

## 数字全息图取样模型的简化研究\*

李俊昌<sup>†</sup> 楼宇丽 桂进斌 彭祖杰 宋庆和

(昆明理工大学理学院, 昆明 650093)

(2012年10月22日收到; 2013年3月6日收到修改稿)

数字全息研究领域目前存在两种不同的数字全息图取样模型. 按照这两种模型进行研究时, 不但涉及较复杂的数学运算, 在许多情况下还会导致不同的研究结果, 不便于理论分析及实际应用. 基于对数字全息图记录的物理过程分析及电荷耦合器件 (charge coupled device, CCD) 几何结构的研究, 本文将这两种取样模型简化为相同的数学表达式. 利用数字全息图的余弦级数展开及取样定理对简化模型的研究表明, 简化模型不但具有清晰的物理意义, 而且可以方便地为应用研究服务. 基于简化模型对物光波通过光学系统到达 CCD 的数字全息记录系统进行了研究, 导出得到实验验证的波前重建表达式.

**关键词:** 数字全息, 波前重建, 相干光成像

**PACS:** 42.40.-i, 42.40.Eq, 42.40.Jv

**DOI:** 10.7498/aps.62.124203

## 1 引言

随着计算机及电荷耦合器件 (charge coupled device, CCD) 技术的进步, 20 世纪出现的数字全息<sup>[1,2]</sup> 逐步成为国内外的一个研究热点<sup>[3-16]</sup>. 然而, 由于 CCD 像素及面阵尺寸与传统感光材料有较大差距, 如何利用 CCD 记录的数字全息图高质量地重建物光场是数字全息技术的基本研究课题.

在该研究领域, 目前存在两种较有代表性的数字全息图取样模型: 其一是德国学者 Thomas<sup>[5,6]</sup> 在 2002 年提出的取样模型; 其二是我国学者国承山针对 Thomas 模型存在的问题于 2003 年提出的取样模型<sup>[7]</sup>. 我国学者在文献 [7] 中指出, 由于 Thomas 模型没有反映数字全息图的离散取样的物理效应, 按照模型研究的结论值得怀疑. 同年, Thomas 对我国学者提出的模型表示赞同与欢迎<sup>[8]</sup>, 但是, 由于 Thomas 模型的数学处理相对简单, 能够解释许多实际问题, 2004 年 Thomas<sup>[9]</sup> 在所发表的专著中仍然采用他 2002 年提出的取样模型描述数字全息图.

由于两位学者所做的工作均发表于国际上有广泛影响的杂志及出版社, 长期以来, 两种模型成

为数字全息研究领域进行研究的重要参考. 据最近美国数据库索引统计, 德国学者 Thomas 模型的论文<sup>[5,6]</sup> 引用数分别为 53 次及 43 次, 我国学者国承山论文<sup>[7]</sup> 的引用数为 18 次. 由于国承山模型重建物光场的点扩散函数是复杂的数学表达式, 通过简化才能获得数值结果<sup>[7]</sup>, 本文作者也于 2009 年引用 Thomas 模型进行过物光通过光学系统到达 CCD 的波前重建研究<sup>[12]</sup>.

然而, 在应用研究中, 两种模型不能得到统一的数学结果, 是值得深入研究的问题. 我们最近的研究表明, 根据取样定理<sup>[17]</sup>, 在 CCD 能够探测的频率范围内, 表述 CCD 像素的矩形函数可以近似为  $\delta$  函数. 通过这种近似获得的取样模型具有清晰的物理意义, 不但能将两种模型简化为统一的数学表达式, 简明地体现像素填充因子对重建图像质量的影响, 而且可以导出能够足够准确地指导实际工作的研究结果.

作为简化模型的应用实例, 本文导出物光通过光学系统到达 CCD 时的重建场表达式, 与传统的不考虑取样效应而导出的结果比较表明, 利用简化模型获得的结果具有更确切的物理内容, 可以方便地为应用研究服务.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60977007) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: jcli@vip.163.com

## 2 数字全息图的两种取样模型及其简化

在 CCD 平面建立直角坐标  $x$ - $y$ , 图 1 是 CCD 面阵结构示意图 [5]. 图中, 相邻像素间隔在  $x$  方向是  $\Delta x$  而在  $y$  方向是  $\Delta y$ ,  $\alpha\Delta x \times \beta\Delta y$  是 CCD 单个像素尺寸,  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  为像素填充因子;  $N$  和  $M$  分别是  $x$  和  $y$  方向上的像素数, 整个像素列阵落在由  $N\Delta x \times M\Delta y$  确定的矩形区域内.

