

试用 Lyapunov 指数探讨气候突变及其前兆信号*

吴浩^{1)†} 侯威²⁾ 王文祥¹⁾ 颜鹏程³⁾

1) (扬州大学物理科学与技术学院, 扬州 225002)

2) (国家气候中心, 北京 100081)

3) (西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2013年1月16日收到; 2013年2月18日收到修改稿)

Lyapunov 指数是标志一个系统做规则运动还是混沌运动的一个重要物理量. 鉴于此, 本文利用 Lyapunov 指数研究系统的混沌特性, 研究气候的突变. 计算结果表明, 定义法求得的 Lyapunov 指数是一种可靠的突变检测方法, 无论是理想序列还是实际存在突变的序列, 利用该方法都能准确地找出突变位置; 而利用非线性局部 Lyapunov 指数的可预报期限从理论上佐证了基于临界慢化现象的气候突变前兆信号的可靠性, 通过计算各个时间段的最大 Lyapunov 指数能够反映系统的内在性质、研究其混沌特性. 研究结果为该方法在实际观测资料中的广泛应用提供了理论基础.

关键词: Lyapunov 指数, 气候突变, 前兆信号

PACS: 92.70.Aa

DOI: 10.7498/aps.62.129204

1 引言

已有的研究^[1,2]表明, 气候系统的演化并不总是渐进的, 而是有可能在较短的时间内从一种相对稳定的状态跃变到另一种稳定的状态, 称为气候系统的突变. 气候系统是一个庞大的、耗散的混沌系统, 突变的产生具有很大的复杂性^[3-5], 怎样从过去的气候记录中检测气候突变, 对于预测未来的气候变化趋势有着非常重要的现实意义和科学价值^[2,6-8]. 已有学者对此做了大量卓有成效的工作, 传统的突变检测方法有^[9]: 滑动 t - 检验, Cramer 方法, Mann-Kendall 检验, Yamamoto 方法, Pettitt 方法, Lepage 法^[10]; 文献 [11—17] 引进并发展了很多突变检测新方法, 如条件熵、动力学相关因子指数 (Q 指数)、启发式分割算法 (BG 算法)、复杂度、幂律指数、高阶矩、排列熵、近似熵、滑动移除近似熵、滑动去趋势波动分析法、滑动移除去趋势波动分析法和滑动移除重标极差法等. 这些突变

检测新方法的出现在很大程度上丰富了突变检测的手段, 提供了突变检测的多种途径.

气候系统是一个复杂的非线性动力学系统^[5], 因此利用非线性动力学指数——Lyapunov 指数研究气候系统展示了其潜在的应用前景. 系统的 Lyapunov 指数可以用来判断系统是收敛的还是混沌的. 当系统的 Lyapunov 指数中至少有一个为正时, 系统是混沌的; 当系统的 Lyapunov 指数均为负数时, 系统是收敛的. 因此, Lyapunov 指数是标志一个系统做规则运动还是混沌运动的一个重要物理量. 文献 [18, 19] 利用非线性局部 Lyapunov 指数 (NLLE) 研究大气系统的可预报期限的工作为气候变化的研究提供了新思路. 相对于突变检测, 气候突变的前兆信号显得尤为重要^[20], 其作为一个非常值得深思的命题被提出来, 引起了众多的气象工作者的关注. 而气候系统在趋近于临界点、发生突变之前能否找到其前兆信号是当今气候预测的一个重要问题^[21,22]. 文献 [23—26] 将临界慢化理论引用至气候突变前兆信号的研究, 探讨了利用临界

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2012CB955902, 2013CB430204) 和国家自然科学基金 (批准号: 41175067, 41275074, 41105033) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wuhaophy@163.com

慢化现象研究气候突变前兆信号的可能性,研究了方法针对不同资料、不同区域的有效性和适用性,为更深层次了解气候突变、寻找气候突变前兆信号奠定了基础. 然而,针对临界点前后到底发生了什么变化,系统的内在性质如何变化以及从理论上解释前兆信号仍是一个亟需解决的问题.

鉴于此,本文基于 Lyapunov 指数对非线性理想时间序列以及太平洋年代际振荡指数资料进行了突变检测分析,进而利用非线性局部 Lyapunov 指数从理论上对突变前兆信号进行了解释,通过各个时间段的最大 Lyapunov 指数 (LLE) 反映突变前后、临界点的内在性质,最终实现了利用 Lyapunov 指数将突变检测及其前兆信号的工作进行联系. 计算结果表明,基于 Lyapunov 指数的突变检测方法无论是对理想时间序列还是实际气象序列,其检测效果都非常优越;而利用非线性局部 Lyapunov 指数的可预报期限从理论上佐证了基于临界慢化现象的气候突变前兆信号的可靠性,通过计算各个时间段的 LLE 能够反映系统的内在性质,研究其混沌特性. 本文的研究为该方法在实际观测资料中的广泛应用奠定了理论基础.

