

自适应网络中病毒传播的稳定性和分岔行为研究*

鲁延玲¹⁾ 蒋国平^{2)†} 宋玉蓉²⁾

1) (南京邮电大学计算机学院, 南京 210003)

2) (南京邮电大学自动化学院, 南京 210003)

(2013年1月8日收到; 2013年2月27日收到修改稿)

自适应复杂网络是以节点状态与拓扑结构之间存在反馈回路为特征的网络. 针对自适应网络病毒传播模型, 利用非线性微分动力学系统研究病毒传播行为; 通过分析非线性系统对应雅可比矩阵的特征方程, 研究其平衡点的局部稳定性和分岔行为, 并推导出各种分岔点的计算公式. 研究表明, 当病毒传播阈值小于病毒存在阈值, 即 $R_0 < R_0^c$ 时, 网络中病毒逐渐消除, 系统的无病毒平衡点是局部渐近稳定的; $R_0^c < R_0 < 1$ 时, 网络出现滞后分岔, 产生双稳态现象, 系统存在稳定的无病毒平衡点、较大稳定的地方病平衡点和较小不稳定的地方病平衡点; $R_0 > 1$ 时, 网络中病毒持续存在, 系统唯一的地方病平衡点是局部渐近稳定的. 研究发现, 系统先后出现了鞍结分岔、跨临界分岔、霍普夫分岔等分岔行为. 最后通过数值仿真验证所得结论的正确性.

关键词: 自适应网络, 稳定性, 分岔, 基本再生数

PACS: 02.50.-r, 05.10.-a, 02.30.Oz

DOI: 10.7498/aps.62.130202

1 引言

近年来, 复杂网络的病毒传播行为已得到许多研究者的关注^[1-13], 并提出了包括 SI (susceptible-infected) 模型、SIS (susceptible-infected-susceptible) 模型、SIR (susceptible-infected-removed) 模型和 SIRS (susceptible-infected-removed-susceptible) 模型等多种病毒传播模型^[3-6]. 在典型的病毒传播模型中, 网络中的节点处于三种基本状态: 易染状态 S (susceptible), 感染状态 I (infected)、被移除状态 R (removed). 基于这些传播动力学模型, 人们对病毒在复杂网络中传播的临界值性质及稳定性进行了研究^[1-13]. 文献 [3-6] 研究了不同的基本病毒传播模型的传播临界值问题; 文献 [7-9] 研究了不完全免疫、非线性感染率等情况下病毒传播行为; 文献 [10, 11] 针对含有暴露期的病毒传播模型进行系统稳定性分析. 研究发现, 分岔^[12-15]、混沌和不稳定振荡等动力学现象都可以存在于网

络的病毒传播模型中. 文献 [12, 13] 研究了小世界时延网络中的稳定性及霍普夫分岔行为; 文献 [14, 15] 分别分析了 SIS、SIRS 模型中的滞后分岔 (backward bifurcation) 行为.

在病毒传播的传染模型中, 系统稳定性和分岔行为是与传播临界阈值, 即基本再生数 R_0 (the basic reproductive number)^[16] 有关. 基本再生数表示的是一个感染个体侵入健康群体产生的继发性感染个体的平均数目. 通常情况下, 如果 $R_0 < 1$, 系统存在一个渐近稳定的无病平衡点, 疾病将不能传播, 继而逐渐消亡; 如果 $R_0 > 1$, 系统存在一个渐近稳定的地方病平衡点, 疾病将入侵并将始终存在. 如果地方病平衡点不稳定, 而且它的不稳定性是由霍普夫分岔引起, 以及疾病将以震荡形式存在; $R_0 < 1$, 系统出现多个正的地方病平衡点, 系统将会在 $R_0 = 1$ 出现滞后分岔^[14, 15]. 此时 $R_0 < 1$ 已不足够控制疾病的传播, R_0 必须减少到分岔下方最左边, 即地方病平衡点开始出现的时刻, 用 R_0^c 表示, 有时称作最小传输值 (the minimum transition value)^[17].

* 教育部高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20103223110003)、教育部人文社会科学研究基金 (批准号: 12YJAZH120)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK2010526)、江苏省“六大人才高峰”高层次人才项目 (批准号: SJ209006) 和江苏省研究生科研创新计划项目 (批准号: CXLX11.0414) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jianggp@njupt.edu.cn

上述对病毒传播的研究基本都是在网络拓扑结构不变的静态网络中进行的. 而且, 在大多数复杂网络病毒传播模型中, 研究者忽视网络拓扑结构形成和网络功能性质的相互影响, 分别独立研究“网络的动力学”和“网络上的动力学”. 网络上的动力学, 即网络节点动力学, 是将节点作为动力学演化的个体, 在演化过程中网络拓扑结构保持不变, 而节点状态发生改变. 网络的动力学, 即网络拓扑动力学, 是将网络拓扑作为动力学演化的个体, 网络的拓扑结构随时间变化而不断演化. 在真实网络的病毒传播过程中, 网络拓扑结构并不是静止不变的, 例如社会网络上的病毒传播. 网络中节点处于两种状态: 易感状态和感染状态. 易感节点在进行疾病防御时, 往往断开感染节点与易感节点之间的连线, 以便把感染节点进行隔离, 这说明节点之间的连线根据节点状态处于连接或断开状态, 从而导致社会网络拓扑结构的演化, 进一步, 网络拓扑的变化又影响着节点状态的变化. 这样, 在节点状态和网络拓扑之间就形成了一个反馈回路. 这种反馈回路可以反映随时间演化的网络拓扑和节点动力学之间复杂的相互作用和相互影响. 具有这种反馈回路的网络称为自适应网络 (adaptive network), 即同时拥有网络节点动力学和网络拓扑动力学的网络, 也就是网络中节点的连线会依据节点的状态而自行调整自己的连接. 自适应网络中拓扑结构演化动力学与发生在网络上的动力学之间的相互作用是研究者一直关注的内容.

