为  $2T$  周期解, 如图 4 所示. 随着  $r$  的逐渐增加, 系统经倍周期分岔由  $4T$  周期解,  $8T$  周期解, 一直到达混沌状态, 如图 5 和图 6 所示. 当  $r = 3.405$  时, 系统产生混沌危机, 直接由混沌状态到达  $1T$  周期解. 最后经过倍周期分岔再次到达混沌. 图 3—6 中空圆圈代表周期脉冲作用点, 实心点代表 Logistic 映射作用点.

### 2.2 情形 II: $g(x) = \alpha x$

固定周期  $\tau = 4, \alpha = 0.125$ , 系统 (3) 随  $r$  变化的分岔图与 Lyapunov 指数图如图 7 所示.

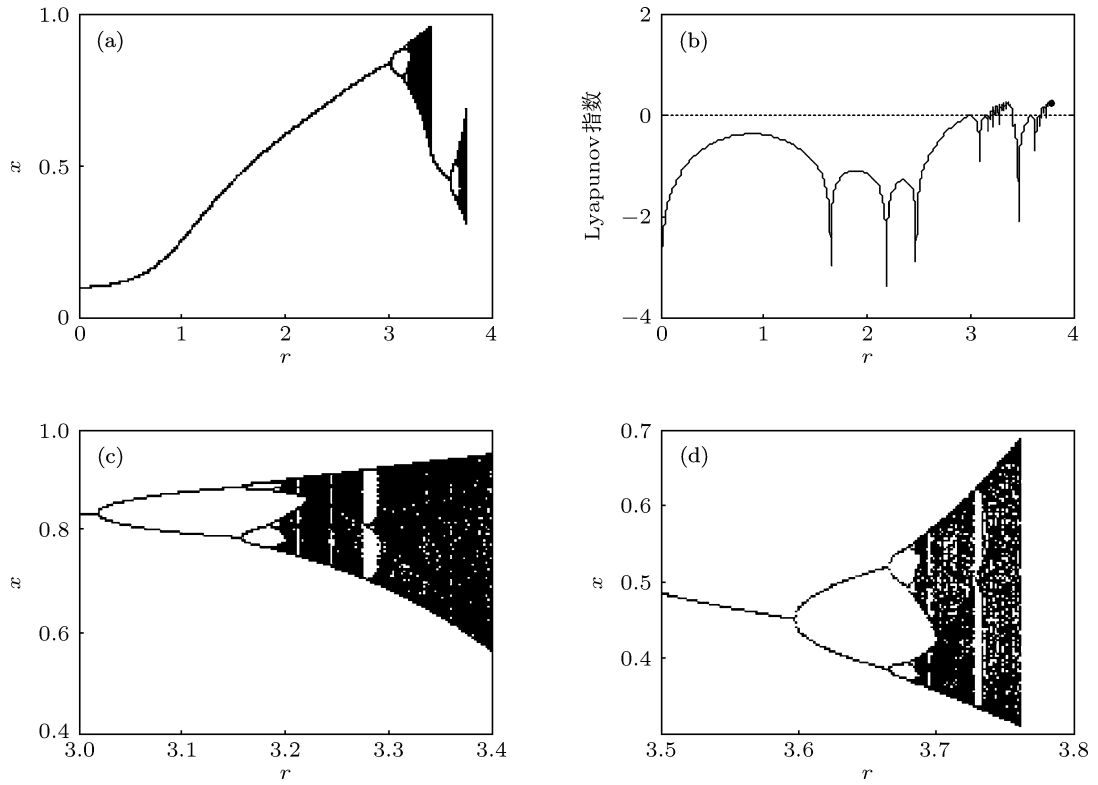


图2 常量脉冲作用下 Logistic 映射的分岔图与 Lyapunov 指数图 (a) 分岔图 ( $0 \leq r < 4$ ); (b) Lyapunov 指数图 ( $0 \leq r < 4$ ); (c) 分岔图 ( $3 \leq r \leq 3.4$ ); (d) 分岔图 ( $3.5 \leq r < 3.8$ )