2 资料与方法

2.1 资料

本文所用资料为通过 Logistic 映射、Rand 函数构建的理想序列以及美国国家海洋与大气管理局 (NOAA) 网站公布的太平洋年代际振荡 (PDO) 指数的月资料 (1950 年 1 月—2010 年 12 月), 实际计算中以 1981—2010 年作为参考气候态, 原始观测资料与参考气候态的距平作为计算序列.

2.2 研究方法

2.2.1 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数^[27]是标志一个系统做规则运动还是混沌运动的一个重要物理量. Lyapunov 指数的定义式为

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{(x_0 + \varepsilon) - x_0} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|, \end{aligned} \quad (1)$$

$\lambda < 0$ 表示初值差异随迭代缩小, 对应一个稳定周期轨道; 当 $\lambda > 0$ 表示初值差异随迭代步数指数增

大, 对应一个混沌轨道; 当 $\lambda = 0$ 表示初值差异随迭代平均不变, 此时对应三种情况, 即准周期运动、轨道处在一个分岔点或保守面积映射的规则运动.

目前常用的计算混沌时间序列最大 Lyapunov 指数^[28]的方法主要有以下几种: 由定义法延伸的 Nicolis 方法、Jacobian 方法、Wolf 方法 (相空间重构方法)、P-范数方法、小数据量方法. 其中以 Wolf 方法和小数据量方法应用最为广泛, 也最为普遍.

在 (1) 式中当 N 极大时, $\frac{df^N(x_0)}{dx_0}$ 可以定义为函数 $f^N(x)$ 在 x_0 处的一阶导数. 因此, 在实际计算 Lyapunov 指数时, 问题便简化为求窗口大小数据拟合的直线的斜率, 本文使用最小二乘法对序列进行拟合求斜率.

2.2.2 非线性局部 Lyapunov 指数

如果忽略一些随机因素的影响, 大气系统可被认为是一个确定性的非线性系统. 陈宝花、李建平、丁瑞强等发展的非线性局部 Lyapunov 指数可以表征初始误差在有限时间内的局部平均增长率, 并且在大气系统可预报性方面做出了很好的工作, 得到了大气初始误差随时间的演化并确定了其最大可预报时间. 类似于文献 [19], 对于时间序列 $\{x(t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ (n 为时间序列的长度) 的非线性局部 Lyapunov 指数计算步骤如下.

1) 以 $x(t_1)$ 为参考点, 寻找与参考点 x 分量距离最近的点 (对应于 $x(t_1)$ 的分量为 $x'(t_1)$), 这样可以保证两状态是动力性质一致的. 两点的距离可以表示为

$$L(t_1) = |x(t_1) - x'(t_1)|. \quad (2)$$

2) 取演化步长 $T = 1$, 设在时间 $t_2 = t_1 + 1$, $x(t_1)$ 和 $x'(t_1)$ 分别演化到 $x(t_2)$ 和 $x'(t_2)$, 两点的距离为

$$L(t_2) = |x(t_2) - x'(t_2)|. \quad (3)$$

初始误差在时间 T 内的指数增长率为

$$\lambda_{T1} = \frac{1}{T} \ln \frac{L(t_2)}{L(t_1)}. \quad (4)$$

3) 以 $x(t_2)$ 为参考点重复 1), 2) 过程得到 λ_{T2} , 表示第二个参考点初始误差在时间 T 内的指数增长率. 将上述过程一致继续到 $x(t_i)$ 的终点, 得到每个参考点在 T 内的误差增长率 λ_{TK} . 最后取指数增长率的平均值作为演化步长为 T 的非线性局部 Lyapunov 指数均值的近似估计:

$$\bar{\lambda}(T) = \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N \lambda_{TK}, \quad (5)$$

这里 $N = n - T$.

4) 依次增加演化步长 T , 重复上面步骤, 得到 $\bar{\lambda}(T)$ 随演化步长 T 的变化关系.

5) 由 (4) 和 (5) 式可以求得相对误差经过 T 的平均增长

$$Err(T) = \lambda(T) \times T = \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N \frac{L'(t_K)}{L(t_0)}. \quad (6)$$

通过考察相对误差增长是否达到饱和来判断最大可预报时间的大小.