虽然自适应网络的研究已得到大家的关注, 自适应网络上的动力学研究目前还处在起步阶段, 但是, 自适应复杂网络动力学也是复杂网络领域一个重要的研究方向, 近年来许多学者也对自适应网络动力学进行了系统研究, 提出了一些传播模型来研究自适应网络^[18-26]. Gross 等^[18]提出自适应网络中的 SIS 模型, Shaw 等^[19]提出自适应网络中的 SIRS 模型. 宋玉蓉等^[26]基于元胞自动机研究了自适应网络中的 SIS 模型. 在自适应复杂网络的病毒传播模型中, 非感染节点具有自我保护的能力, 为了减少自身被感染的机会将重置自身的链接: 断开与感染节点的链接, 随机选择一个非感染节点形成新的链接. 自适应网络中, 由于链接的自适应重置, 出现了双稳态现象. 通过数学方法研究自适应网络中的稳定性和分岔行为, 对于描述病毒传播行为有其固有的理论优势, 有利于病毒传播的控制.

本文基于 Gross 等提出的自适应网络中 SIS 病毒传播微分模型, 利用非线性动力学方法研究自适

应网络 SIS 模型; 从微分动力学系统角度分析病毒传播的临界值特性, 利用下一代生成矩阵的方法得出病毒传播的基本再生数 R_0 , 研究系统平衡点的存在条件及类型; 进而研究系统稳定性以及与平衡点有关的滞后分岔、跨临界分岔、鞍结分岔以及霍普夫分岔, 并推导各种分岔的分岔点计算公式.

2 自适应网络中 SIS 模型及其平衡点分析

2.1 理论模型

假设网络的节点总数 N , 无向链接总数 K 是不变的. 根据网络的节点平均度定义, 以及网络中每个链接连接两个节点, 可得节点平均度为 $\langle k \rangle = \frac{2L}{N}$.

在 SIS 模型中, 网络中的节点具有两种状态: 易染状态 (健康状态) S、感染状态 I. 设 s, i 分别是易染节点、感染节点的密度, 满足归一化条件

$$s + i = 1. \quad (1)$$

在自适应网络中, 易染节点具有自我保护的能力, 将会重置与感染节点的链接. 设 l_{SI}, l_{SS}, l_{II} 分别是节点具有 SI- 链接、SS- 链接、II- 链接的平均密度, 满足归一化条件

$$l_{SI} + l_{SS} + l_{II} = \frac{\langle k \rangle}{2}. \quad (2)$$

为了利用非线性动力学工具, 研究自适应网络 SIS 病毒传播模型的动力学行为, 必须在低维情况下描述传播模型. 根据 Gross 等人提出的自适应 SIS 病毒传播模型的微分动力方程, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i &= p l_{SI} - r i, \\ \frac{d}{dt} l_{II} &= p l_{SI} \left(1 + \frac{l_{SI}}{s} \right) - 2 r l_{II}, \\ \frac{d}{dt} l_{SS} &= (r + \omega) l_{SI} - \frac{2 p l_{SI} l_{SS}}{s}. \end{aligned} \quad (3)$$

第一个方程表示的是感染节点密度的平衡方程. 如果一个易染节点和感染节点相接触, 病毒将以 p 的概率沿着节点之间的 SI- 链接进行传播, 增加感染节点的密度; 感染个体以 r 的概率恢复到易染状态, 减少易染节点的密度. 后两个方程表示的是链接密度的平衡方程. 在第二个方程中, 由于易染节点与感染节点接触导致新的感染, SI- 链接转换为 II- 链接; 由于感染节点的恢复, II- 链接转换为

SI- 链接. 在第三个方程中, 由于恢复事件的存在, SI- 链接转换为 SS- 链接; 在自适应网络中, 易染节点为了保护自己, 将以 ω 的概率重置 SI- 链接: 易染节点断开与感染节点的链接, 并且随机选择一个易染节点形成一个新的 SS- 链接; 由于易染节点与感染节点相接触, 病毒的传播将会使 SS- 链接转化为 SI- 链接. 假设在链接重置过程中, 不允许有重边和自环的情况出现.

利用归一化条件 (1) 和 (2), 微分方程 (3) 可转化为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i &= pl_{SI} - ri, \\ \frac{d}{dt}l_{SI} &= \frac{2pl_{SI}}{1-i} \left(\frac{\langle k \rangle}{2} - l_{SI} - l_{II} \right) \\ &\quad - pl_{SI} \left(1 + \frac{l_{SI}}{1-i} \right) - (r + \omega)l_{SI} + 2rl_{II}, \\ \frac{d}{dt}l_{II} &= pl_{SI} \left(1 + \frac{l_{SI}}{1-i} \right) - 2rl_{II}. \end{aligned} \quad (4)$$

设 $D = \left\{ (i, l_{SI}, l_{II}) \mid 0 \leq i \leq 1, 0 \leq l_{SI}, l_{II} \leq \frac{\langle k \rangle}{2} \right\}$ 是系统的非负不变集.

2.2 平衡点存在条件

在稳态情况下, 令微分方程 (4) 的右端为零, 可以得到系统平衡解 (the equilibrium solutions) $E = \{i, l_{SI}, l_{II}\} \subset D$.