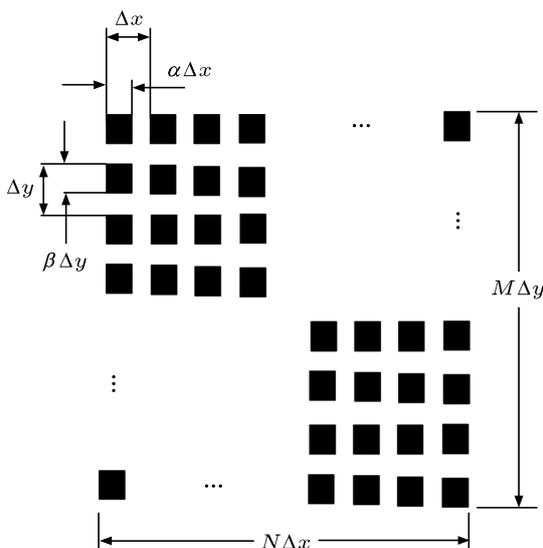


图 1 CCD 面阵结构示意图

令到达 CCD 面阵的物光及参考光分别为  $U(x, y)$  及  $R(x, y)$ , 两光波干涉场的强度分布则为

$$\begin{aligned}
 I(x, y) &= |U(x, y) + R(x, y)|^2 \\
 &= |U(x, y)|^2 + |R(x, y)|^2 + U(x, y)R^*(x, y) \\
 &\quad + U^*(x, y)R(x, y). \tag{1}
 \end{aligned}$$

用 CCD 记录两光波干涉场的强度分布而形成数字全息图后, 上式也可以视为单位振幅平面波照射全息图后的透射波. 式中第一、二两项称零级衍射光, 第三项称物光, 第四项称共轭物光.

为进行物光波前的后续研究, 目前存在两种较有代表性的数字全息图的取样模型.

### 2.1 Thomas 模型

2002 年, 德国学者 Thomas 在文献 [5, 6] 中提出, CCD 记录的数字全息图可以表示为

$$I_{\text{Thomas}}(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{N\Delta x}, \frac{y}{M\Delta y}\right) \left[ \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y}\right)$$

$$* \text{rect}\left(\frac{x}{\alpha\Delta x}, \frac{y}{\beta\Delta y}\right) \right] I(x, y), \tag{2}$$

式中“\*”是卷积符号. 不难看出, 该模型将 CCD 面阵的像素阵列视为干涉场能量的透射窗阵列, 在进行波前重建时, 重建波照射全息图后, 每一像素窗口后将产生衍射波, 可以进行数字全息波前重建的后续研究.

### 2.2 国承山模型

2003 年, 我国学者国承山在文献 [7] 中指出, 由于 Thomas 模型没有反映数字全息图对于干涉场强度离散取样的物理效应, 按照该模型的研究结论值得怀疑. 因此, 提出下述模型:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{Guo}}(x, y; \xi, \eta) \\
 = \text{rect}\left(\frac{x}{N\Delta x}, \frac{y}{M\Delta y}\right) \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y}\right) I'(x, y), \tag{3}
 \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned}
 I'(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(u, v) \text{rect}\left(\frac{u-x}{\alpha\Delta x}, \frac{v-y}{\beta\Delta y}\right) dudv \\
 &= I(x, y) * \text{rect}\left(\frac{x}{\alpha\Delta x}, \frac{y}{\beta\Delta y}\right).
 \end{aligned}$$

比较两模型不难看出, 第一种模型表述的是由  $M \times N$  个局部连续区域组成的干涉场强度图像, 第二种模型表示的是干涉场强度分布的  $M \times N$  个取样值. 从 CCD 面阵记录干涉场能量的物理意义而言, 第二种模型更符合实际情况.

### 2.3 简化模型及其模拟实验证明

利用上述两种模型进行物光波前重建研究时, 均涉及较复杂的数学运算, 一些情况下还会得到不同的研究结果 [7], 有必要对这两种模型做进一步研究. 以下提出一种简化模型并对模型的可行性做模拟实验证明.

由于 CCD 像素面积  $\alpha\Delta x \times \beta\Delta y$  较小,

$$\text{rect}\left(\frac{x}{\alpha\Delta x}, \frac{y}{\beta\Delta y}\right) \approx \alpha\Delta x\beta\Delta y\delta(x, y) \tag{17}.$$

将这个近似代入 (2) 及 (3) 式后, 两式均简化为

$$\begin{aligned}
 I_S(x, y) &= \alpha\Delta x\beta\Delta y \text{rect}\left(\frac{x}{N\Delta x}, \frac{y}{M\Delta y}\right) \\
 &\quad \times \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y}\right) I(x, y), \tag{4}
 \end{aligned}$$

(4) 式不包含卷积运算, 利用 (4) 式进行的相关研究将比 (2), (3) 两式简单. 在继续下面的讨论前, 不妨考察这种近似的物理意义及可行性.

由于  $I(x,y)$  是在  $(x,y)$  点的干涉场功率密度, (4) 式表明: 中心在  $(x,y)$  的像素吸收的功率被近似为 CCD 所在平面上  $(x,y)$  点的干涉场功率密度与像素面积的乘积.

由于物光及参考光在 CCD 平面的干涉场是数值为正的强度分布图像, 按照数字图像处理的理论<sup>[18]</sup>, 可以展开为余弦级数, 并且级数的每一项均能分离变量. 为简单起见, 基于取样定理及在  $x$  方向的一维余弦曲线的取样来考察简化模型的可行性.