2.2.3 理想时间序列的构建

为了模拟气候系统的非线性特征, 类似于文献 [29] 构建了非线性理想时间序列 ISO, 序列总长为 $2N$, 前 N 个数据由 Logistic 映射产生, 后 N 个数据由正态分布的随机数模拟产生. 其 Logistic 方程如 (7) 式所示:

$$x_{n+1} = ux_n(1 - x_n) \quad x \in [0, 1], \quad (7)$$

在 (7) 式中, 初值 $x_0 = 0.8$, 参数 $u = 3.8$. 从该时间序列的构造过程来看, 两段子序列分别具有不同的

动力学特征, 在 $t = N + 1$, 序列由确定性模型 —— Logistic 方程转变成了随机行为, 即系统在该点发生了动力学结构突变. 由于 Lyapunov 指数能够反映系统做规则运动还是混沌运动, 若序列存在如上的动力学结构突变, 则通过序列的 Lyapunov 指数定能对这样的突变进行检测.

3 计算结果与讨论

3.1 基于 Lyapunov 指数的非线性理想时间序列的突变检测

图 1 为存在动力学结构突变的四条理想时间序列及其 Lyapunov 指数分布. 可以看出, 图 1(a1) 显示在 $t = 500$ 时出现动力学结构突变, 通过图 1(a2) 同样在 $t = 500$ 左右 (箭头标识位置) 时检测到这一次突变. 同理, 图 1 (b1), (b2), (c1), (c2), (d1), (d2) 同样能够得到类似的结论. 比较分析图 1 还可发现,

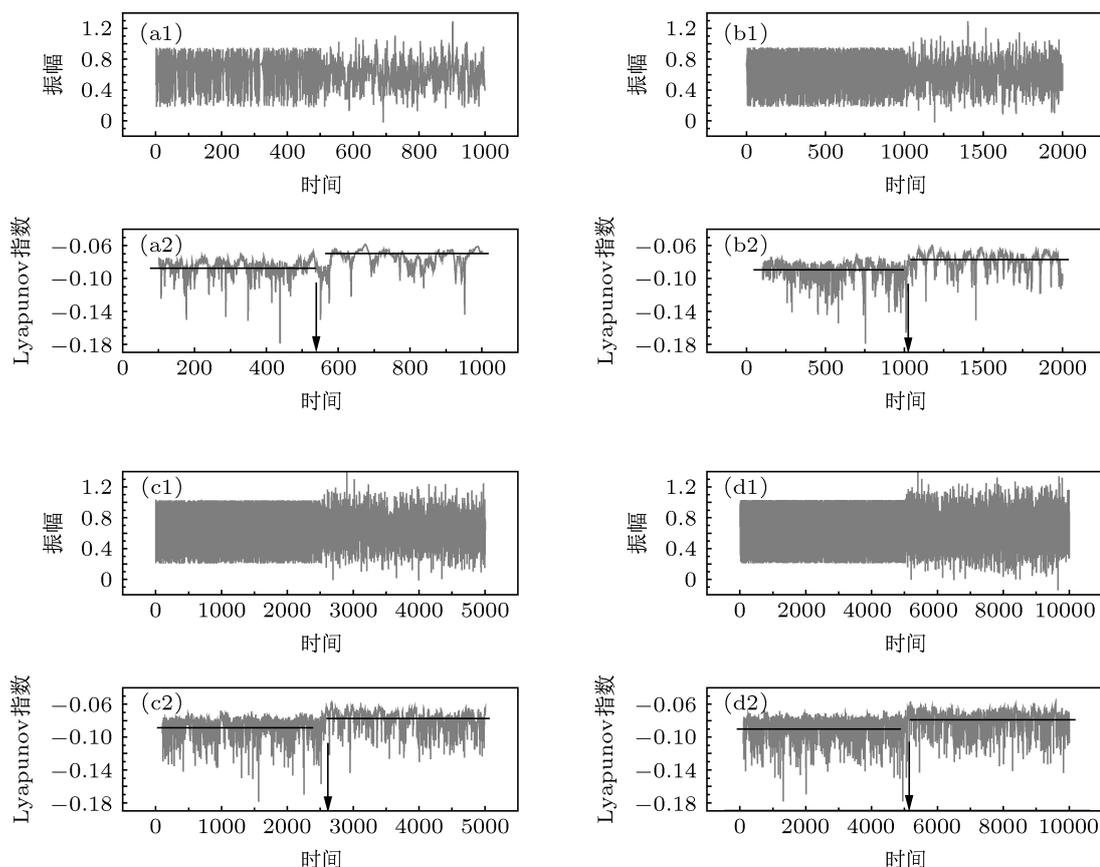


图 1 存在动力学结构突变的理想时间序列及其 Lyapunov 指数分布 (a1) 非线性时间序列 ISO 随时间的演变情况, 序列总长为 1000, 前 500 个数据由 Logistic 映射产生, 后 500 个数据由正态分布的随机数模拟产生; (a2) 序列 Lyapunov 指数突变检测; (b1), (b2), (c1), (c2), (d1), (d2) 分别表示时间序列长度为 2000, 5000, 10000, 说明同 (a1), (a2)

序列长度越长检测结果越稳定, 图 1 (d2) 的检测结果较图 1(a2) 稳定. 因此, 基于 Lyapunov 指数的突变检测方法是有效的.