进而可以得到, 稳态情况下, 链接密度关于感染节点密度的关系式

$$\begin{aligned} l_{SI} &= \frac{ri}{p}, \\ l_{II} &= \frac{i}{2} \left(1 + \frac{ri}{p(1-i)} \right), \\ l_{SS} &= \frac{r + \omega}{2p} (1-i), \quad \text{当 } i \neq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

当 $i = 0$ 时, 可以得到无病毒平衡点 (disease-free equilibrium)

$$E_0 = (i^0, l_{SI}^0, l_{II}^0) = (0, 0, 0).$$

当 $i \neq 0$ 时, 可以得到地方病平衡点 (endemic equilibrium)

$$E^* = (i^*, l_{SI}^*, l_{II}^*),$$

其中 $i = i^*$ 满足

$$Ai^2 + Bi + C = 0, \quad (6)$$

其中

$$A = w - p, B = p\langle k \rangle + p - 2\omega, C = r + \omega - p\langle k \rangle.$$

从而, $r = A + B + C$. 令 $\Delta = B^2 - 4AC = P^2(\langle k \rangle - 1)^2 + 4r(p - \omega)$.

系统 (4) 的基本再生数为

$$R_0 = \frac{p\langle k \rangle}{r + \omega}. \quad (7)$$

下面对方程 (6) 进行求解.

第一种情况: 当 $p < \omega, A = \omega - p > 0$ 时, 方程 (6) 是一个二次方程.

当 $R_0 < 1$ 时, $C > 0$, 方程 (6) 存在两个正解当且仅当 $B < 0, \Delta = B^2 - 4AC > 0$, 即 $B < -2\sqrt{AC} < 0$. 较小的正解是 $i_{sma}^* = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$, 较大的正解是 $i_{lar}^* = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$, 相应的地方病平衡点分别用 E_{sma}^*, E_{lar}^* 表示.

当 $R_0 = 1$ 时, $C = 0$, 方程 (6) 存在唯一正解 $i^* = \frac{-B}{A} > 0$ 当且仅当 $B < 0$. 系统 (4) 对于 $R_0 = 1$ 存在一个正的地方病平衡点.

当 $R_0 > 1$ 时, $C < 0$, 方程 (6) 存在唯一正解 $i^* = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$ 当且仅当 $\Delta = B^2 - 4AC > 0$. 系统 (4) 存在唯一的地方病平衡点.

第二种情况: 当 $p = \omega, A = \omega - p = 0$ 时. 仅当 $R_0 > 1, C < 0$ 及 $B > 0$ 时, 方程 (6) 存在唯一正解 $i^* = \frac{-C}{B}$.

第三种情况: 当 $p > \omega, A = \omega - p < 0$ 时. 仅当 $R_0 > 1$ 时, $C < 0$, 方程 (6) 存在唯一正解 $i^* = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$ 当且仅当 $B > 0, \Delta = B^2 - 4AC > 0$, 即 $B > 2\sqrt{AC} > 0$.

综上所述, 我们得到如下定理.

定理1 如果 $R_0 < 1$, 系统不仅存在无病毒平衡点 E_0 , 还可能存在两个地方病平衡点 E_{sma}^*, E_{lar}^* 当且仅当 $B < -2\sqrt{AC} < 0$; 如果 $R_0 > 1$, 系统存在唯一的地方病平衡点 E_{lar}^* .

3 平衡点的稳定性与滞后分岔

定理2 当 $R_0 < 1$ 时, 无病毒平衡点 E_0 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 是不稳定的.

证明 无病毒平衡点 $E_0 = (i^0, l_{SI}^0, l_{II}^0) = (0, 0, 0)$

的雅可比矩阵 J_0 为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -r & p & 0 \\ 0 & -p - (r + \omega - p\langle k \rangle) & 2r \\ 0 & p & -2r \end{bmatrix}.$$

矩阵 J_0 的特征多项式 $M_0 = |\lambda E - J_0|$ 为

$$M_0 = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

其中, $a_1 = p + 3r + C$, $a_2 = r(p + 2r) + 3rC$, $a_3 = 2r^2C$.

当 $R_0 < 1$ 时, $C = r + \omega - p\langle k \rangle > 0$. 显然 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ 和 $a_1a_2 - a_3 > 0$. 根据 Routh-Hurwitz

稳定判据, 当 $R_0 < 1$ 时, 无病毒平衡点 E_0 是局部渐近稳定的.

当 $R_0 > 1$ 时, $C = r + \omega - p\langle k \rangle < 0$. 显然 $a_3 < 0$. 从而矩阵 J_0 有一个特征值为正. 进而根据 Routh-Hurwitz 稳定判据, 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 是不稳定的.

定理3 当 $R_0 < 1$ 时, 地方病平衡点 E_{sma}^* 是不稳定的, E_{lar}^* 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, E_{lar}^* 是局部渐近稳定的.

证明 地方病平衡点 $E^* = (i^*, l_{\Pi}^*, l_{SS}^*)$ 的雅可比矩阵为

$$J^* = \begin{bmatrix} -r & p & 0 \\ \frac{r(r + \omega)i}{p(1-i)} - \frac{r^2i^2}{p(1-i)^2} & \frac{-(p+C) + (\omega - 5r)i}{1-i} - \frac{ri^2}{(1-i)^2} & -\frac{2ri}{1-i} - p \\ \frac{r^2i^2}{p(1-i)^2} & p + \frac{2ri}{1-i} & -2r \end{bmatrix}.$$

矩阵 J^* 的特征多项式 $M^* = |\lambda E - J^*|$ 为

$$M^* = \lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3,$$

其中

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{(1-i)^2} [(\omega - r)i^2 - (p + r + C)i + p + 3r + C], \\ b_2 &= \frac{r}{(1-i)^2} [4Ai^2 + (3p + 6r - 4\omega - 3C)i + p + 2r + 3C] \frac{1}{2}, \\ b_3 &= \frac{2r^2}{(1-i)^3} [-2Ai^3 + (4A + C - r)i^2 - 2(A + C - r)i + C] = \frac{2r^2}{(1-i)^3} X. \end{aligned}$$