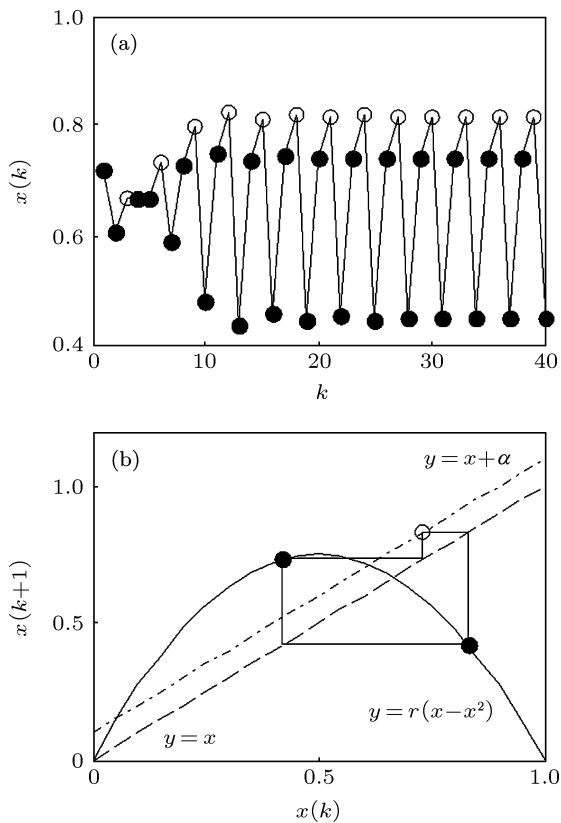


图3 情形 I 中当  $r = 3$  时系统 (3) 的状态序列图与蛛网图 (a) 状态序列图; (b) 蛛网图 (1 T 周期解)

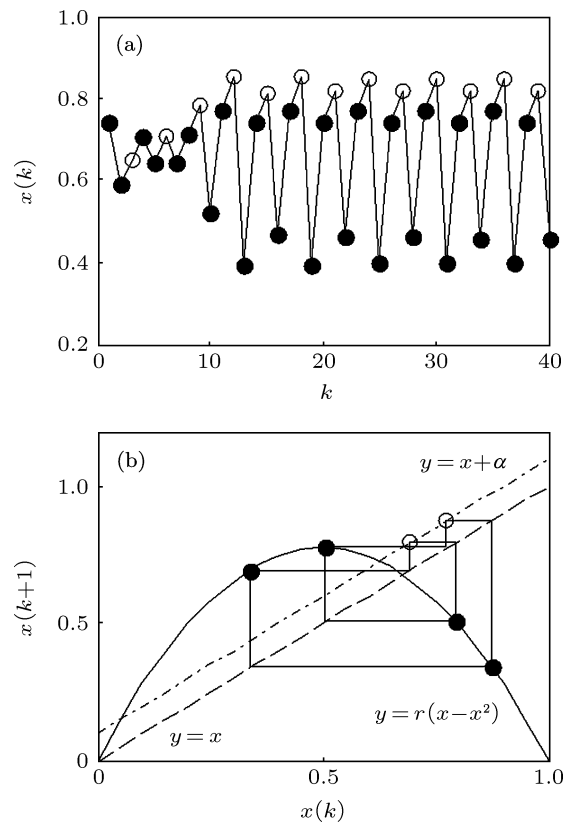


图4 情形 I 中当  $r = 3.1$  时系统 (3) 的状态序列图与蛛网图 (a) 状态序列图; (b) 蛛网图 (2 T 周期解)

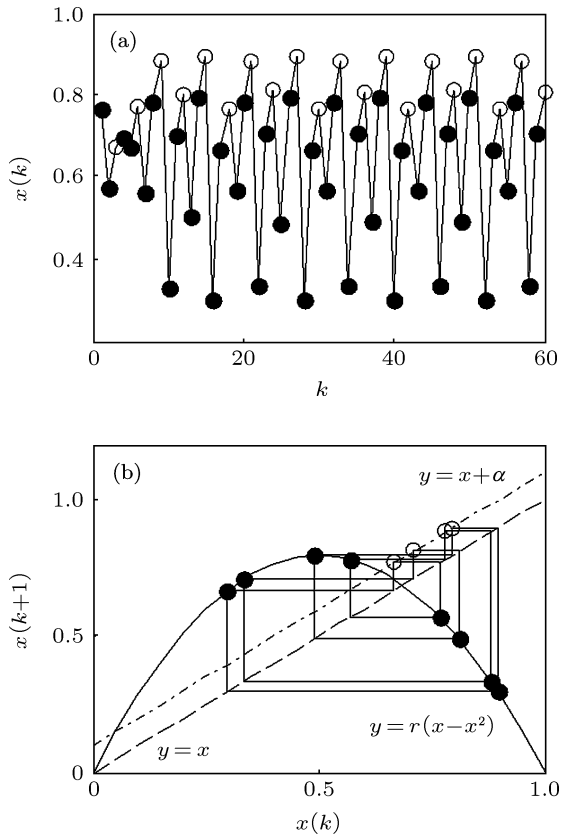


图5 情形I中当 $r=3.18$ 时系统(3)的状态序列图与蛛网图 (a) 状态序列图; (b) 蛛网图(4T周期解)