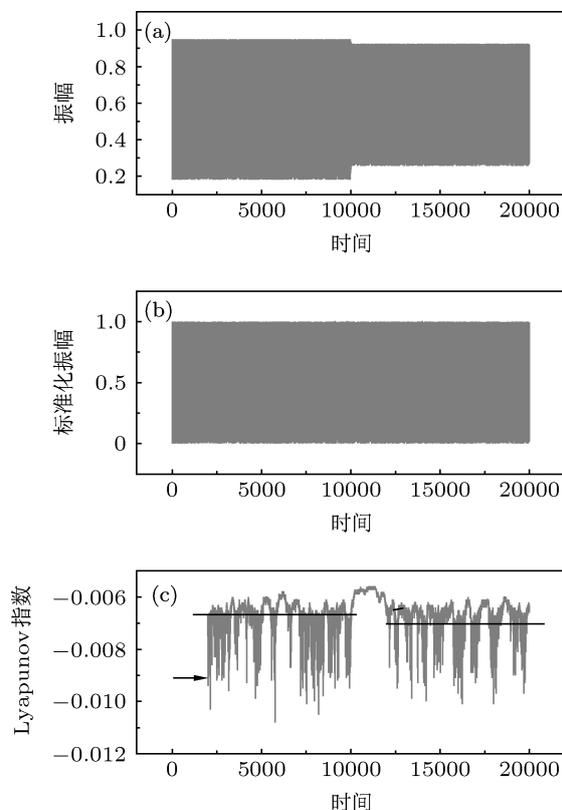


图 2 存在动力学结构突变的理想时间序列及其 Lyapunov 指数分布 (a) 非线性时间序列 ISO 随时间的演变情况, 序列总长为 20000, 当 $n = 10001$ 时 u 由 3.8 突然减小到 3.7, 序列存在突变 (由于数据量较大, 图中出现数据重叠现象); (b) 对 (a) 归一化之后的序列; (c), (b) 所对应序列的 Lyapunov 指数突变检测结果 (箭头标识长度为窗口长度)

假如从原始序列就能发现存在突变, 再利用 Lyapunov 指数突变检测方法来检测这个突变似乎有画蛇添足之嫌. 毕竟实际的突变时间序列都是无法从序列本身直接看出突变位置的, 为了更进一步说明该方法的适用性, 本文还将该突变检测的方法推广运用到不能从原始序列看出突变趋势的时间序列, 检测结果如图 2 所示. 其中图 2(a) 是原始时间序列, 由 Logistic 映射产生, 序列总长为 20000. 当 $n = 10001$ 时参数 u 由 3.8 突然减小到 3.7, 因此序列存在一次明显的理想突变. 显然图 2(a) 突变过于明显, 为了避免这一缺陷, 分别将突变前后的数据进行标准化, 即将变量值减去最小值, 然后除以极差 (最大值与最小值之差), 其分布如图 2(b) 所示. 图 2(c) 是图 2(b) 所示序列的 Lyapunov 指数突变检测. 分析图 2(c) 可知, 在 $n = 10001$ 时 Lyapunov 指数存在一次非常明显的跃变, 即能够清晰地检测出

类似图 2(b) 这样不能直接观察出来的突变. 通过图 1 和图 2 的分析可知, 基于 Lyapunov 指数的突变检测方法适用性很好, 检测效果优越.

3.2 基于 Lyapunov 指数的实际气象序列的突变检测

为了更进一步检验 Lyapunov 指数的突变检测方法的有效性和适用性, 本文将该方法运用到实际的气象序列中. PDO 指数在 1976 年存在一次冷暖相位的转变, 并且此次突变已经得到了大家的公认^[30,31].

图 3 所示为 PDO 指数资料的 Lyapunov 指数的突变检测结果. 从图 3 容易看出, PDO 序列的 Lyapunov 指数分布存在明显的两个状态, 在 1976/1977 年左右 (箭头指示位置为跃变位置) 存在一次跃变, 从一个稳定态过渡到另外一个稳定态. 因此, 基于 Lyapunov 指数的突变检测方法是非常有效的, 它不仅对理想的非线性时间序列检测有效, 而且对人们公认的突变检测效果也非常不错, 展示了其潜在的应用前景, 为其成为一种新的突变检测方法奠定了坚实的基础.