由于 i^* 满足方程 (6), 则

$$\begin{aligned} X &= -2Ai^3 + (4A + C - r)i^2 - 2(A + C - r)i + C \\ &= -2Ai^3 + (3A - B)i^2 + 2Bi + C \\ &= (2Ai + B)(i - i^2) + Ai^2 + Bi + C \\ &= (2Ai + B)(i - i^2) \end{aligned}$$

当 $R_0 < 1$ 时, 显然 $b_1 > 0$, $b_2 > 0$. 对于 $i_{sma}^* = (-B - \sqrt{\Delta})/2A$, 有 $2Ai_{sma}^* + B = -\sqrt{\Delta}$, 则 $b_3 < 0$. 从而, E_{sma}^* 是不稳定的. 对于 $i_{lar}^* = (-B + \sqrt{\Delta})/2A$, 有 $2Ai_{lar}^* + B = \sqrt{\Delta}$, 则 $b_3 > 0$. 根据 Routh-Hurwitz 稳定判据, 当 $b_1b_2 - b_3 > 0$ 时, 无病毒平衡点 E_{lar}^* 是局部渐近稳定的.

当 $R_0 > 1$ 时, 由于 $C > 0$, $i_{lar}^* = (-B + \sqrt{\Delta})/2A \in (0, 1)$, 则 $b_1 > 0$, $b_2 > 0$. 又因 $X_{lar}^* = \sqrt{\Delta}i(1-i) > 0$, 所以 $b_3 > 0$. 根据 Routh-Hurwitz 稳定判据, 当 $b_1b_2 - b_3 > 0$ 时, 无病毒平衡点 E_{lar}^* 是局部渐近稳定的.

综上所述, 当 $R_0 < 1$ 时, E_{sma}^* 是不稳定的, E_{lar}^* 和 E^0 是局部渐近稳定的, 这就说明系统出现了双稳态现象; 也就是说, $R_0 < 1$ 情况下, 系统出现了滞后分岔. 由于分岔现象的出现, $R_0 < 1$ 已不足够控制疾病传播; $R_0 < 1$ 时, 一个稳定的地方病状态可能存在; R_0 必须减少到分岔下方最左边, 即地方病平衡点开始出现的时刻, 用 R_0^c 表示. 从数学角度来看, 当滞后分岔出现时, $R_0^c < R_0 < 1$ 情况下, 系统至少有三个平衡点: 稳定的无病毒平衡点, 较大稳定的地方病平衡点, 较小不稳定的地方病平衡点. 当 $R_0 > 1$ 时, 系统存在唯一的地方病平衡点.

定理4 $\omega > 0$ 时, 系统 (4) 在 $R_0 = 1$ 处出现滞后分岔, 当且仅当 $B < 0$, 此时 p 由 $C = 0$ 来确定.

当 $R_0 < R_0^c < 1$ 时, 系统局部渐近稳定在无病毒平衡点 E_0 , 网络中的病毒将逐渐消亡; 当 $R_0^c < R_0 < 1$ 时, 系统在 $R_0 = 1$ 处产生滞后分岔, 出现双稳态现象: 系统即可能稳定在无病毒平衡点 E_0 , 又可能稳定在地方病平衡点 E_{lar}^* , 而且系统出现不稳定的地方病平衡点 E_{sma}^* , 网络中的病毒即可能消亡, 亦可能传播; 当 $R_0 > 1$ 时, 系统局部渐近稳定在地方病平衡点 E_{lar}^* , 网络中的病毒会持续存在, 最终病毒在网络中传播.

4 平衡点的分岔

在自适应网络中, 即 $\omega > 0$ 时, 节点的链接发生变化, 从而引起网络拓扑结构发生变化, 病毒传播过程中节点状态与拓扑结构相互影响, 导致系统结构不稳定, 进而出现分岔现象.

$\omega > 0$, 设 $x = (i, I_{SI}, I_{II})$, p 为分岔参数, 则系统(4)转化为非线性动力系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p). \quad (8)$$

对于无病毒平衡点 $x_0 = E_0$ 的雅可比矩阵 J_0 的特征多项式 M_0 为

$$M_0 = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3.$$

当 $R_0 = 1$ 时, $a_3 = 0$, 此时 J_0 的特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -r$, $\lambda_3 = -(p_0 + 2r)$, 其中 $p_0 = \frac{r + \omega}{\langle k \rangle}$. 因有一特征值为零, 则 E_0 为非双曲平衡点.

根据上述平衡点稳定性定理, $R_0 > 1$ 时, E_0 为不稳定焦点, E_{lar}^* 是稳定结点; $R_0 < 1$ 时, E_0 为稳定结点, E_{lar}^* 是稳定结点, E_{sma}^* 是不稳定焦点. 由于有稳定性交换这一性质, 故系统在 $p_0 = \frac{r + \omega}{\langle k \rangle}$ 处出现跨临界分岔现象.

综上所述, 可得如下定理.

定理5 $\omega > 0$ 时, 系统在 $p_0 = \frac{\omega + r}{\langle k \rangle}$ 处出现跨临界分岔现象.

$R_0 < 1$ 时, 系统在无病毒平衡点 E_0 处是稳定的; $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 E_{lar}^* 是唯一且稳定的. 因而, 以下只需研究系统在 $R_0 < 1$ 时地方病平衡点的分岔现象.

对于地方病平衡点 $x^* = E^*$ 的雅可比矩阵 J^* 的特征多项式 M^* 为

$$M^* = \lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3.$$

当 $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ 时, $b_3 = 0$, J^* 在 p_1 处出现一个零特征值.

根据上述平衡点稳定性定理, $\Delta < 0$ 时, E_{sma}^* , E_{lar}^* 是不存在的; $\Delta > 0$, $R_0 < 1$ 时, E_{sma}^* 是一个不稳定的鞍点, E_{lar}^* 是稳定的结点, 所以系统出现了鞍结分岔.