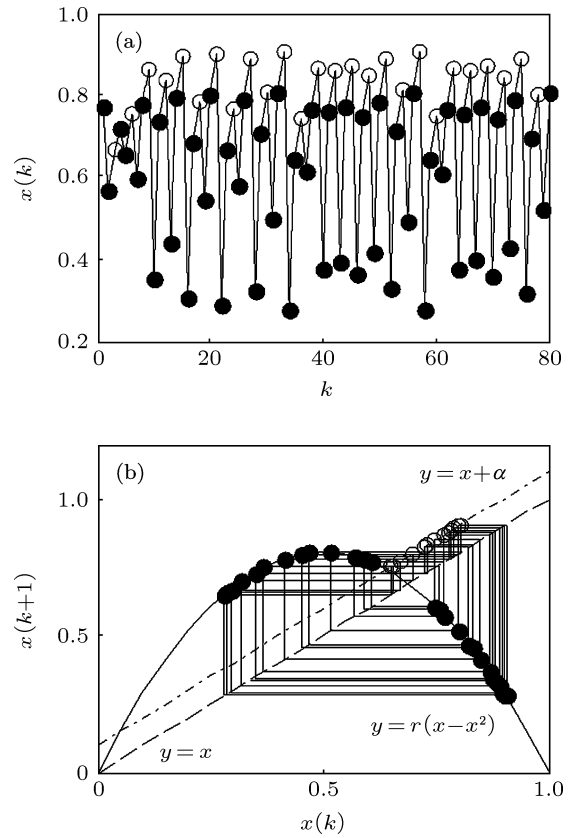


图6 情形I中当 $r=3.22$ 时系统(3)的状态序列图与蛛网图 (a) 状态序列图; (b) 蛛网图(混沌)

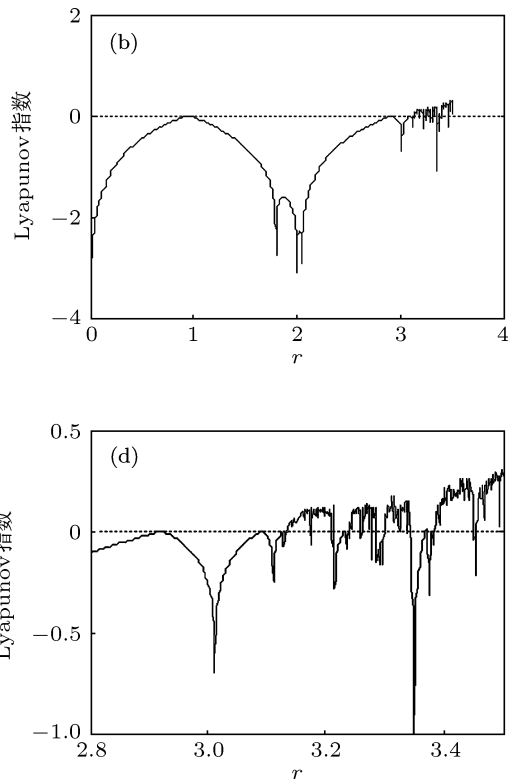
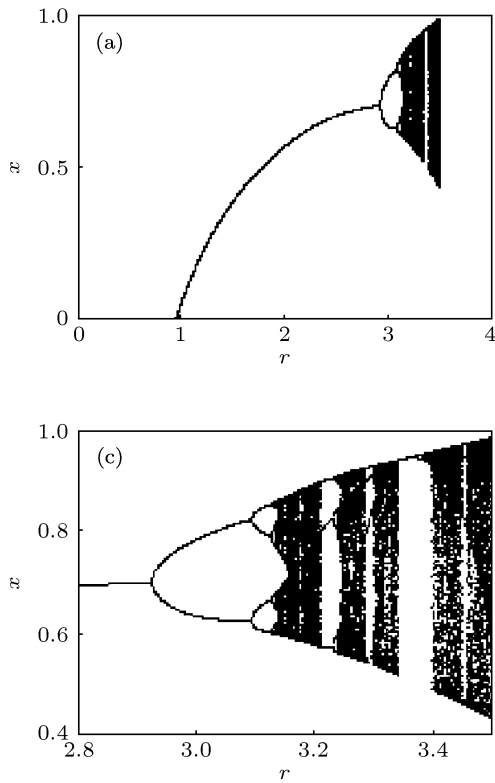


图7 比例脉冲作用下 Logistic 映射的分岔图与 Lyapunov 指数图 (a) 分岔图 ( $0 \leq r < 4$ ); (b) Lyapunov 指数图 ( $0 \leq r < 4$ ); (c) 分岔图 ( $2.8 \leq r \leq 3.5$ ); (d) Lyapunov 指数图 ( $2.8 \leq r \leq 3.5$ )

从图 7 知, 当  $0 \leq r < 0.961$  时, 系统有稳定的平衡点, 即  $x = 0$ . 当  $r = 0.961$  时, 系统经鞍结分岔, 由平衡解变为稳定的  $1 T$  周期解, 如图 8 所示. 当  $r = 2.927$  时, 系统经倍周期分岔, 由  $1 T$  周期解变为稳定的  $2 T$  周期解, 如图 9 所示. 当  $r = 3.094$  时, 系统经倍周期分岔, 由  $2 T$  周期解变为稳定的  $4 T$

周期解, 如图 10 所示. 随着  $r$  的逐渐增加, 系统经倍周期分岔到达混沌, 如图 11 所示.