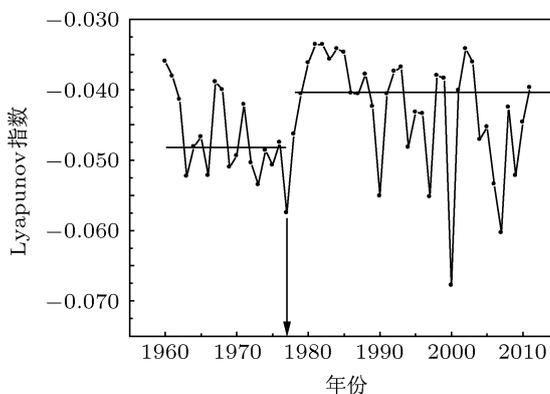


图 3 PDO 指数的 Lyapunov 指数的突变检测分布

3.3 基于 Lyapunov 指数的气候突变前兆信号的研究

大气系统是一个非线性的混沌系统, 本文利用 NLLE 对大气系统的突变前兆信号进行了讨论.

从图 5 可以获得以下信息: 1) PDO 系统是非线性的混沌系统, 因为图 5 中 PDO 指数的 NLLE 大于零 (当系统的 Lyapunov 指数中至少有一个为正或系统最大 Lyapunov 指数大于零时, 系统是混沌的^[27]); 2) PDO 系统的 NLLE 在第 80 个月左右趋于

稳定, 此时初始场、边界条件等信息丢失, 预报失去意义, 说明其最大可预报期限是 80 个月 (6 年半左右). PDO 系统是混沌的正好可以通过 Lyapunov 指数来分析, 80 个月是 PDO 系统的最大可预报性. 针对 PDO 序列, 通过前面 Lyapunov 指数的突变检测可以发现在 1976 年左右存在一次突变, 由图 4 的分析可知, 基于临界慢化现象的 PDO 突变前兆

信号在 1970 年左右, 即突变发生 6 年前出现前兆信号. 将图 4 和图 5 联系起来分析, 便能说明所找到的前兆信号是有理论依据的, 说明了其有效性和准确性. 因此, 非线性局部 Lyapunov 指数的可预报期限从理论上佐证了基于临界慢化现象的气候突变前兆信号的可靠性.

表 1 PDO 指数各个时间段的 LLE

时间/年	1951—2010	1951—1955	1956—1960	1961—1965	1966—1970	1971—1975	1976—1980
LLE	1.23	1.09	1.31	1.40	1.33	1.15	1.33
时间/年	1981—1985	1986—1990	1991—1995	1996—2000	2001—2005	2006—2010	
LLE	1.33	1.33	1.33	1.14	1.33	1.24	

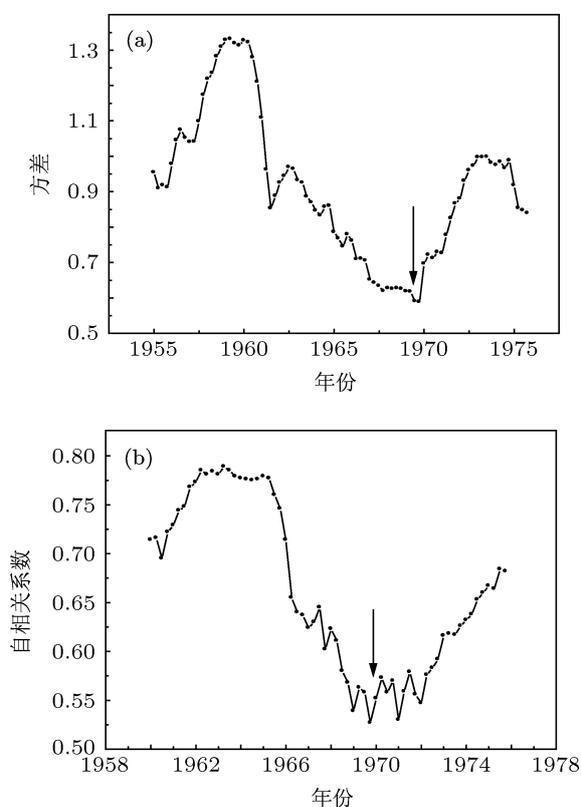


图 4 PDO 指数资料的突变前兆信号分布 (a) 方差信号; (b) 自相关系数信号 (根据参考文献 [24] 稍做修改)

表 1 所示为 PDO 指数序列各个时间段的 LLE. 序列长度选取 1951—2010 年的月数据, 共计 720 个数据, 这里的 LLE 由 Wolf 法求得. 其中 1951—2010 年得到的 LLE 为 1.23 定为总的 LLE, 后面分别求出各个时间分段的 LLE 并与总的 LLE 做比较. 各分段的 LLE 求法如下: 首先将 PDO 序列进行标准化 (原始数据减去均值, 然后除以方差); 利用随机函数产生 1000 组长度为 60 的随机数组, 并对这 1000 组随机数求平均, 得到一组长度为 60 的随

机数, 并将其标准化; 利用求得的随机数挨个取代标准化之后的 PDO 对应的各个时段 (取代 1951—1955, 1956—1960, ..., 2001—2005, 2006—2010), 利用 Wolf 求出替代之后序列的 LLE. 通过如此替代, 便能研究 PDO 序列各个时间段的混沌性质. LLE 反映系统的混沌性质, 指数值越大混沌性越强, 系统越随机. 从表 1 看出, 所有的 LLE 均大于零, 说明 PDO 系统是混沌系统.