定理6 $\omega > 0$ 时, 系统在 p_1 处出现鞍结分岔现象. 其中, p_1 满足以下等式:

$$p_1^2(\langle k \rangle - 1)^2 + 4r(p_1 - \omega) = 0.$$

$\Delta > 0$, $R_0 < 1$ 时, 根据 Routh-Hurwitz 准则以及霍普夫分岔定理, 在满足条件 $b_1 > 0$, $b_3 >$

0 , $b_1b_2 - b_3 > 0$, 系统在平衡点 E_{lar}^* 处稳定; 当 $b_1b_2 - b_3 = 0$ 时, 系统在平衡点 E_{lar}^* 处于临界失稳状态, 继而系统出现霍普夫分岔.

定理7 $\omega > 0$ 时, 系统在 p_2 处出现霍普夫分岔现象. 其中, p_2 满足以下等式:

$$b_1b_2 - b_3 = 0.$$

5 数值仿真

在上节, 通过理论证明, 在自适应网络中, 病毒的基本再生数 R_0 为病毒是否传播阈值, 最小传输值 R_0^c 为病毒是否存在阈值. 设 $R_0 = 1$ 对应病毒入侵临界值 p_0 . 设 R_0^c 对应病毒存在临界值 p_c . 当 $p_0 < p_c$ 时, $R_0 < R_0^c < 1$, 病毒逐渐消除, 系统局部渐近稳定在无病毒平衡点 E_0 ; 当 $p_c < p < p_0$ 时, $R_0^c < R_0 < 1$, 病毒既有可能消亡, 也可能传播, 系统出现双稳态现象: 系统即可能稳定在无病毒平衡点 E_0 , 又可能稳定在地方病平衡点 E_{lar}^* , 而且系统出现不稳定的地方病平衡点 E_{sma}^* ; 当 $p > p_0$ 时, $R_0 > 1$, 病毒会持续存在, 系统局部渐近稳定在地方病平衡点 E_{lar}^* .

在上节, 理论还证明了, 在自适应网络中, 系统在 $R_0 = 1$ 处出现滞后分岔; $p = p_0$ 处出现跨临界分岔; $p = p_1$ 处出现鞍结分岔; $p = p_2$ 处出现霍普夫分岔.

为了验证上述结论的正确性, 以下通过两个方面, 进行传播阈值分析与数值仿真.

5.1 病毒传播阈值

令 $R_0 = \frac{p(k)}{r + \omega} = 1$, 得到病毒入侵临界值 $p_0 = \frac{r + \omega}{\langle k \rangle}$. 令 $\Delta = B^2 - 4AC = 0$, 得到

$$p_1 = \frac{-2r + \sqrt{2r^2 + 4r\omega(\langle k \rangle - 1)^2}}{(\langle k \rangle - 1)^2}.$$

根据定理 2, 自适应网络中, 当 $p < p_0$ 时, $R_0 < 1$, 系统不仅存在无病毒平衡点 E_0 , 还存在两个地方病平衡点 E_{sma}^* , E_{lar}^* ; 当 $p > p_0$ 时, $R_0 > 1$, 系统存在唯一的地方病平衡点 E^* . 根据定理 5 和定理 6, 系统在 p_0 处产生跨临界分岔, 在 p_1 处产生鞍结分岔.

分别设网络节点总数 $N = 10^5$, 网络中链接总数 $K = 10^6$, 网络病毒的自我恢复率 $r = 0.002$ 为仿真参数, 从而网络节点平均度 $\langle k \rangle = 20$. 理论分析, $\omega = 0, 0.04, 0.2, 0.6$ 时, 入侵临界值分别为 $p_0 =$

0.0001, 0.0021, 0.0101, 0.0301; $\omega = 0.04, 0.2, 0.6$ 时, 分别得到鞍结分岔点 $p_1 = 0.0009, 0.0021, 0.0036$.

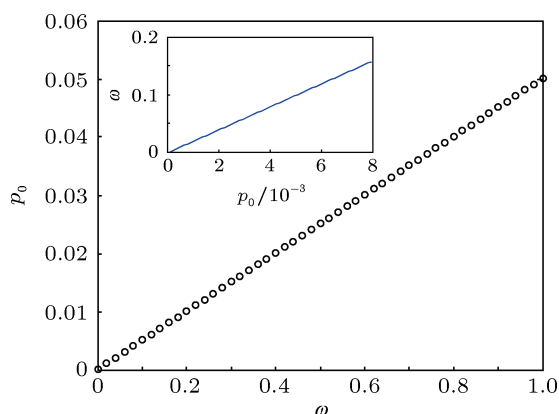


图1 病毒传播临界值 p_0 与重置链接概率 ω 的分岔关系图

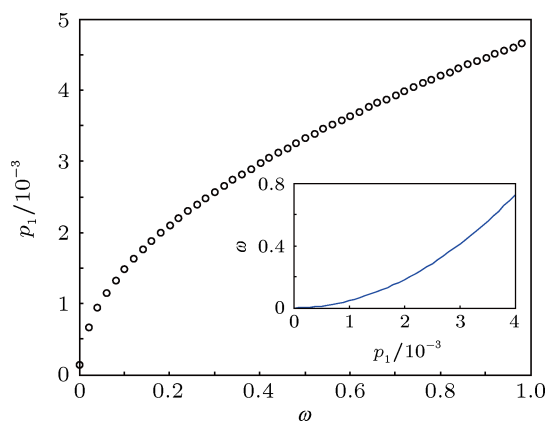


图2 鞍结分岔点 p_1 与重置链接概率 ω 的分岔关系图

重置链接概率 ω 取不同值时, 病毒入侵临界值 p_0 的变化如图 1 所示; 鞍结分岔点 p_1 的变化如图 2 所示. 图 1 中子图是 $0 < p_0 \leq 0.008$ 时, ω 随 p_0 的变化图. 图 2 中的子图是 $0 < p_1 \leq 0.004$ 时, ω 随 p_1 的变化图. 与 Gross 仿真结果^[18] 一致, 从而说明我们理论得出的病毒入侵临界值 p_0 以及鞍结分岔点 p_1 的关系式是正确的.

