

基于不可压缩光滑粒子动力学的黏性液滴 变形过程仿真*

邱流潮†

(中国农业大学应用力学系, 北京 100083)

(2013年1月22日收到; 2013年2月22日收到修改稿)

应用基于投影算法的不可压缩光滑粒子动力学 (incompressible smoothed particle hydrodynamics, ISPH) 法对黏性液滴变形过程进行了数值仿真. 对于张力失稳导致的粒子非物理簇集问题, 采用粒子移位技术加以解决. 为了验证本文 ISPH 算法的精度和稳定性, 分别模拟了圆形黏性液滴的拉伸变形过程以及方形液滴的旋转变形过程, 得到了不同时刻液滴内部的压力变化特征, 准确地捕捉了液滴自由面演化过程, 并将数值计算结果与文献中的解析解进行了比较. 分析结果表明, 基于投影算法的不可压缩光滑粒子动力学方法结合粒子移位技术, 能够有效地模拟黏性液滴变形过程, 可以得到精确和稳定的结果.

关键词: 不可压缩光滑粒子动力学, 黏性液滴, 自由面流动, 数值仿真

PACS: 47.11.-j, 07.05.Tp, 47.85.-g

DOI: 10.7498/aps.62.124702

1 引言

光滑粒子动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 方法最初源于天体物理问题中的星球碰撞计算^[1,2]. SPH 作为一种纯拉格朗日无网格粒子方法, 非常适合模拟涉及自由表面、运动界面以及变形边界的复杂流动问题. 当 SPH 用于模拟具有自由表面的不可压缩流体时, 最常用的方法有两种: 一种是弱可压缩光滑粒子动力学 (weakly compressible smoothed particle hydrodynamics, WCSPH), 这种方法采用人工压缩性来模拟不可压缩流体, 即压力和密度之间采用刚性状态方程联系起来, 并假设一个足够小的马赫数以保证密度的变化不超过 1%^[3]. Monaghan^[3] 最先将这种方法成功用于求解不可压缩自由面流动问题. 随后这种方法被广泛用于分析涉及自由表面的不可压缩流动, 如 Qiu^[4] 应用弱可压缩光滑粒子动力学对滑坡产生涌浪进行

了数值模拟, 蒋涛等^[5] 基于 WCSPH 方法研究了黏性液滴形变自由表面问题, 马理强等^[6] 应用 WCSPH 方法对液滴冲击液膜问题进行了数值模拟. 另一种方法称作不可压缩光滑粒子动力学 (ISPH) 法^[7]. 这种方法直接求解不可压缩 N-S 方程, 压力通过泊松方程求得. ISPH 法在不可压缩自由面流动问题的模拟方面已有不少应用, 如 Shao 和 Lo^[8] 采用 ISPH 法分析了涉及自由表面的牛顿流体及非牛顿流体运动. WCSPH 方法在计算不可压缩流时由于时间步长受声速的限制导致计算效率不高, 同时压力计算精度也较低. Lee 等^[9] 研究指出 ISPH 算法在稳定性、计算精度、计算效率、压力值求解等方面均优于传统 WCSPH 方法. 本文采用基于投影算法的不可压缩光滑粒子流体动力学模拟黏性液滴的变形过程及其水动力特性, 并采用粒子移位技术解决由于张力失稳导致的粒子非物理簇集问题.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11172321) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: 2011J5047) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: qiuliuchao@cau.edu.cn

2 数值方法

2.1 控制方程

不可压缩流体 Lagrange 形式的控制方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad (2)$$

式中 \mathbf{u} 为速度矢量, p 为压力, \mathbf{g} 为重力加速度, μ 为动力黏性, ρ 为密度.

2.2 投影算法

本文采用与 Cummins 和 Rudman^[7] 相似的投射算法求解. 该算法时间积分为一阶精度, 计算中粒子密度和质量保持不变. 在投射算法预测步, 不考虑压力梯度的影响, 故在该步, 流体计算不满足不可压缩条件; 在校正步, 利用不可压缩条件建立的压力泊松方程求解压力值. 具体算法如下.