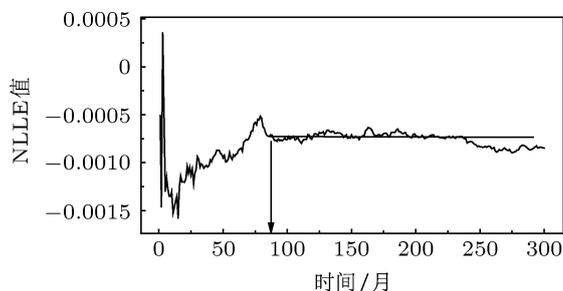


图 5 PDO 指数资料的 NLLLE (非线性局部 Lyapunov 指数) 随滞后时间的分布

图 6 所示为 PDO 指数资料各个时间段的 LLE 与总的 LLE 的差值分布. 从图 6 可以看出, 仅有 1951—1955, 1971—1975, 1996—2000 三个时间段的 LLE 较总的 LLE 小. 随机数组的替代使 LLE 变小了, 说明这三个时间段本身的混沌性是最强的. 从气候突变的定义出发, 气候突变是指气候从一种稳定态 (或稳定持续的变化趋势) 穿过临界阈值跳跃式地转变到另一种稳定态 (或稳定持续的变化趋势) 的现象 [1]. 结合图 3 和图 4 对 PDO 序列的突变以及突变前兆信号的分析, 突变前是一种稳定态, 因此其 LLE 相对较小, 序列的混沌性不明显; 当系统趋近临界阈值时, 系统混沌性非常的强, 分布具有很大的随机性, 因此出现类似 1971—1975 年这

样的 LLE 分布; 系统穿过临界阈值转换到另外的稳定态后, 系统再次趋于稳定, LLE 指数变小, 系统混沌性变弱. 因此, 从 LLE 的分布同样可以从理论上验证临界慢化现象作为突变前兆信号的有效性和可行性. 同理, 1951—1955 年以及 1996—2000 年出现 LLE 较大, 同样可以如此分析. 同样也有不少研究表明^[1,30], PDO 序列在 1960 年左右以及 2000 年左右是存在突变的, 考虑到资料长度以及距今时间, 这样两次突变没有形成共识. 通过表 1 以及图 6 的分析可以获知, PDO 系统突变前后系统内在混沌性质发生了很大的变化, 利用 LLE 从理论上可以验证基于临界慢化现象的气候突变前兆信号的有效性.

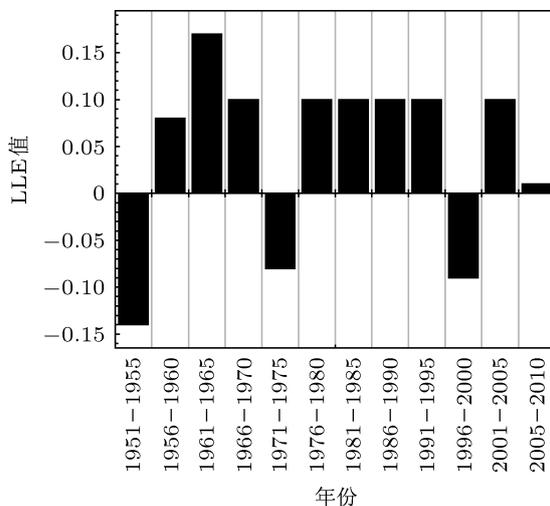


图 6 PDO 指数资料各个时间段的 LLE 与总的 LLE 的差值分布

4 结论

Lyapunov 指数是标志一个系统做规则运动还是混沌运动的一个重要物理量. 将 Lyapunov 指数用于理想时间序列以及 PDO 指数观测资料的研究, 不仅能加深对观测资料混沌信息的认识, 而且可对

异常可靠性的判断等提供新的方法.