图 3 所示的是, ω 取不同值时, 感染密度 i 与传播率 p 的关系; 也可显示 ω 取不同值时, 感染密度 i 与病毒入侵临界值 p_0 的关系, 以及感染密度 i 与鞍结分岔点 p_1 的关系. 从而, 从图 3 可以得知, 仿真结果与理论分析一致.

图 3(b) 和 (c) 可看出, 当 $p < p_1, R_0 < 1$ 时, 感染密度为零; $p_1 < p < p_0, R_0 < 1$ 时, 感染密度不仅存在为零的情况, 还存在两个正解; 当 $p > p_0, R_0 > 1$ 时, 感染密度为唯一的正解. 从而说明, 仿真结果与理论分析是一致的. 另外, 从图 3 不仅可以看出系统在 $R_0 = 1$ 即 p_0 处产生滞后分岔, 而且可以看出

随着重置链接概率 ω 的增加, 病毒传播临界值增加, 病毒爆发的可能性减小.

5.2 双稳态分析

根据定理 7, 系统在 p_2 处出现霍普夫分岔. 当重置链接概率 ω 较小时, 病毒存在临界值为 $p_c = p_1$. 随着 ω 的增加, 病毒存在临界值的性质发生改变, 且临界值变为 $p_c = p_2$, 即双稳态存在临界值.

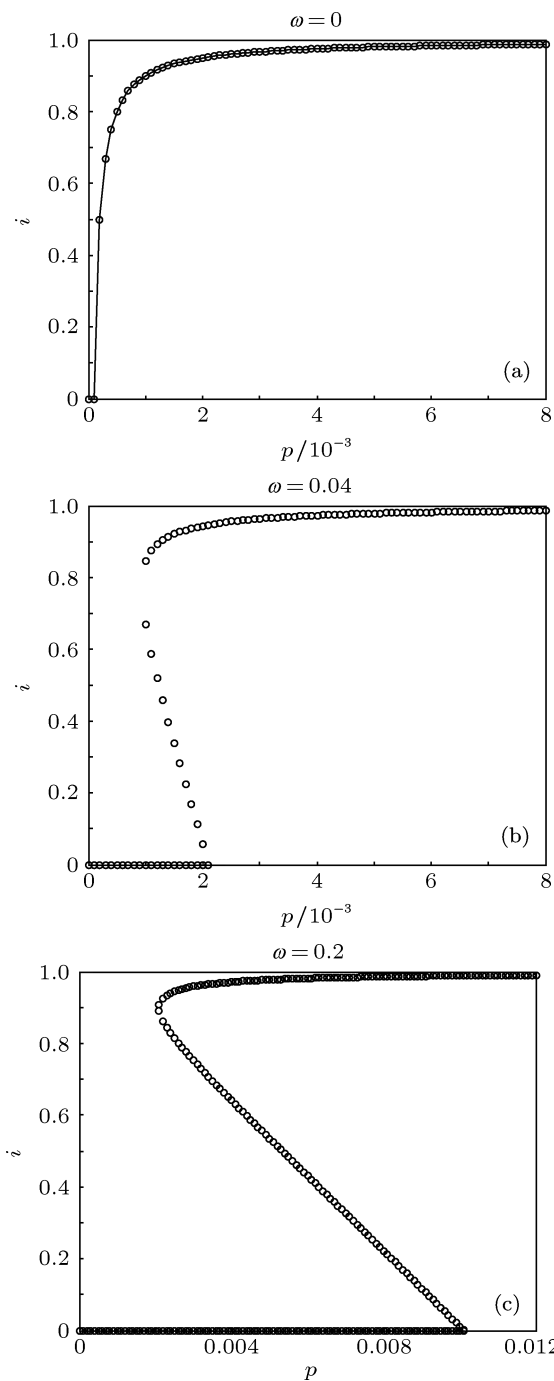


图3 (a) $\omega = 0$ 感染密度与传播率的关系图; (b) $\omega = 0.04$ 感染密度与传播率的关系图; (c) $\omega = 0.2$ 感染密度与传播率的关系图

设函数 $f(p) = b_1 b_2 - b_3$. 为了直观表示 $f(p) = 0$ 时的解 p_2 , ω 取不同值时, $f(p)$ 函数示意图如图 4 表示.