下面固定  $r = 2$  及周期  $\tau$ , 取  $g(x) = \alpha$ , 并以  $\alpha$  为分岔参数, 研究脉冲作用对系统的影响. 系统 (3) 随  $\alpha$  变化的分岔图如图 12 所示.

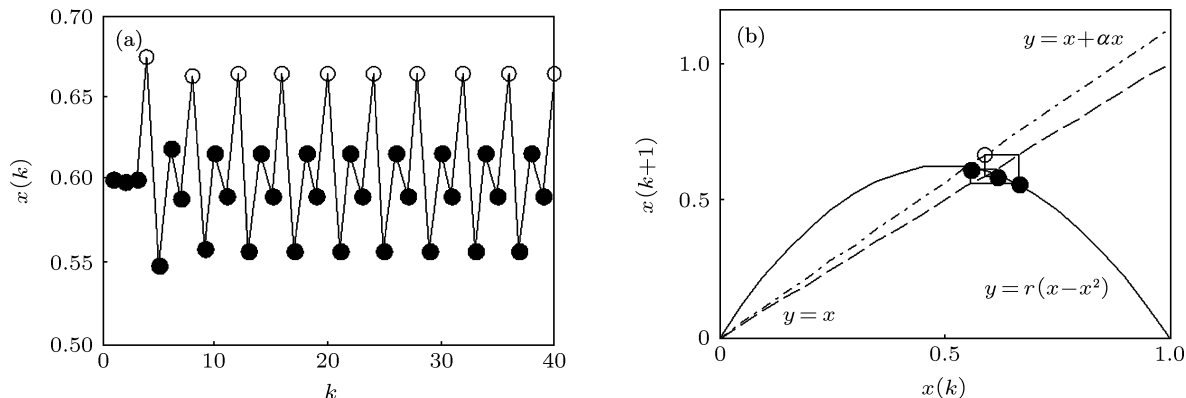


图 8 情形 II 中当  $r = 2.5$  时系统 (3) 的状态序列图与蛛网图 (a) 状态序列图; (b) 蛛网图 ( $1 T$  周期解)

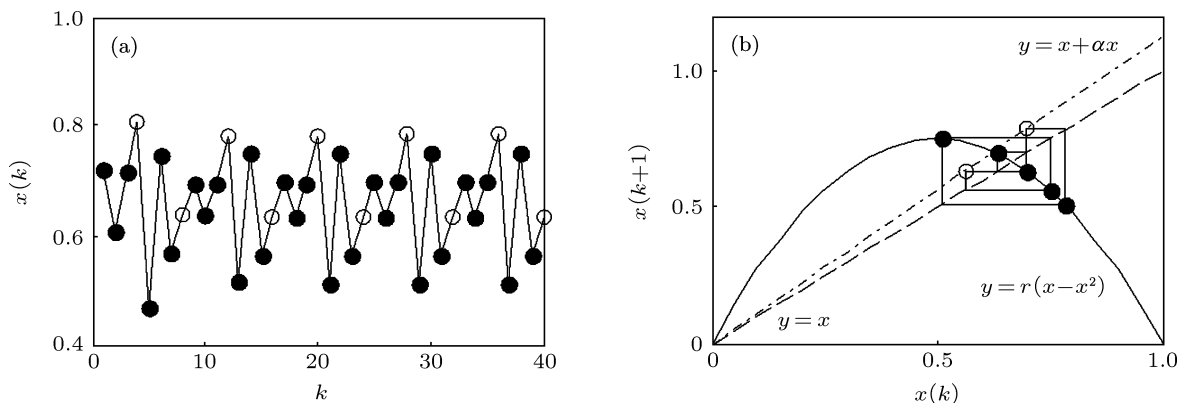


图 9 情形 II 中当  $r = 3$  时系统 (3) 的状态序列图与蛛网图 (a) 状态序列图; (b) 蛛网图 ( $2 T$  周期解)

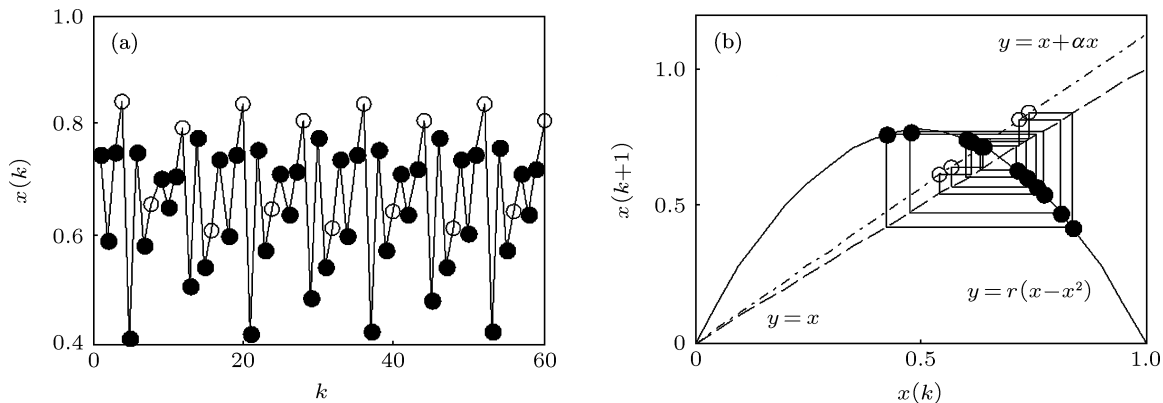


图 10 情形 II 中当  $r = 3.1$  时系统 (3) 的状态序列图与蛛网图 (a) 状态序列图; (b) 蛛网图 ( $4 T$  周期解)