根据取样定理<sup>[17]</sup>, 正确的取样应在每一周期内至少有两个取样点. 令两余弦分量的周期分别为  $T$  及  $T/10$ , 图 2 给出取样间隔满足及不满足取样定理的两种情况. 图中, 粗黑线示出物理像元宽度  $\alpha\Delta x$ , 像元探测的能量正比于在像元宽度范围内余弦函数曲线与横轴围成的面积 (包含正负).

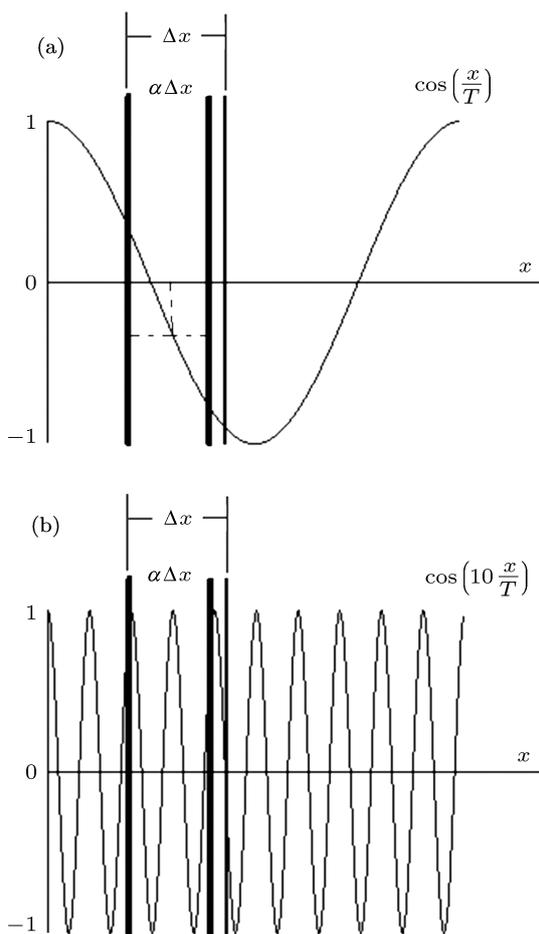


图 2 取样间隔满足及不满足取样定理的取样示意图 (a) 满足取样定理; (b) 不满足取样定理

图 2(a) 是满足取样定理的情况. 由于简化模型获得的取样值是像元中点的函数值与像元宽度  $\alpha\Delta x$  的乘积, 如果像元宽度内的余弦函数曲线能用直线近似, 简化模型与国承山模型获得的结果是一致的. 换言之,  $\alpha\Delta x$  越小, 余弦函数的周期越长, 简化模型越准确. 图 2(b) 是不满足取样定理的情况, 虽然简化模型获得的结果不再是像元宽度内的余弦函数的积分, 然而由于取样间隔已经不满足取样定理, 基于积分的取样模型也不可能找到相应的插值函数来重建原函数, 即积分模型也同时失效. 因此, 在满足取样定理的前提下, 简化模型可以视为是准确反映取样物理意义的国承山模型的一种近似, 并且, 简化模型对全息图低频分量的取样精度高于对高频分量的取样精度.

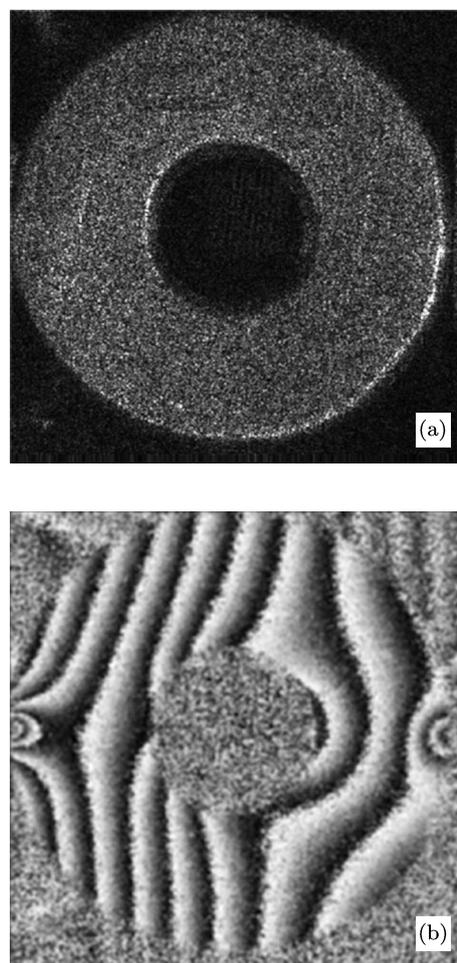


图 3 基于 BMP 文件的数字全息图研究 (a) 物体重建像强度图像; (b) 以  $2\pi$  为模的二次曝光干涉图像

利用这个有意义的结果, 可以基于图像处理技术方便地模拟验证简化模型的可行性. 研究 CCD 记录的任意数字全息图的余弦级数展开可以看出, 图像能量大部分集中在频率较低的区域. 如果将实

验探测的数字全息图视为国承山模型的取样, 则频率分量由低频到高频取样畸变逐渐增加的全息图可以视为简化模型的取样结果. 在图像处理技术中, 将图像的 BMP 文件压缩为 JPG 文件的过程, 是对 BMP 图像余弦级数展开后, 按照频率由低至高逐渐加强数据压缩的处理过程<sup>[18]</sup>. 因此, 将 BMP 文件记录的全息图转化为 JPG 文件后再重新恢复的二维图像数据, 与简化模型获得的数字全息图相似. 于是, 利用同一全息图的 BMP 文件及 JPG 文件平行地进行波前重建及数字全息检测, 比较二者的结果, 便能对简化模型的可行性给出较好的模拟实验证明.