1) 将粒子 a 在时间步 n 的位置 \mathbf{r}_a^n 由速度 \mathbf{u}_a^n 对流致中间临时位置

$$\mathbf{r}_a^* = \mathbf{r}_a^n + \Delta t \mathbf{u}_a^n, \quad (3)$$

2) 在不考虑压力梯度的影响下, 由动量方程求得粒子 a 在位置 \mathbf{r}_a^* 处的中间临时速度

$$\mathbf{u}_a^* = \mathbf{u}_a^n + \Delta t \left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}_a^n + \mathbf{g} \right); \quad (4)$$

3) 在时间步 $n+1$, 压力通过求解下面的泊松方程得到

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right)_a = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}_a^*; \quad (5)$$

4) 对粒子在时间步 $n+1$ 的速度和位置进行更新

$$\mathbf{u}_a^{n+1} = \mathbf{u}_a^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p_a^{n+1}, \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_a^{n+1} = \mathbf{r}_a^n + \Delta t \left(\frac{\mathbf{u}_a^{n+1} + \mathbf{u}_a^n}{2} \right); \quad (7)$$

5) 重复执行 1)–4) 步, 直至计算结束.

2.3 ISPH 公式

2.3.1 核函数

SPH 法的核心思想是通过核函数进行积分插值, 因而核函数的选取十分关键. 本文采用 Mon-

aghan 和 Lattanzio^[10] 建议的核函数

$$W(r_{ab}, h) = \gamma \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & (0 \leq q < 1) \\ \frac{1}{4}(2-q)^3 & (1 \leq q \leq 2), \\ 0 & q > 2 \end{cases} \quad (8)$$

其中, h 为光滑长度, $r_{ab} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$ 表示粒子 a 与 b 之间的距离, $q = r_{ab}/h$, 二维情况下 $\gamma = 10/7\pi h^2$, 三维情况下 $\gamma = 1/\pi h^3$.

2.3.2 SPH 离散

在基于投影算法的 ISPH 中, 需要用到几个算子的 SPH 离散格式, 包括梯度、散度, 以及拉普拉斯算子. 本文采用与文献 [8, 11] 相同的算子离散公式

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right)_a = \sum_b m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab}, \quad (9)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})_a = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_a) \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} \right)_a \\ &= \sum_b \frac{4m_b(\mu_a + \mu_b)(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\rho_b + \rho_b)^2(r_{ab}^2 + 0.01h^2)} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right)_a \\ &= \sum_b m_b \frac{8}{(\rho_a + \rho_b)^2} \frac{(p_a - p_b)(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}}{(r_{ab}^2 + 0.01h^2)}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\nabla_a W_{ab} = \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b}{r_{ab}} \frac{\partial W_{ab}}{\partial r_{ab}}$ 为核函数梯度.

由于本文计算中粒子的密度假设为常数, 根据上述算子表达式, 于是可得 (4)–(6) 式的 SPH 离散式如下

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a^* &= \mathbf{u}_a^n + \Delta t \left(\sum_b \frac{2V_b \mu (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}}{(r_{ab}^2 + 0.01h^2)} \right. \\ & \quad \left. \times (\mathbf{u}_a^n - \mathbf{u}_b^n) + \mathbf{g} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_b 2 \frac{V_b}{\rho} \frac{(p_a^{n+1} - p_b^{n+1})(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}}{(r_{ab}^2 + 0.01h^2)} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_b V_b (\mathbf{u}_b^* - \mathbf{u}_a^*) \cdot \nabla_a W_{ab}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_a^{n+1} = \mathbf{u}_a^* - \frac{\Delta t}{\rho} \sum_b V_b (p_a^{n+1} + p_b^{n+1}) \nabla_a W_{ab}, \quad (15)$$

其中 V_b 表示粒子 b 的体积. 本文采用 Bi-CGSTAB^[12] 迭代法求解泊松方程 (14) 式, 并取 10^{-3} 作为收敛判据.

2.4 边界条件

2.4.1 自由面边界

本文采用与文献 [13] 相似的方法处理自由面边界. 这种方法首先识别自由面边界上的粒子, 然后将这些粒子的压力设为零. 自由面边界上的粒子是通过下式来识别的

$$(\nabla \cdot \mathbf{r})_a = \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (16)$$

对于没有被截断的核支持域, (16) 式的值在二维条件下应等于 2, 三维条件下应等于 3. 而与接近自由表面的粒子对应的值应小于这些数. 本文二维分析中识别自由表面粒子的判据取 1.5.