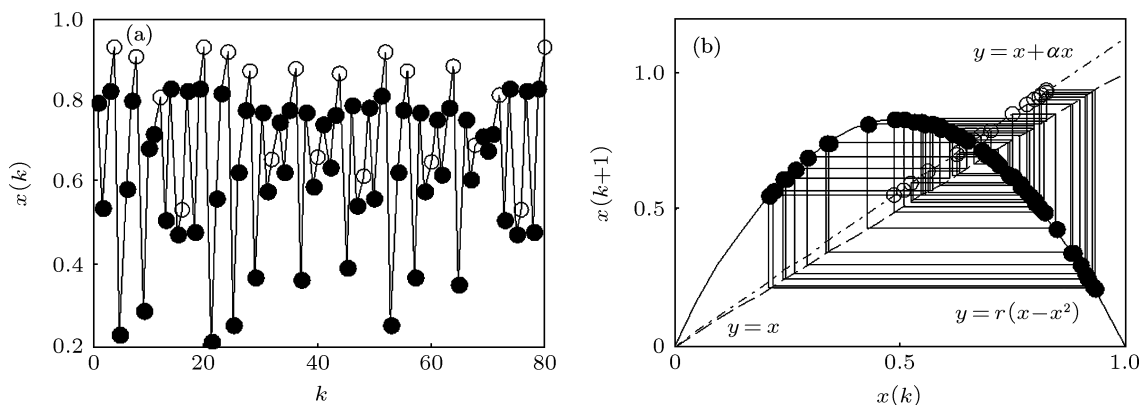


图 11 情形 II 中当  $r = 3.31$  时系统 (3) 的状态序列图与蛛网图 (a) 状态序列图; (b) 蛛网图 (混沌)

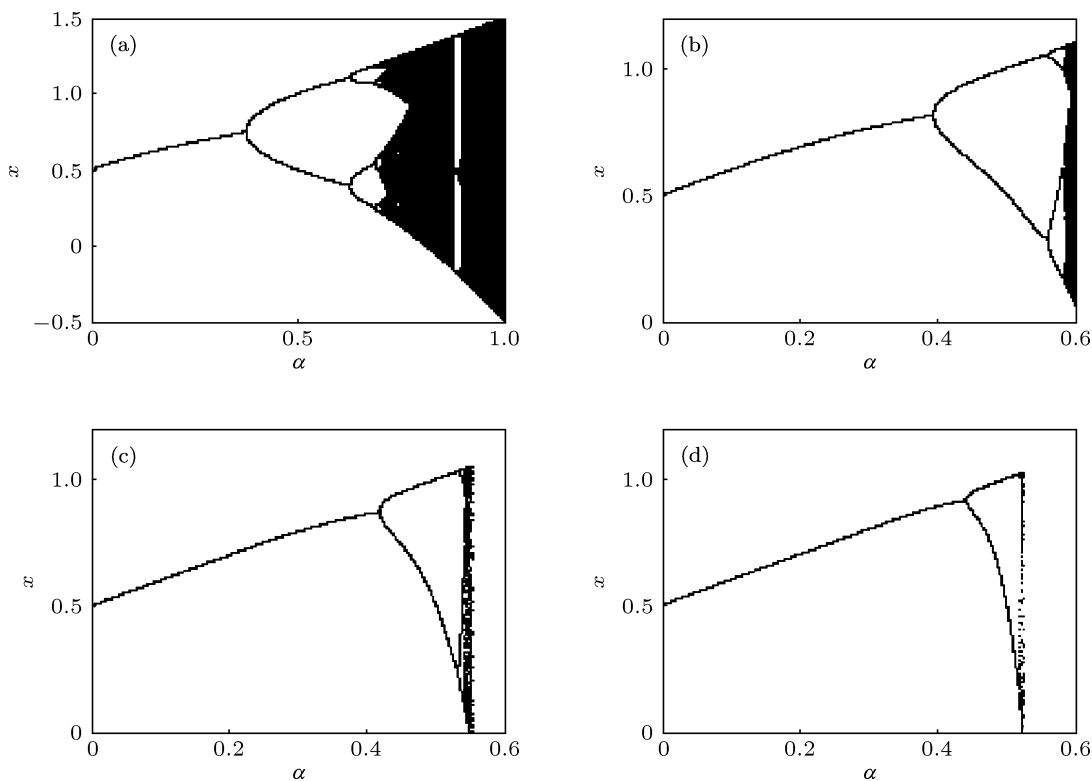


图 12 常量脉冲作用下 Logistic 映射随参数  $\alpha$  变化的分岔图 (a)  $\tau = 2$ ; (b)  $\tau = 3$ ; (c)  $\tau = 4$ ; (d)  $\tau = 5$