作者基于大量的数字全息图进行的比较研究表明, 很难发现两种全息图的重建物光波前的区别. 作为实例, 利用文献 [19] 的二次曝光数字全息系统及物体横向加载前后的 BMP 数字全息图, 图 3 及图 4 分别给出使用 BMP 文件及 JPG 文件重建的两组图像. 因此, 简化模型应能足够好地表示数字全息图的取样结果.

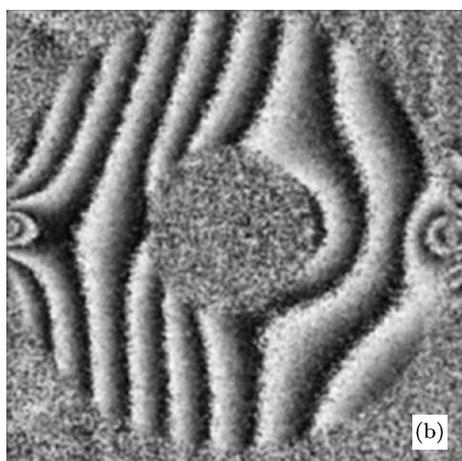
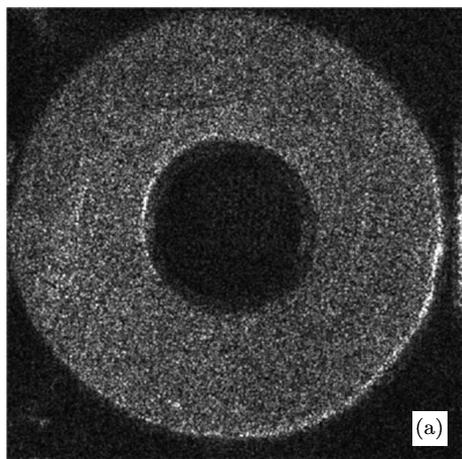


图 4 基于 JPG 文件的数字全息图研究 (a) 物体重建像强度图像; (b) 以  $2\pi$  为模的二次曝光干涉图像

### 3 基于简化模型对数字全息波前重建质量的研究

在文献 [12] 中, 作者曾经基于 Thomas 模型, 利用柯林斯公式<sup>[20]</sup>及矩阵光学理论, 对物光通过光学系统到达 CCD 的数字全息光学系统进行过研究, 导出光学矩阵元素与重建图像质量的关系, 进行了实验证明. 现在, 利用数字全息图的简化模型对该问题重新进行研究, 考察简化模型的可行性.

#### 3.1 数字全息记录及波前重建系统简介

令物平面、CCD 探测平面及重建物平面坐标分别为  $x_0y_0, xy$  及  $x_1y_1$ , 数字全息波前重建系统如图 5 所示. 数字全息记录及波前重建过程可以分解为两个部分: 其一, 沿  $z$  轴传播的物光通过光学系统到达 CCD, 由 CCD 记录下与参考光干涉形成的数字全息图, 这是一个实际光学过程; 其二, 计算机虚拟重建光照明数字全息图, 用衍射的数值计算重建物光场, 这是一个虚拟的光学过程. 由于 CCD 面阵尺寸相对实际光学元件通常较小, 对于  $x_0y_0$  到  $x_1y_1$  的整个光学系统, 可以将系统的孔径光阑视为 CCD 面阵边界. 这样, 根据阿贝或瑞利的成像理论, 可以只考虑孔径光阑对光传播的衍射受限问题<sup>[17]</sup>.

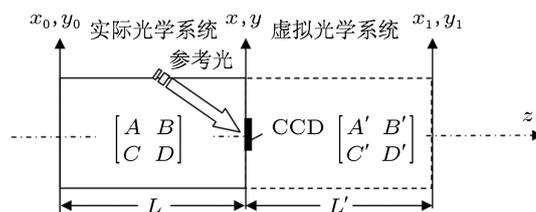


图 5 数字全息波前重建系统示意图

若物平面到 CCD 平面的光学系统可由  $2 \times 2$  的矩阵  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  描述, 给定物平面光波场  $U_0(x_0, y_0)$ , CCD 平面的光波场  $U(x, y)$  可通过柯林斯公式求出

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkL)}{j\lambda B} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \times \exp \left\{ \frac{jk}{2B} [A(x_0^2 + y_0^2) + D(x^2 + y^2) - 2(xx_0 + yy_0)] \right\} dx_0 dy_0, \quad (5)$$

式中,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $L$  为光学系统的轴上光程,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为光波长.

令 CCD 平面右侧的光学系统由光学矩阵  $\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$  描述, 文献 [12] 证明

$$A' = D, \quad B' = -B, \quad C' = -C, \quad D' = A, \quad (6)$$

因此, 一旦得到  $xy$  平面的物光场后, 利用 (6) 式确定的虚拟光学系统矩阵元素, 便能用柯林斯公式进行物光场重建.