本文从 Lyapunov 指数出发, 利用定义法求得 Lyapunov 指数并将其运用到突变检测中. 通过大量数值试验, 测试了该方法对存在明显突变趋势的非线性理想时间序列以及突变趋势不明显的动力结构突变序列的可行性和有效性. 同时, 基于 Lyapunov 指数的突变检测方法在 PDO 指数序列中的成功应用, 进一步为该方法在实际观测资料中的应用提供了实验基础, 展示了其对时间序列突变检测的广阔应用前景. 从非线性局部 Lyapunov 指数出发, 得到了大气系统的可预报期限, 佐证了基于临界慢化现象的气候突变前兆信号, 并通过 LLE 分析了系统各个时间段的内在混沌性质. PDO 指数序列检测结果表明, 80 个月的最大可预报期限佐证了基于临界慢化现象的气候突变前兆信号提前 6 年出现的正确性; 通过对各个时间段 LLE 的计算表明, PDO 系统是一个混沌系统, 系统处于临界阈值阶段时其混沌性最强、内在随机性最大, 利用 LLE 从理论上可以验证基于临界慢化现象的气候突变前兆信号的有效性. 总之, 本文通过 Lyapunov 指数将突变检测和突变前兆信号两个重点、难点问题联系起来, 并得到了一些很有意义的结论, 充分体现了该工作的实用性和创新性.

需要指出的是, 尽管基于 Lyapunov 指数的突变检测方法在理想序列以及 PDO 指数资料中得到了成功的应用, 但由于仍是初步研究, 对于该方法的广泛应用以及在窗口选取的问题上还需进一步研究. 本文利用非线性局部 Lyapunov 指数得到了一些有意义的结果, 但是在计算非线性局部 Lyapunov 指数时, 计算两点之间的最短距离中定义的窗口大小也具有一定的人为性, 是主观判断得到的结论, 没有一个客观的标准, 因此要合理地解释文中所描述的现象仍然需要进一步的研究.

- [1] Fu C B, Wang Q 1992 *Chin. J. Atmos. Sci.* **16** 482 (in Chinese) [符淙斌, 王强 1992 大气科学 **16** 482]
- [2] Alley R B, Marotzke J, Nordhaus W D, Overpeck J T, Peteet D M, Pielke R A, Pierrehumbert R T, Rhines P B, Stocker T F, Talley L D, Wallace J M 2005 *Science* **299** 5615
- [3] Fu C B 1994 *Chin. J. Atmos. Sci.* **18** 373 (in Chinese) [符淙斌 1994 大气科学 **18** 373]
- [4] Wang S W, Ye J L 1995 *Chin. J. Atmos. Sci.* **19** 545 (in Chinese) [王邵武, 叶瑾琳 1995 大气科学 **19** 545]
- [5] Chou J F 1997 *Bull. Chin. Acad. Sci.* **5** 325 (in Chinese) [丑纪范 1997 中国科学院院刊 **5** 325]

- [6] He W P, Wu Q, Zhang W, Wang Q G, Zhang Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2862 (in Chinese) [何文平, 吴琼, 张文, 王启光, 张勇 2009 物理学报 **58** 2862]
- [7] He W P, Deng B S, Wu Q, Zhang W, Cheng H Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8264 (in Chinese) [何文平, 邓北胜, 吴琼, 张文, 成海英 2010 物理学报 **59** 8264]
- [8] He W P, Wu Q, Cheng H Y, Zhang W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 029203 (in Chinese) [何文平, 吴琼, 成海英, 张文 2011 物理学报 **60** 029203]
- [9] Wei F Y 1999 *The Technologies of Statistics Diagnosis and Forecast in Modern Climate* (Beijing: the Weather Publishing Company) pp63-76 (in Chinese) [魏凤英 1999 现代气候统计诊断与预测技术 (北京: 气