从图 12 可知, 在脉冲作用周期固定的情况下, 当  $\alpha = 0$  时, 未受脉冲作用的 Logistic 映射为周期一解; 随着  $\alpha$  的增加, Logistic 映射受到常量脉冲作用, 且经历周期解、混沌等复杂动力学现象. 从图 12(a)—(d) 可知, 随着脉冲作用周期  $\tau$  的增加, 系统 (3) 的倍周期分岔过程逐渐被压缩. 所以脉冲作用强度及脉冲作用周期对系统动力学具有显著影响.

总之周期脉冲作用下的 Logistic 映射走向混沌的演化过程为经倍周期分岔到达混沌, 中间伴随阵发性混沌出现; 在混沌区域中存在周期窗口.

### 3 分岔分析

由于周期脉冲作用下的 Logistic 映射为非光滑离散系统, 故不能用一般离散系统的分岔分析方法进行分析. 下面将文献 [11, 12, 22] 所提出的非光滑连续系统的分岔分析方法推广到非光滑离散系统, 并对周期脉冲作用下的 Logistic 映射的动力学行为进行分岔分析.

令  $f(x) = rx(1-x)$ . 定义映射  $P_1$  为  $P_1 : x \rightarrow f^{\tau-1}(x)$ ,  $P_2$  为  $P_2 : x \rightarrow g(x)$ , 则整个系统的 Poincaré 映射  $P$  可定义为  $P = P_2 \circ P_1$ , 即  $P : x \rightarrow g(f^{\tau-1}(x))$ .

设 Poincaré 映射  $P$  有平衡点  $u(x, y, z)$ , 即  $u = T(u)$ . 此时系统具有周期  $\tau$  的解, 即  $1 T$  周期解. 相应地, 如果 Poincaré 映射  $P$  有  $k$  周期点  $u(x, y, z)$ , 即  $u = T^k(u)$  且  $u \neq T^m(u), m = 1, 2, \dots, k-1$ , 此时系统具有周期  $k\tau$  的解, 即  $k T$  周期解.

Poincaré 映射  $P$  的导数为  $DP = DP_1 \times DP_2 = \frac{d(g(f^{\tau-1}(x)))}{dx}$ , 即得系统的 Floquet 乘子  $\mu = \frac{d(g(f^{\tau-1}(x)))}{dx} \Big|_{x=u}$ . 根据 Floquet 乘子理论, 当  $\mu$  的绝对值小于 1 时, 系统 (3) 的周期解是渐近稳定的; 当特征值  $\mu$  通过  $-1$  穿过单位圆时, 系统 (3) 的周期解产生倍周期分岔; 当特征值  $\mu$  通过 1 穿过单位圆时, 系统 (3) 的周期解产生鞍结分岔.

下面基于 Floquet 理论揭示周期脉冲作用下的 Logistic 映射的分岔机理.

### 3.1 鞍结分岔

考虑情形 I, 当  $3.4047 < r < 3.49$  时, 系统的 Floquet 特征乘子在单位圆内; 而在  $r = 3.4047$  处系统的 Floquet 特征乘子通过 1 穿出单位圆, 如图 13 所示. 根据 Floquet 理论可判断当  $3.4047 < r < 3.49$  时, 系统为稳定的  $1 T$  周期解, 而在  $r = 3.4047$  处系统发生鞍结分岔, 系统由  $1 T$  周期解变为混沌, 此结果与图 2(a) 的分岔图是一致的.

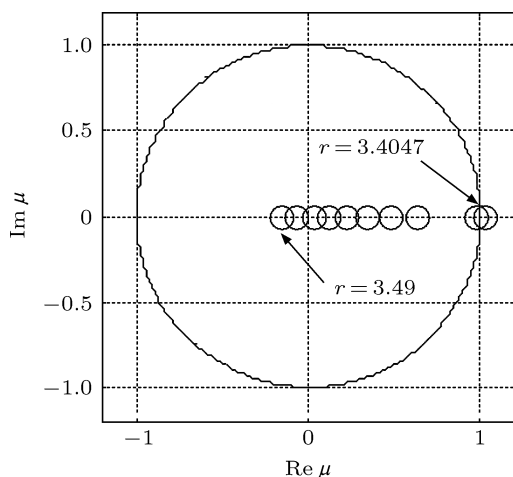


图 13 情形 I 中在  $r = 3.4047$  附近系统 (3) 的 Floquet 特征乘子横截单位圆周的过程

考虑情形 II, 当  $0 < r < 0.9620$  时, 系统的 Floquet 特征乘子在单位圆内; 而在  $r = 0.9620$  处系统的 Floquet 特征乘子通过 1 穿出单位圆, 如图 14 所

示. 根据 Floquet 理论可判断当  $0 < r < 0.9620$  时, 系统为稳定的平衡解, 而在  $r = 0.9620$  处系统发生鞍结分岔, 系统由平衡解变为稳定的  $1 T$  周期解, 此结果与图 7(a) 的分岔图是一致的.