### 3.2 波前重建系统的脉冲响应

由于成像系统的特性可由系统的脉冲响应表述 [17]. 现研究物平面上坐标  $(\xi, \eta)$  处的单位振幅点光源  $\delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta)$  通过图 5 所示系统的响应. 鉴于 CCD 置于光学系统的像平面时使用像光场进行相关应用研究是最常见的情况 [10, 16]. 以下分别对 CCD 在像平面及不在像平面两种情况的脉冲响应进行讨论.

1) CCD 在光学系统像平面的情况

在 (5) 式中, 令  $Ax_0 = x_a, Ay_0 = y_a$ , 将积分号内的二次相位因子做配方运算, 并注意  $AD - BC = 1$ , 可以将柯林斯公式重新写为

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \exp(jkL) \exp \left[ j \frac{kC}{2A} (x^2 + y^2) \right] \\ &\times \frac{1}{j\lambda BA} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} U_0 \left( \frac{x_a}{A}, \frac{y_a}{A} \right) \\ &\times \exp \left\{ j \frac{k}{2BA} [(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2] \right\} dx_a dy_a. \quad (7) \end{aligned}$$

为得到物平面点光源  $\delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta)$  在 CCD 平面的光波场, 上式中令

$$U_0 \left( \frac{x_a}{A}, \frac{y_a}{A} \right) = \delta \left( \frac{x_a}{A} - \xi, \frac{y_a}{A} - \eta \right), \quad (8)$$

并将 CCD 平面坐标由  $(x_i, y_i)$  表示, 得到

$$\begin{aligned} u_\delta(x_i, y_i; \xi, \eta) &= \exp(jkL) \exp \left[ j \frac{kC}{2A} (x_i^2 + y_i^2) \right] \\ &\times \frac{1}{j\lambda BA} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \delta \left( \frac{x_a}{A} - \xi, \frac{y_a}{A} - \eta \right) \\ &\exp \left\{ j \frac{k}{2BA} [(x_a - x_i)^2 + (y_a - y_i)^2] \right\} dx_a dy_a, \quad (9) \end{aligned}$$

矩阵元素  $B = 0$  的问题可以视为  $B \rightarrow 0$  时的极限情况. 上式与熟知的菲涅耳衍射积分比较不难看出,  $B \rightarrow 0$  时, 上式代表放大  $A$  倍的理想像经无限小距

离  $BA$  衍射后与一相位因子的乘积. 于是有

$$\begin{aligned} U_\delta(x_i, y_i; \xi, \eta) &= \lim_{BA \rightarrow 0} u_\delta(x_i, y_i; \xi, \eta) \\ &= \exp(jkL) \exp \left[ j \frac{kC}{2A} (x_i^2 + y_i^2) \right] \\ &\times \frac{1}{A} \delta \left( \frac{x_i}{A} - \xi, \frac{y_i}{A} - \eta \right). \quad (10) \end{aligned}$$

上式结果表明, 如果忽略光学系统的有限孔径衍射效应, 到达 CCD 的仍然是  $\delta$  函数表示的理想像点. 为简明起见, 以下忽略常数相位因子  $\exp(jkL)$ .

当参考光与物光干涉并由 CCD 记录数字全息图后, 利用 (4) 式描述数字全息图, 用原参考光的数学表达式与数字全息图相乘, 进行离散傅里叶变换, 用滤波窗取出物光项的频谱, 再做离散傅里叶反变换, 即得到  $B = 0$  时点源的脉冲响应

$$\begin{aligned} h_\delta(x_i, y_i; \xi, \eta) &= \alpha \Delta x \beta \Delta y \text{rect} \left( \frac{x_i}{N \Delta x}, \frac{y_i}{M \Delta y} \right) \text{comb} \left( \frac{x_i}{\Delta x}, \frac{y_i}{\Delta y} \right) \\ &\times \exp \left[ j \frac{kC}{2A} (x_i^2 + y_i^2) \right] \frac{1}{A} \delta \left( \frac{x_i}{A} - \xi, \frac{y_i}{A} - \eta \right). \quad (11) \end{aligned}$$

若物平面光波场为  $O_0(\xi, \eta)$ , 像平面光波场由下叠加积分确定:

$$\begin{aligned} O(x_i, y_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O_0(\xi, \eta) h_\delta(x_i, y_i; \xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \alpha \Delta x \beta \Delta y \text{rect} \left( \frac{x_i}{N \Delta x}, \frac{y_i}{M \Delta y} \right) \text{comb} \left( \frac{x_i}{\Delta x}, \frac{y_i}{\Delta y} \right) \\ &\times \exp \left[ j \frac{kC}{2A} (x_i^2 + y_i^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O_0(\xi, \eta) \\ &\times \frac{1}{A} \delta \left( \frac{x_i}{A} - \xi, \frac{y_i}{A} - \eta \right) d\xi d\eta \\ &= \alpha \Delta x \beta \Delta y \text{rect} \left( \frac{x_i}{N \Delta x}, \frac{y_i}{M \Delta y} \right) \text{comb} \left( \frac{x_i}{\Delta x}, \frac{y_i}{\Delta y} \right) \\ &\times \exp \left[ j \frac{kC}{2A} (x_i^2 + y_i^2) \right] \frac{1}{A} O_0 \left( \frac{x_i}{A}, \frac{y_i}{A} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

上式结果表明, 若 CCD 置于光学系统的像平面, 可以通过数字全息图获得带有一个二次相位因子的理想像光场的  $M \times N$  点取样. 像光场的取样值与像素面积  $\alpha \Delta x \beta \Delta y$  成正比, 与像的横向放大率  $A$  成反比, 是一个有明显物理意义的结论.