2.4.2 固壁边界

当本文方法用于分析涉及固壁边界的流动问题时, 采用镜像粒子法 [14] 模拟固壁边界. 在每个时间步, 距离边界一个光滑长度内的流体粒子以边界为对称面生成相应的镜像虚粒子, 这些虚粒子与对应流体粒子具有相同的密度与压力, 速度大小相同, 方向相反, 以满足壁面无滑移条件. 对于靠近拐角处的流体粒子, 该粒子除了在两个边上有镜像虚粒子外, 还会以拐角对称生成一个镜像虚粒子, 速度和压力的设置方法与前述方法相同.

2.5 时间积分步长

本文不可压缩光滑粒子动力学法, 除求解压力的泊松方程为隐式积分外, 其他均为显式方法. 为了得到稳定和精确的解, 时间积分步长应满足下面两方面的约束条件 [8]:

$$\Delta t_c \leq \alpha_c \frac{h}{u_{\max}}, \quad (17)$$

$$\Delta t_d \leq \alpha_d \frac{\rho h^2}{\mu}, \quad (18)$$

其中, α_c 和 α_d 为常数, 本文均取 0.2. u_{\max} 为流体粒子最大速度. 显然, 时间步长应同时满足上述两个条件, 于是最终时间步长取二者中的最小值

$$\Delta t = \min(\Delta t_c, \Delta t_d). \quad (19)$$

2.6 张力失稳处理方法

Monaghan [15] 指出: 在 SPH 模拟流体的大变形问题中, 张力失稳会导致粒子非物理簇集现象, 从而产生较大误差甚至错误的结果. 目前, 解决张力

失稳的方法有很多, 如 Monaghan [15] 在压力项中引入额外的人工应力来克服粒子簇集现象, 蒋涛等 [5] 采用变光滑步长法, Xu [16] 引入粒子移位 (particle shifting) 技术处理粒子簇集问题. 本文采用与文献 [16] 相同的方法解决张力失稳引起的粒子非物理簇集现象. 这种方法根据一定的频率 (本文算例为每个时步一次) 对每个粒子的位置进行轻微的调整, 以保持粒子正常分布. 每个粒子 a 的位置按下式进行移位

$$\delta \mathbf{r}_a = C \Delta t u_{\max} \mathbf{R}_a, \quad (20)$$

其中, C 为 0.01—0.1 范围内的常数, 本文取 0.02, 移位向量 \mathbf{R}_a 为

$$\mathbf{R}_a = \sum_{b=1}^{M_a} \frac{\bar{r}_a^2}{r_{ab}^2} \mathbf{n}_{ab}, \quad (21)$$

式中, M_a 中表示粒子 a 最近邻域内的粒子数, \mathbf{n}_{ab} 表示粒子之间的距离向量, \bar{r}_a 表示粒子 a 最近邻域内的平均粒子间距, $\bar{r}_a = \frac{1}{M_a} \sum_{b=1}^{M_a} r_{ab}$.

3 数值算例与结果分析

3.1 圆形液滴拉伸变形

为了验证本文方法的精度及稳定性, 这里首先模拟一个初始为圆形的黏性液滴拉伸情况下的变形过程. 之所以选取这个算例, 是因为文献 [17] 中有现成的解析解可用于比较. 本文计算中, 液体的动力黏性 $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}^{-1}$, 密度 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$. 初始时液滴的半径 $R = 1 \text{ m}$. 液滴没有任何外力, 只有初始速度场 $u_0^x = -100x$, $u_0^y = -100y$ 以及初始压力场 $p_0 = 50\rho[R^2 - (x^2 + y^2)]$, 这里 x, y 为坐标值, 开始时液滴的圆心坐标为 $(x = 0, y = 0)$. 圆形液滴在拉伸作用下呈椭圆形, 椭圆的长、短半轴长度分别用 A 和 B 表示.