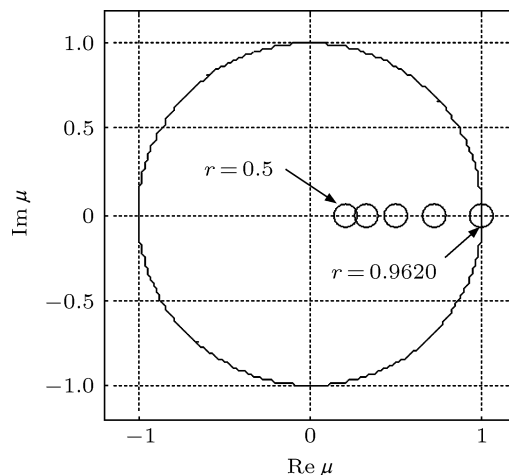


图 14 情形 II 中在  $r = 0.9620$  附近系统 (3) 的 Floquet 特征乘子横截单位圆周的过程

总之, 脉冲作用下的 Logistic 映射经鞍结分岔可能由平衡解变为周期解, 也可能由周期解直接到达混沌. 这两种情形均是发生了鞍结分岔, 即系统的 Floquet 特征乘子通过 1 穿出单位圆, 然而这两种情形的动力学机理并不完全相同. 从 Lyapunov 指数来看, 情形 II 中由平衡解变为周期解时系统的 Lyapunov 指数随着参数  $r$  的增加达到零后就逐渐减少, 而情形 I 中由周期解变为混沌时系统的 Lyapunov 指数随着参数  $r$  的减少达到零后仍逐渐增加. 特别地, 情形 I 中随着参数  $r$  的增加, 系统本质上是发生了混沌危机, 即混沌吸引子突变为周期解. 所谓混沌危机是指系统混沌吸引子不连续地改变其大小、突然出现或突然消失.

### 3.2 倍周期分岔

考虑情形 I, 当  $0 < r < 3.0180$  时, 系统的 Floquet 特征乘子在单位圆内; 而在  $r = 3.0180$  处系统的 Floquet 特征乘子通过  $-1$  穿出单位圆, 如图 15 所示. 根据 Floquet 理论可判断当  $0 < r < 3.0180$ , 系统做稳定的  $1 T$  周期解运动, 而在  $r = 3.0180$  处系统发生倍周期分岔, 系统由  $1 T$  周期解变为稳定的  $2 T$  周期解, 此结果与图 2(c) 的分岔图是一致的.

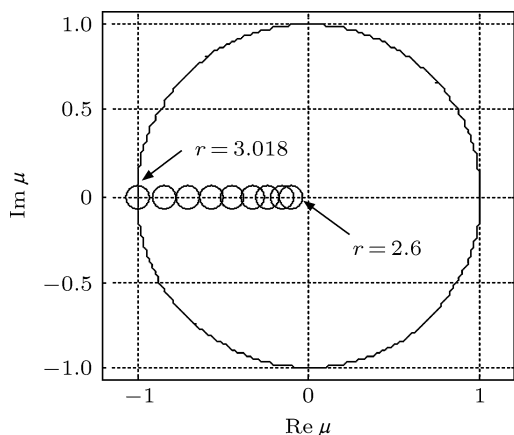


图 15 情形 I 中在  $r = 3.0180$  附近系统 (3) 的 Floquet 特征乘子横截单位圆周的过程

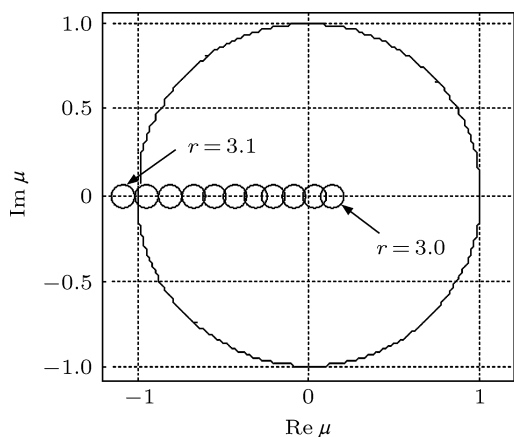


图 16 情形 II 中在  $r = 3.094$  附近系统 (3) 的 Floquet 特征乘子横截单位圆周的过程

考虑情形 II, 当  $2.927 < r < 3.094$  时, 系统的 Floquet 特征乘子在单位圆内; 而在  $r = 3.094$  处系统的 Floquet 特征乘子通过  $-1$  穿出单位圆, 如图 16 所示. 根据 Floquet 理论可判断当  $2.927 < r < 3.094$  时, 系统做稳定的  $2T$  周期解运动, 而在  $r = 3.094$  处系统发生倍周期分岔, 系统由  $2T$  周期解变为稳定的  $4T$  周期解, 此结果与图 7(c) 的分岔图是一致的.