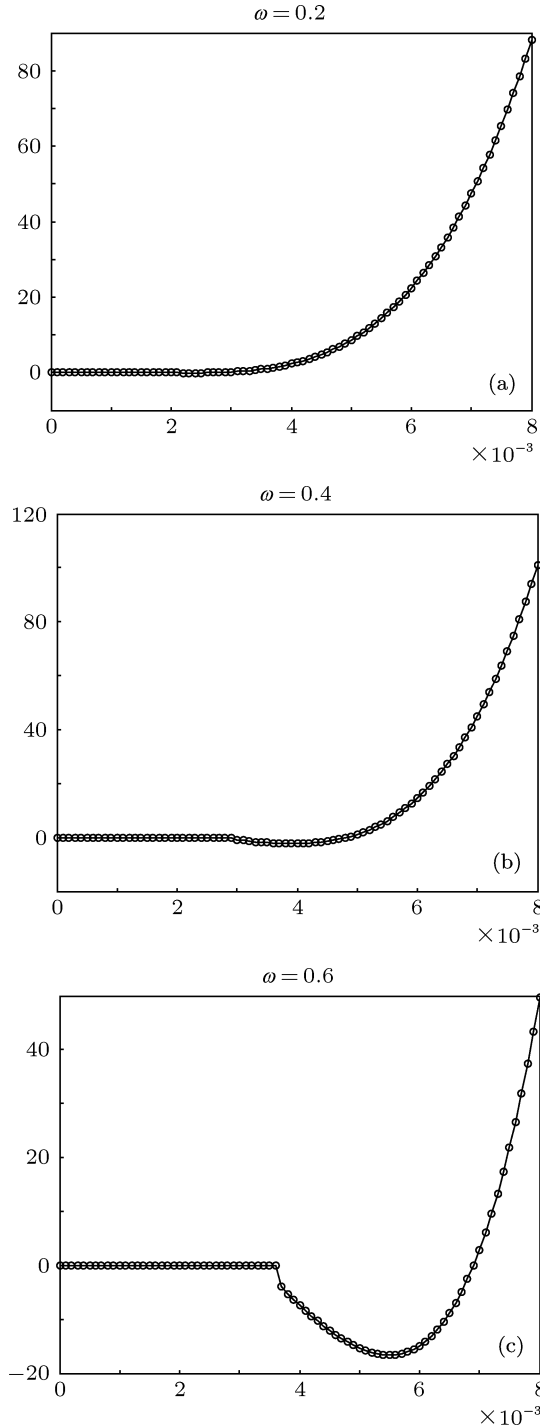


图 4 (a) $\omega = 0.2$ 时的 $f(p)$ 函数示意图; (b) $\omega = 0.4$ 时的 $f(p)$ 函数示意图; (c) $\omega = 0.6$ 时的 $f(p)$ 函数示意图

从图 4 中可直观看出 $\omega = 0.2, 0.4, 0.6$, $f(p)$ 的零值范围, 与 Gross 仿真结果^[18] 一致, 从而说明我们理论得出的霍普夫分岔点关系式是正确的.

图 5 所示的是, ω 取不同值时, 感染密度 i 与传

播率 p 的双稳态关系, 也可显示, 感染密度 i 与双稳态存在临界值 p_2 的关系. 从而, 从图 5 可以得知, 仿真结果与理论分析是一致的.

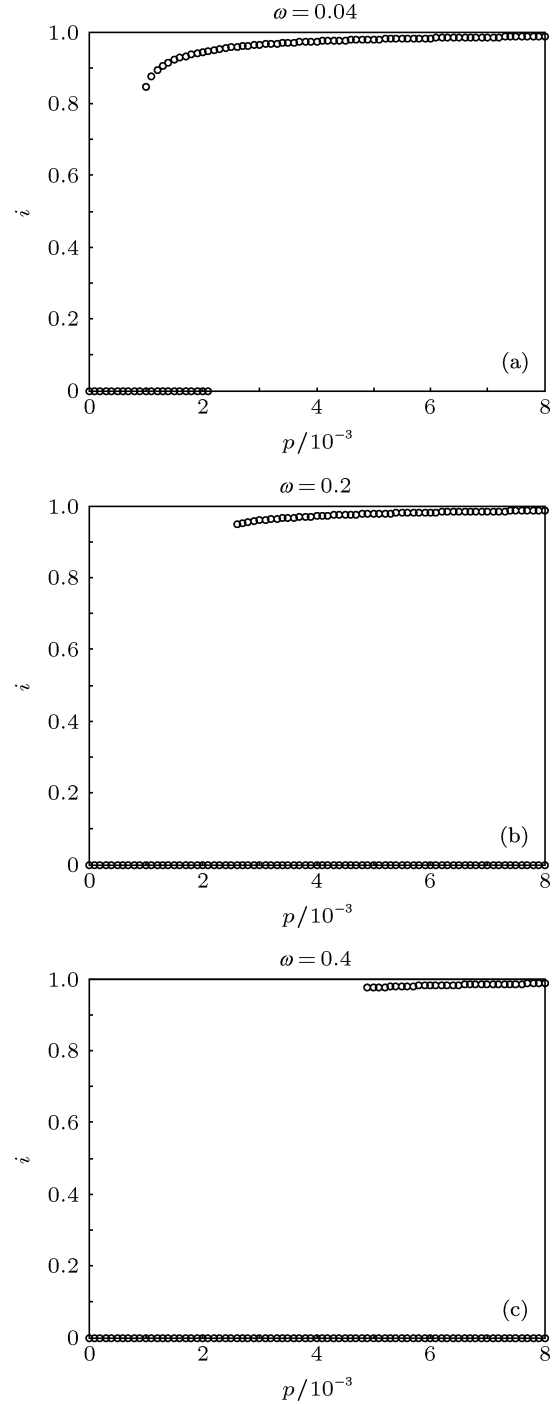


图 5 (a) $\omega = 0.04$ 时感染密度的双稳态; (b) $\omega = 0.2$ 时感染密度的双稳态; (c) $\omega = 0.4$ 时感染密度的双稳态

由图 5(b), (c) 可看出, 当 $p < p_2$ 时, 系统局部稳定在无病毒平衡点 E_0 ; $p_2 < p < p_0$ 时, 系出现双稳态现象, 系统即可能稳定在无病毒平衡点 E_0 , 又可能稳定在地方病平衡点 E_{lar}^* ; 当 $p > p_0$ 时, 系统

稳定在地方病平衡点 E_{lar}^* . 说明, 仿真结果与理论分析是一致的. 另外, 从图 5 不仅可以看出系统在 p_2 处产生霍普夫分岔, 而且可以看出随着重置链接概率 ω 的增加, 病毒存在临界值增加, 即双稳态存在临界值增加.