本文计算中光滑长度 h 保持不变, 且设为粒子初始间距 Δd 的 1.5 倍, 即 $h = 1.5\Delta d$. 时间积分步长 $\Delta t = 2 \times 10^{-5} \text{ s}$. 为了进行收敛分析, 分别计算了两种不同初始粒子间距: $\Delta d = 0.04 \text{ m}$ 和 $\Delta d = 0.02 \text{ m}$, 对应的 SPH 粒子数分别为 1976 和 7860. 计算结果表明 7860 个粒子可以得到收敛结果, 所以后面若没有特别说明, 给出的结果均为 $\Delta d = 0.02 \text{ m}$ 的结果. 图 1 给出了液滴在拉伸状态下不同时刻对应的

粒子分布情况, 图中的等值线表示压力分布情况. 图 2 给出变形过程中椭圆形液滴短半轴长度 B 随时间变化的数值结果与文献 [17] 中解析解的比较.

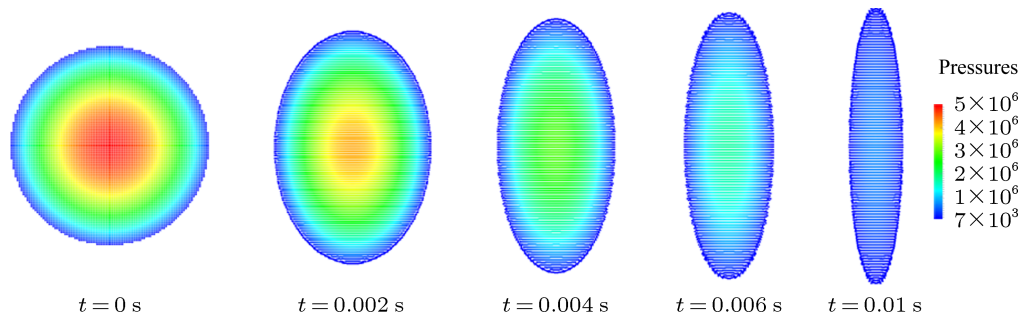


图 1 液滴拉伸状态下不同时刻对应的粒子分布情况 (等值线表示压力分布)

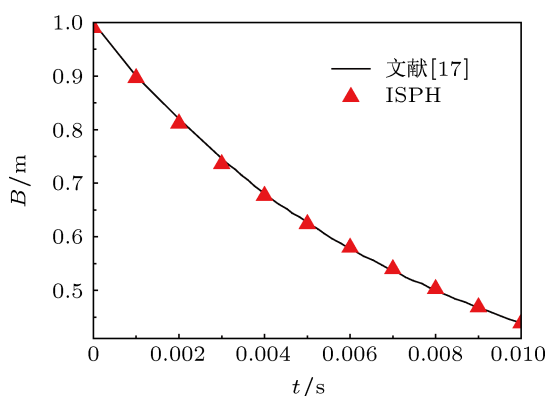


图 2 椭圆液滴短半轴长度 B 随时间变化

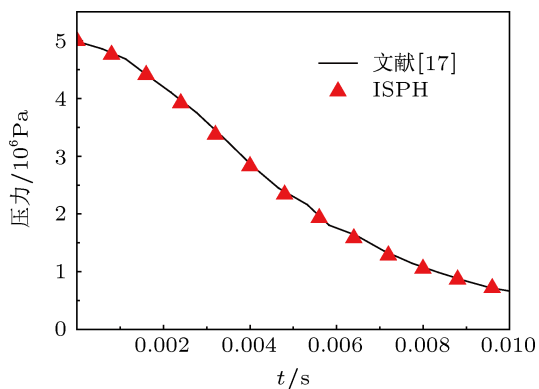


图 3 椭圆中心位置压力随时间变化

3.2 方形液滴旋转变形

这里对方形液滴旋转变形过程进行模拟. 一个边长 1 m 的方形黏性液滴在初始速度场 $u_0^x = \omega y$, $u_0^y = -\omega x$ 作用下产生自由变形. 这里 x, y 为坐标值, 开始时液滴的中心坐标为 $(x = 0, y = 0)$, ω 表

图 3 给出变形过程中椭圆中心位置压力随时间变化的数值结果与文献 [17] 中解析解的对比. 比较结果表明本文方法能得到精确和稳定的结果.

示任意角速度. 本文计算中, 初始压力场设为零, $\omega = 100$, 液体的动力黏性 $\mu = 1000 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{-1}$, 密度 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$. 该问题在文献 [17] 中已有研究过. 这是一个具有挑战性的数值模拟问题, 因为在变形过程中可能会出现张力失稳而产生粒子非物理簇集现象, 本文采用粒子移位技术来解决该问题.