- 象出版社) 第 63—76 页]
- [10] Babak A S, Krishnaprasad P S 2004 *EURASIP J. Appl. Signal Proc.* **15** 2295
- [11] Feng G L, Gong Z Q, Zhi R 2008 *Acta Meteorol. Sin.* **66** 892 (in Chinese) [封国林, 龚志强, 支蓉 2008 气象学报 **66** 892]
- [12] Feng G L, Dong W J, Gong Z Q, Hou W, Wan S Q, Zhi R 2006 *Non-linear Theories and Methods on Spatial-Temporal Distribution of the Observational Data* (Beijing: the Weather Publishing Company) pp5–8 (in Chinese) [封国林, 董文杰, 龚志强, 侯威, 万仕全, 支蓉 2006 观测数据非线性时空分布理论和方法 (北京: 气象出版社) 第 5—8 页]
- [13] Feng G L, Gong Z Q, Dong W J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5494 (in Chinese) [封国林, 龚志强, 董文杰 2005 物理学报 **54** 5494]
- [14] Wan S Q, Feng G L, Dong W J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5487 (in Chinese) [万仕全, 封国林, 董文杰 2005 物理学报 **54** 5487]
- [15] Gong Z Q, Feng G L, Dong W J, Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3180 (in Chinese) [龚志强, 封国林, 董文杰, 李建平 2006 物理学报 **55** 3180]
- [16] He W P, Feng G L, Wu Q, He T, Wan S Q, Chou J F 2012 *Int. J. Climatol.* **32** 1604
- [17] He W P, Feng G L, Wu Q, Wan S Q, Chou J F 2008 *Nonlinear Proc. Geoph.* **15** 601
- [18] Chen B H, Li J P, Ding R Q 2006 *Sci. China D Earth Sci.* **36** 1068 (in Chinese) [陈宝花, 李建平, 丁瑞强 2006 中国科学 D 辑 地球科学 **36** 1068]
- [19] Ding R Q, Li J P 2009 *Acta Meteor. Sin.* **67** 241 (in Chinese) [丁瑞强, 李建平 2009 气象学报 **67** 241]
- [20] Scheffer M, Bascompte J, Brock W A, Brovkin V, Carpenter S R, Dakos V, Held H, van Nes E H, Rietkerk M, Sugihara G 2009 *Nature* **461** 53
- [21] Carpenter S R, Brook W A 2006 *Ecol. Lett.* **9** 311
- [22] Guttal V, Jayaprakash C 2008 *Ecol. Lett.* **11** 450
- [23] Wu H, Hou W, Yan P C, Feng G L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 209202 (in Chinese) [吴浩, 侯威, 颜鹏程, 封国林 2012 物理学报 **61** 209202]
- [24] Wu H, Hou W, Yan P C 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 039206 (in Chinese) [吴浩, 侯威, 颜鹏程 2013 物理学报 **62** 039206]
- [25] Wu H, Feng G L, Hou W, Yan P C 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 059202 (in Chinese) [吴浩, 封国林, 侯威, 颜鹏程 2013 物理学报 **62** 059202]
- [26] Yan P C, Hou W, Hu J G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 189202 (in Chinese) [颜鹏程, 侯威, 胡经国 2012 物理学报 **61** 189202]
- [27] He D R, Wang B H, Wang Y M, Niu J J 2001 *The Dynamics Characteristics in Everywhere Smooth and Piecewise Smooth Systems* (Xian: Shaanxi Science and Technology Press) pp72–75 (in Chinese) [何大韧, 汪秉宏, 汪颖梅, 牛建军 2001 非线性动力学引论 (处处光滑与分段光滑系统的动力学特征) (西安: 陕西科学技术出版社) 第 72—75 页]
- [28] Lü J H, Lu J A, Chen S H 2005 *The Analysis and Applications of Chaotic Time Series* (Wuhan: Wuhan University Press) pp72–85 (in Chinese) [吕金虎, 陆君安, 陈士华 2005 混沌时间序列分析及其应用 (武汉: 武汉大学出版社) 第 72—85 页]
- [29] He W P, He T, Cheng H Y, Zhang W, Wu Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 049202 (in Chinese) [何文平, 何涛, 成海英, 张文, 吴琼 2011 物理学报 **60** 049202]
- [30] Xiao D, Li J P 2007 *Chin. J. Atmos. Sci.* **31** 839 (in Chinese) [肖栋, 李建平 2007 大气科学 **31** 839]
- [31] Zeng H L, Gao X Q, Dai X G 2002 *Plateau Meteor.* **21** 66 (in Chinese) [曾红玲, 高新全, 戴新刚 2002 高原气象 **21** 66]

Try to use Lyapunov exponent to discuss the abrupt climate change and its precursory signals *

Wu Hao^{1)†} Hou Wei²⁾ Wang Wen-Xiang¹⁾ Yan Peng-Cheng³⁾

1) (*College of Physical Science and Technology, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China*)

2) (*National Climate Center, Beijing 100081, China*)

3) (*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

(Received 16 January 2013; revised manuscript received 18 February 2013)

Abstract

Lyapunov exponent is an important physical quantity indicating a system is in regular motion or in chaotic motion. In view of this, in this paper, we use the Lyapunov exponent to study the chaotic properties of the system, and the mutations in climate. The results show that the Lyapunov exponent is a reliable mutation detection method. For the ideal sequence or actual atmosphere sequence the method can be used to accurately find out the mutation position; the predictability of nonlinear local Lyapunov exponent is used to evidence the reliability of the early warning signals of abrupt climate change based on the phenomenon of critical slowing down, through calculating the largest Lyapunov exponent of each time the system intrinsic properties can be reflected and the chaos characteristics can be studied, thereby providing a theoretical basis for the wide applications of the present method in real observation data.

Keywords: Lyapunov exponent, abrupt climate change, precursory signals

PACS: 92.70.Aa

DOI: 10.7498/aps.62.129204

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant Nos. 2012CB955902, 2013CB430204) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41175067, 41275074, 41105033).

† Corresponding author. E-mail: wuhaophy@163.com