在物光通过光学系统到达 CCD 的数字全息应用研究中, 通常推导出不考虑取样效应的像光场表达式指导数字全息检测研究 [10]. (12) 式与这些研究导出的像光场表达式的比较表明, 重建像不但带有相同的二次相位因子, 而且包含了取样效应及像素填充因子的影响, 具有更确切的物理意义.

2) CCD 不在光学系统像平面的情况

利用柯林斯公式 (7), 并忽略常数相位因子  $\exp(jkL)$ , 到达 CCD 平面的光波复振幅可以表为

$$\begin{aligned}
 & u_{\delta}(x, y; \xi, \eta) \\
 &= \exp\left[j\frac{kC}{2A}(x^2 + y^2)\right] \frac{1}{j\lambda BA} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \delta\left(\frac{x_a}{A} - \xi, \frac{y_a}{A} - \eta\right) \\
 &\quad \times \exp\left\{j\frac{k}{2BA}[(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2]\right\} dx_a dy_a \\
 &= \frac{1}{j\lambda B} \exp\left[j\frac{kC}{2A}(x^2 + y^2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left\{j\frac{k}{2BA}[(A\xi - x)^2 + (A\eta - y)^2]\right\}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

让 CCD 平面引入参考光, 用 (4) 式表示 CCD 记录的数字全息图, 若用原参考光的共轭光照射全息图形成衍射波, 全息图透射光中的物光项则为

$$\begin{aligned}
 & I_{\delta-}(x, y; \xi, \eta) \\
 &= \alpha\Delta x\beta\Delta y \text{rect}\left(\frac{x}{N\Delta x}, \frac{y}{M\Delta y}\right) \\
 &\quad \times \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y}\right) u_{\delta}(x, y; \xi, \eta), \quad (14)
 \end{aligned}$$

利用上式结果, 根据 (6) 式及柯林斯公式 (5) 式, 再次忽略轴上光程引入的常数相位因子, 物平面上点光源  $\delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta)$  在  $x_i y_i$  平面的重构场则为

$$\begin{aligned}
 & h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) \\
 &= \frac{1}{-j\lambda B} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\delta-}(x, y; \xi, \eta) \\
 &\quad \times \exp\left\{-\frac{jk}{2B}[D(x^2 + y^2) + A(x_i^2 + y_i^2) - 2(x_i x + y_i y)]\right\} dx dy, \quad (15)
 \end{aligned}$$

将 (14) 式代入 (15) 式, 整理后可用傅里叶逆变换表为

$$\begin{aligned}
 & h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) \\
 &= \frac{\alpha\Delta x\beta\Delta y}{(\lambda B)^2} \exp\left\{-j\frac{k}{2B}A[(x_i^2 + y_i^2) - (\xi^2 + \eta^2)]\right\} \\
 &\quad \times F^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{x}{N\Delta x}, \frac{y}{M\Delta y}\right)\right. \\
 &\quad \left.\times \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y}\right)\right\}_{f_x = \frac{x_i - \xi}{\lambda B}, f_y = \frac{y_i - \eta}{\lambda B}}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

利用矩形函数及梳状函数的傅里叶变换性质得

$$h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{M\alpha\Delta x^3 N\beta\Delta y^3}{(\lambda B)^2} \\
 &\quad \times \exp\left\{-j\frac{k}{2B}A[(x_i^2 + y_i^2) - (\xi^2 + \eta^2)]\right\} \\
 &\quad \times \text{sinc}\left(N\Delta x\frac{x_i - \xi}{\lambda B}\right) \text{sinc}\left(M\Delta y\frac{y_i - \eta}{\lambda B}\right) \\
 &\quad * \text{comb}\left(\Delta x\frac{x_i - \xi}{\lambda B}, \Delta y\frac{y_i - \eta}{\lambda B}\right), \quad (17)
 \end{aligned}$$

上式中, 梳状函数与其余项卷积运算的结果形成的重建场是  $x$  方向及  $y$  方向的周期分别是  $\frac{\lambda B}{\Delta x}$  及  $\frac{\lambda B}{\Delta y}$  的周期函数, 若重建场尺寸限制在这个二维周期内, 则有

$$\begin{aligned}
 & h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) \\
 &= \frac{M\alpha\Delta x^3 N\beta\Delta y^3}{(\lambda B)^2} \\
 &\quad \times \exp\left\{-j\frac{k}{2B}A[(x_i^2 + y_i^2) - (\xi^2 + \eta^2)]\right\} \\
 &\quad \times \text{sinc}\left(N\Delta x\frac{x_i - \xi}{\lambda B}\right) \text{sinc}\left(M\Delta y\frac{y_i - \eta}{\lambda B}\right). \quad (18)
 \end{aligned}$$

至此, 导出了  $B \neq 0$  时系统的脉冲响应.