总之, 周期脉冲作用下 Logistic 映射可能会发生倍周期分岔, 即系统的某一周期解变为另一两倍周期的周期解, 并会发生级联倍周期分岔, 即系统的周期解经倍周期分岔到达混沌.

## 4 结论

本文研究了周期脉冲作用下 Logistic 映射的复杂动力学行为, 利用非光滑系统的分岔分析方法对该系统的分岔行为进行了分析, 基于 Floquet 理论揭示了该系统周期解的分岔机理. 可以看到, Floquet 理论是研究非光滑系统的一种有效方法, 研究结果对于非线性离散系统的脉冲控制和分岔控制具有一定的理论意义. 以后要进一步研究脉冲作用下高维离散映射的复杂动力学行为及其分岔机理.

[1] May R M 1976 *Nature* **261** 459  
 [2] Singh N, Sinha A 2010 *Opt. Lasers Eng.* **48** 398  
 [3] Stein R R, Isambert H 2011 *Phys. Rev. E* **84** 051904  
 [4] Nagatani T, Sugiyama N 2013 *Physica A* **392** 851  
 [5] Jiang H B, Yu J J, Zhou C G 2008 *IET Control Theory Appl.* **2** 654  
 [6] Qian L N, Lu Q S, Meng Q G, Feng Z S 2010 *J. Math. Anal. Appl.* **363** 345  
 [7] Zhang L P, Jiang H B, Bi Q S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010507  
 [8] Wang L, Zhao R, Xu W, Zhang Y 2011 *Chin. Phys. B* **20** 020506  
 [9] Wang X Y, Zhang Y L, Lin D, Zhang N 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030506  
 [10] Zhou J, Wu Q J, Xiang L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1393  
 [11] Jin L, Lu Q S, Wang Q 2004 *Chin. J. Appl. Mech.* **21** 21 (in Chinese) [金俐, 陆启韶, 王琪 2004 应用力学学报 **21** 21]  
 [12] Lu Q S, Jin L 2005 *Acta Mech. Sol. Sin.* **26** 132 (in Chinese) [陆启韶, 金俐 2005 固体力学学报 **26** 132]  
 [13] Lenci S, Rega G 2000 *Chaos, Solitons and Fractals* **11** 2453  
 [14] Jiang G R, Yang Q G 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4114  
 [15] Jiang G R, Xu B G, Yang Q G 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5235  
 [16] Zhang S W, Chen L S 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **24** 73  
 [17] Georgescu P, Zhang H, Chen L S 2008 *Appl. Math. Comput.* **202** 675  
 [18] Jiang H B, Zhang L P, Chen Z Y, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080505 (in Chinese) [姜海波, 张丽萍, 陈章耀, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 080505]  
 [19] Gao S J, Chen L S 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 519  
 [20] Liu F 2008 *Ph. D. Dissertation* (Wuhan: Huazhong University of Science and Technology) (in Chinese) [刘峰 2008 博士学位论文 (武汉: 华中科技大学)]  
 [21] Liu F, Guan Z H, Wang H O 2010 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **11** 1491  
 [22] Kawakami H 1984 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **31** 248



# Bifurcation analysis of complex behavior in the Logistic map via periodic impulsive force\*

Jiang Hai-Bo<sup>†</sup> Li Tao Zeng Xiao-Liang Zhang Li-Ping

(School of Mathematics, Yancheng Teachers University, Yancheng 224002, China)

(Received 18 January 2013; revised manuscript received 12 February 2013)

## Abstract

The complex dynamics of the Logistic map via two types of periodic impulsive forces is investigated in this paper. With the parameter varying, the system produces the phenomenon such as equilibrium solutions, periodic solutions, and chaotic solutions. Furthermore the system can evolve into chaos by a cascading of period-doubling bifurcations. The Poincaré map of the Logistic map via periodic impulsive force is constructed and its bifurcation is analyzed. Finally, the Floquet theory is used to explore the bifurcation mechanism for the periodic solutions.

**Keywords:** Logistic map, impulse, periodic solutions, bifurcation mechanism

**PACS:** 05.45.Ac, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.120508

---

\* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant Nos. 11202180, 61273106, 11171290), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant Nos. BK2010292, BK2010293), and the Natural Science Foundation of the Jiangsu Higher Education Institutions of China (Grant No. 10KJB510026), the National Training Programs of Innovation and Entrepreneurship for Undergraduates, China (Grant No. 201210324009), and the Training Programs of Practice and Innovation for Jiangsu College Students, China (Grant No. 2012JSSPITP2378).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: yctcjh@gmail.com