本文计算中光滑长度 h 保持不变, 且设为粒子初始间距 Δd 的 1.5 倍, 即 $h = 1.5\Delta d$. 初始粒子间距 $\Delta d = 0.02 \text{ m}$, 对应的 SPH 粒子数为 2500. 时间积分步长 $\Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$. 为了验证本文采用的粒子移位技术解决粒子非物理簇集是否有效, 这里分别模拟了两种工况, 一种采用粒子移位技术, 另一种不采用粒子移位技术. 图 4 给出了两种工况下, $t = 0.05 \text{ s}$ 时方形液滴粒子分布情况的比较. 从图中可以看出, 本文采用的粒子移位技术可以有效地解决粒子非物理簇集问题. 图 5 给出了采用了粒子移位技术后方方形液滴粒子不同时刻的分布情况. 结果表明本文方法模拟自由面黏性流动问题十分有效.

4 结论

本文采用基于投影算法的不可压缩光滑粒子动力学 (ISPH) 法对黏性液滴变形过程进行了数值模拟. 并采用了粒子移位技术解决由于张力失稳导致的粒子非物理簇集问题. 数值分析结果表明: 本文的 ISPH 方法能够准确地追踪黏性液滴自由面变形过程, 文中采用的粒子移位技术能很好地消除液滴大变形过程中的非物理簇集现象. 本文数值方法为研究黏性液滴变形问题提供了一个精确和稳定的数值方法.

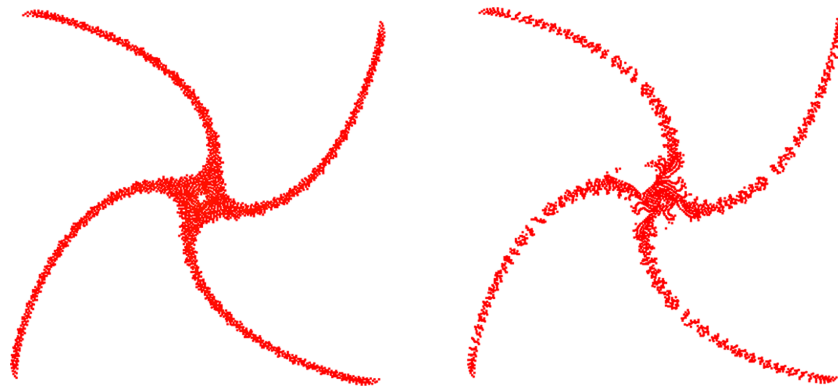


图4 $t = 0.05$ s 时方形液滴粒子分布情况 (左图为采用了粒子移位技术的结果)