将 (18) 式与文献 [12] 的 (10) 式比较可以看出, 两式所得到的结论是相似的, 均能较好地表述 CCD 在像平面附近的重建场质量. 但是, 文献 [12] 的 (10) 式是在填充因子为 1 的前提下得到的 [5], 不能反映填充因子对重建像的影响. 利用简化模型进行的数学推导相对简单, 获得的 (18) 式还能较好地体现像素尺寸或填充因子对光能流的吸收作用.

利用 (18) 式, 若物平面光波场为  $O_0(\xi, \eta)$ , 重构场由下叠加积分确定:

$$\begin{aligned}
 & O(x_i, y_i) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O_0(\xi, \eta) h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) d\xi d\eta \\
 &= \frac{M\alpha\Delta x^3 N\beta\Delta y^3}{(\lambda B)^2} \exp\left[-j\frac{k}{2B}A(x_i^2 + y_i^2)\right] \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O_0(\xi, \eta) \exp\left[j\frac{k}{2B}A(\xi^2 + \eta^2)\right] \\
 &\quad \times \text{sinc}\left[N\Delta x\left(\frac{x_i - \xi}{\lambda B}\right)\right] \\
 &\quad \times \text{sinc}\left[M\Delta y\left(\frac{y_i - \eta}{\lambda B}\right)\right] d\xi d\eta, \quad (19)
 \end{aligned}$$

可以看出, 将物平面光波场  $O_0(\xi, \eta)$  视为输入信号, 波前重建对应的系统并不是一个线性空间不变系统. 然而, 如果只对重建图像的强度分布感兴趣, 将  $O_0(\xi, \eta) \exp\left[j\frac{k}{2B}A(\xi^2 + \eta^2)\right]$  视为输入信

号,  $O(x_i, y_i)$  视为输出信号, 图 5 所示数字全息波前重建系统是一个二维线性空间不变系统. 脉冲响应是

$$h(\xi, \eta) = \frac{M\alpha\Delta x^3 N\beta\Delta y^3}{(\lambda B)^2} \text{sinc} \left[ N\Delta x \left( \frac{\xi}{\lambda B} \right) \right] \times \text{sinc} \left[ M\Delta y \left( \frac{\eta}{\lambda B} \right) \right]. \quad (20)$$

由于  $\delta$  函数可以表示为  $\delta(x, y) = \lim_{P, Q \rightarrow \infty} PQ^2 \text{sinc}(Px) \text{sinc}(Qy)$  [17], (20) 式表明, 尽管  $N\Delta x$  及  $M\Delta y$  是有限值, 当  $B$  趋于 0 时,  $h(\xi, \eta)$  趋于  $\alpha\Delta x^2 \beta\Delta y^2 \delta(\xi, \eta)$ . 由于  $B = 0$  对应于 CCD 平面是物平面的像平面情况, 按照这个结论, 将 CCD 探测器置于物体的像平面附近可以重建较理想的像光场.

以上讨论的实验证明参见文献 [12]. 由于光波通过距离  $d$  的空间衍射等效于光波穿过矩阵元素  $A = 1, B = d, C = 0, D = 1$  的光学系统的衍射, 因此, 以上研究也适用于物平面到 CCD 平面间无光束变换系统的情况.

## 4 讨论

将简化模型 (4) 式与 Thomas 模型 (2) 比较可以看出, 从形式上看, (4) 式虽然视可以为 Thomas 模型 (2) 的一种简化, 但像素窗口  $\text{rect} \left( \frac{x}{\alpha\Delta x}, \frac{y}{\beta\Delta y} \right)$  近似为  $\alpha\Delta x\beta\Delta y\delta(x, y)$  后, 客观上弥补了 Thomas 模型未进行干涉场强度离散取样的缺陷, 经过这种简化的 Thomas 模型已经能够较好地表示数字全息图的物理内容.

从较严格的理论意义而言, 基于国承山模型进行研究是必要的. 但是, 研究结果通常是较难分析物理意义而需要数值求解的表达式. 例如, 将参考

光假定为沿光轴传播的单位振幅平面波, 文献 [7] 对像素填充因子的影响进行了数值分析. 然而, 在任意给定参考光的情况下, 我们曾试图导出物光通过光学系统到达 CCD 情况下重建物光场的脉冲响应, 这时用共轭参考光照射全息图后, 透射光变为

$$I_\delta(x, y; \xi, \eta) = I_{\text{Guo}}(x, y; \xi, \eta) R^*(x, y), \quad (21)$$

由于式中

$$I_{\text{Guo}}(x, y; \xi, \eta) = \text{rect} \left( \frac{x}{N\Delta x}, \frac{y}{M\Delta y} \right) \text{comb} \left( \frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y} \right) \times \left[ I(x, y) * \text{rect} \left( \frac{x}{\alpha\Delta x}, \frac{y}{\beta\Delta y} \right) \right]. \quad (22)$$

为获得脉冲响应, 需要从 (21) 式中分离出透射光的物光项, 代入 (15) 式进行讨论. 由于不能整理出透射光的物光项的简明表达式, 即便给定参考光表达式及像素填充因子的值, 用计算机进行数值分析也十分困难. 回顾本文用简化模型获得的 (12) 及 (18) 式不难看出, 基于简化模型能简明地导出具有清晰的物理意义并能指导实验研究的表达式.