6 结论

本文基于 Gross 等提出的自适应网络中 SIS 病毒传播微分模型, 从数学角度分析病毒传播过程, 利用非线性动力学方法研究自适应 SIS 模型. 从微分动力学角度系统分析病毒传播的临界值特性, 利用下一代生成矩阵的方法得出病毒传播的基本再生数 R_0 , 从而研究系统平衡点的存在条件和系统平衡点的稳定性和滞后分岔行为. 理论证明, 当

$R_0 < R_0^c < 1$ 时, 网络中的病毒逐渐消亡, 系统局部渐近稳定在无病毒平衡点 E_0 ; 当 $R_0^c < R_0 < 1$ 时, 网络中的病毒即可能消亡, 也可能传播, 系统在 $R_0 = 1$ 产生滞后分岔, 出现双稳态现象: 系统即可能稳定在无病毒平衡点 E_0 , 又可能稳定在地方病平衡点 E_{lar}^* , 而且系统出现不稳定的地方病平衡点 E_{sma}^* ; 当 $R_0 > 1$ 时, 网络中病毒会持续存在, 系统局部渐近稳定在地方病平衡点 E_{lar}^* .

通过分析非线性系统的雅可比矩阵的特征方程, 结合平衡点稳定性分析, 研究平衡点的分岔行为. 不仅发现自适应网络中出现了跨临界分岔、鞍结分岔以及霍普夫分岔, 还推导出各种分岔点的计算公式. 本文研究对预防和控制自适应网络中的病毒传播具有重要的应用价值.

-
- [1] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
 [2] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 167
 [3] Barthelemy M, Barrat A, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 178701
 [4] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066117
 [5] Moreno Y, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2002 *Eur. Phys. J. B* **26** 521
 [6] Bruno B, Salvatore R 2010 *Appl. Math and Computation* **217** 4010
 [7] Zhang H F, Fu X C 2009 *Nonl. Anal TMA* **70** 3273
 [8] Wang Y Q, Jiang G P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6734 (in Chinese) [王亚奇, 蒋国平 2010 物理学报 **59** 6734]
 [9] Wang Y Q, Jiang G P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6725 (in Chinese) [王亚奇, 蒋国平 2010 物理学报 **59** 6725]
 [10] Li M Y, Smith H L, Wang L 2001 *SIMA J. Appl. Math.* **62** 58
 [11] Li M Y, Wang L 2002 *IMA* **126** 295
 [12] Li C G, Chen G, Chao S 2004 *Solitons and Fractals* **20** 353
 [13] Li X, Chen G, Li C G 2004 *Int. J. of Systems Science* **35** 527
 [14] Van den Driessche P, Watmough J 2000 *J. Math. Biol.* **40** 525
 [15] Haderler K P, van den Driessche P 1997 *Math. Biosei.* **146** 15
 [16] Van den Driessche P, Watmough J 2002 *Math. Biosei.* **180** 29
 [17] Tu S, Reiss E, SIAM J 1986 *Appl. Math.* **46** 189
 [18] Gross T, D' Lima C J D, Blasius B 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 208701
 [19] Shaw L B, Schwartz I B 2008 *Phys. Rev. E* **77** 066101
 [20] Gross T, Blasius B, Soc J R 2008 *Interface* **5** 259
 [21] Gross Sayama T H, eds 2009 *Adaptive Networks: Theory, Models and Applications* (Springer)
 [22] Gross T, Kevrekidis I G 2008 *Eur. Lett.* **82** 38004
 [23] Risau-Gusman S, Zanette D H 2009 *J. Theor. Biol.* **257** 52
 [24] Zanette D, Risau-Gusman S 2008 *J. Biol. Phys.* **34** 135
 [25] Schwartz I B, Shaw L B 2010 *Physics* **3**
 [26] Song Y R, Jiang G P, Xu J G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120509 (in Chinese) [宋玉蓉, 蒋国平, 徐加刚 2011 物理学报 **60** 120509]

Stability and bifurcation of epidemic spreading on adaptive network*

Lu Yan-Ling¹⁾ Jiang Guo-Ping^{2)†} Song Yu-Rong²⁾

1) (College of Computer, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210004, China)

2) (College of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210004, China)

(Received 8 January 2013; revised manuscript received 27 February 2013)

Abstract

Adaptive network is characterized by feedback loop between states of nodes and topology of the network. In this paper, for adaptive epidemic spreading model, epidemic spreading dynamics is studied by using a nonlinear differential dynamic system. The local stability and bifurcation behavior of the equilibrium in this network model are investigated and all kinds of bifurcation point formula are obtained by analyzing its corresponding characteristic equation of Jacobian matrix of the nonlinear system. It is shown that, when the epidemic threshold is less than epidemic persistence threshold $R_0 < R_0^c$, the disease always dies out and the disease-free equilibrium is asymptotically locally stable. If $R_0^c < R_0 < 1$, a backward bifurcation leading to bistability possibly occurs, and there are possibly three equilibria: a stable disease-free equilibrium, a larger stable endemic equilibrium, and a smaller unstable endemic equilibrium. If $R_0 > 1$, the disease is uniformly persistent and only one endemic equilibrium is asymptotically locally stable. It is also found that the system has saddle-node bifurcation, transcritical bifurcation, and Hopf bifurcation. Numerical simulations are given to verify the results of theoretical analysis.

Keywords: adaptive network, stability, bifurcation, basic reproduction number

PACS: 02.50.-r, 05.10.-a, 02.30.Oz

DOI: 10.7498/aps.62.130202

* Project supported by the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of High Education of China (Grant No. 20103223110003), the Ministry of Education Research in the Humanities and Social Sciences Planning Fund of China (Grant No. 12YJAZH120), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2010526), the Six Projects Sponsoring Talent Summits of Jiangsu Province, China (Grant No. SJ209006), and the Graduate Student Innovation Research Project of Jiangsu Province, China (Grant No. CXLX11_0414).

† Corresponding author. E-mail: jianggp@njupt.edu.cn