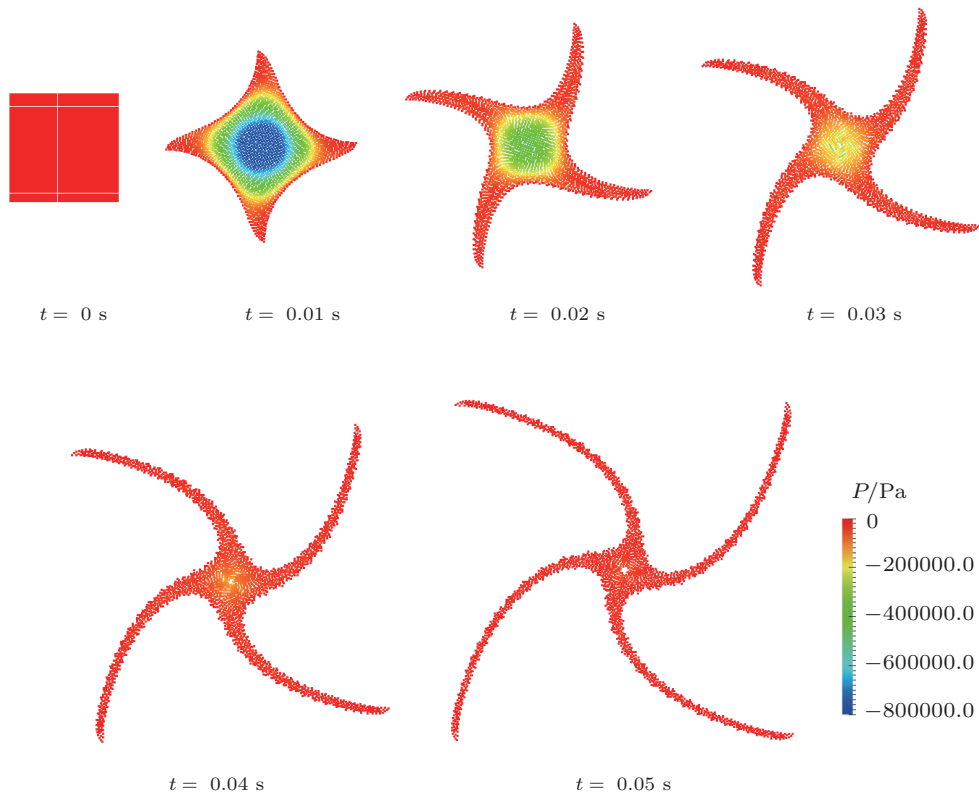


图5 方形液滴粒子不同时刻的分布情况 (等值线表示压力分布)

- [1] Lucy L 1977 *J. Astron.* **82** 12
- [2] Gingold R A, Monaghan J J 1977 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **181** 375
- [3] Monaghan J J 1994 *J. Comput. Phys.* **110** 339
- [4] Qiu L C 2008 *J. Hydraulic Eng. ASCE* **134** 5
- [5] Jiang T, Ouyang J, Zhao X K, Ren J L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 054701 (in Chinese) [蒋涛, 欧阳洁, 赵晓凯, 任金莲 2011 物理学报 **60** 054701]
- [6] Ma L Q, Liu M B, Chang J Z, Su T X, Liu H T 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 244701 (in Chinese) [马理强, 刘谋斌, 常建忠, 苏铁熊, 刘汉涛 2012 物理学报 **61** 244701]
- [7] Cummins S J, Rudman M 1999 *J. Comput. Phys.* **152** 2
- [8] Shao S and Lo E Y M 2003 *Advances in Water Resources* **26** 7
- [9] Lee E S, Moulinec C, Xu R, Violeau D, Laurence D, Stansby P 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 8417
- [10] Monaghan J J, Lattanzio J 1985 *Astronomy and Astrophysics* **149** 135
- [11] Monaghan J J 1992 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **30** 543

- [12] Van Der Vorst H A 1992 *S. J. Sci. Stat. Comput.* **13** 631
[13] Monaghan J J 1989 *J. Comput. Phys.* **82** 1
[14] Morris J P, Fox P J, Zhu Y 1997 *J. Comput. Phys.* **136** 214
[15] Monaghan J J 2000 *J. Comput. Phys.* **159** 290

- [16] Xu R 2009 *Ph. D. Dissertation* (Manchester: University of Manchester)
[17] Colagrossi A 2005 *Ph. D. Dissertation* (Roma: Università di Roma La Sapienza)

Numerical simulation of deformation process of viscous liquid drop based on the incompressible smoothed particle hydrodynamics*

Qiu Liu-Chao[†]

(Department of Applied Mechanics, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

(Received 22 January 2013; revised manuscript received 22 February 2013)

Abstract

A projection-based incompressible smooth particle hydrodynamics (ISPH) is applied to the simulation of the deformation process of viscous liquid drop. In our numerical computation, the particle shifting technique is used to overcome particle clustering due to the tensile instability in SPH. In order to verify the proposed ISPH, numerical simulations of a viscous circle drop stretching and a viscous square drop rotating are carried out. The pressure distribution in the drop is obtained, and the deformation process of viscous liquid drop is correctly captured. Comparisons between numerical results and the analytical solutions in the literature are presented. The simulation results show that the projection-based ISPH with particle shifting technique can be used to simulate the deformation process of viscous liquid drop with stability and accuracy.

Keywords: incompressible smooth particle hydrodynamics, viscous liquid drop, free-surface flows, numerical simulation

PACS: 47.11.-j, 07.05.Tp, 47.85.-g

DOI: 10.7498/aps.62.124702

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11172321) and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. 2011JS047).

[†] Corresponding author. E-mail: qiuliuchao@cau.edu.cn