综上所述, 将两种模型按 (4) 式进行简化后, 能够足够准确地为数字全息应用研究提供一个便捷的途径.

## 5 结论

本文基于对两种有代表性的数字全息图模型的研究, 在 CCD 能够记录的频率范围内将两种模型简化为同一数学表达式. 简化后的模型具有清晰的物理意义, 可以足够准确而方便地处理实际问题. 作为应用研究实例, 导出了能体现 CCD 像素填充因子影响及采样效应的数字全息重建波前表达式.

[1] Goodman J W, Lawrence R W 1967 *Appl. Phys. Lett.* **11** 77  
 [2] Huang T 1971 *Proc. IEEE* **159** 1335  
 [3] Zhang T, Yamaguchi I 1998 *Opt. Lett.* **23** 1221  
 [4] Seebacher S, Osten W, Baumbach T, Juptner W 2001 *Opt. Lasers Eng.* **36** 103  
 [5] Thomas K 2002 *Opt. Eng.* **41** 771  
 [6] Thomas K 2002 *Opt. Eng.* **41** 1829  
 [7] Guo C S, Zhang L, Rong Z Y, Wang H T 2003 *Opt. Eng.* **42** 2768  
 [8] Thomas K 2003 *Opt. Eng.* **42** 2772  
 [9] Thomas K 2004 *Handbook of Holographic Interferometry Optical and Digital Methods* (Weinheim: Wiley-VCH) p141  
 [10] Qian X F, Zhang L, Dong K P 2006 *Acta Photon. Sin.* **35** 1565 (in

Chinese) [钱晓凡, 张磊, 董可平 2006 光子学报 **35** 1565]  
 [11] Picart P, Leval J 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 1744  
 [12] Li J C, Zhang Y P, Xu W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5385 (in Chinese) [李俊昌, 张亚萍, 许尉 2009 物理学报 **58** 5385]  
 [13] Lü Q N, Chen Y L, Yuan R, Ge B Z, Gao Y, Zhang Y M 2009 *Appl. Opt.* **48** 7000  
 [14] Zhou W J, Hu W T, Guo L, Xu Q S, Yu Y J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8499 (in Chinese) [周文静, 胡文涛, 郭路, 徐强胜, 于灏洁 2010 物理学报, **59** 8499]  
 [15] Hu H F, Wang X L, Guo W G, Zhai H C, Wang P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 017901 (in Chinese) [胡浩丰, 王晓雷, 郭文刚, 翟宏琛, 王攀 2011 物理学报 **60** 017901]

- [16] Gao P, Yao B L, Min J W, Guo R L, Ma B H, Zheng J J, Lei M, Yan S H, Dan D, Ye T 2012 *Opt. Lett.* **37** 3630
- [17] Goodman J W 2006 *An Introduction to Fourier Optics* (3rd Ed.) (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) pp12, 99, 141 (in Chinese) [Goodman J W 2006 傅里叶光学导论 (第三版)(中译本)(北京: 电子工业出版社) 第 12, 99, 141 页]
- [18] Gonzalez R C, Richard E W, Steven L E 2005 *Digital Image Processing Using MATLAB* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) pp239–246 (in Chinese) [冈萨雷斯, 数字图像处理 (MATLAB 版) (中译本) (北京: 电子工业出版社, 第 239—246 页)]
- [19] Picart P, Moisson E, Mounier D 2003 *Appl. Opt.* **42** 1947
- [20] Collins S A 1970 *J. Opt. Soc. Am.* **60** 1168

## Simplified sampling models for digital hologram\*

Li Jun-Chang<sup>†</sup> Lou Yu-Li Gui Jin-Bin Peng Zu-Jie Song Qing-He

(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

(Received 22 October 2012; revised manuscript received 6 March 2013)

### Abstract

There are two sampling models of digital hologram in digital holographic research. The complex mathematical operation is involved in these two models, thereby leading to different results frequently and inconvenient theoretical analysis and practical application. Based on the analysis of physical processes in recording digital hologram and the study on geometry structure of CCD detector, the two sampling models are simplified into the same mathematical expression in this paper. Through studying the simplified model with cosine series expansion of digital hologram and sampling theorem, it is shown that the model has clear physical meanings and can be used for application study conveniently. Using the simplified model, we study digital holographic recording system with optical system and exact wavefront reconstruction expression verified in experiment.

**Keywords:** digital holography, wavefront reconstruction, optical coherence imaging

**PACS:** 42.40.–i, 42.40.Eq, 42.40.Jv

**DOI:** 10.7498/aps.62.124203

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60977007).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: jcli@vip.163.com