

阻尼 Jaynes-Cummings 模型中两原子的量子关联动力学*

樊开明 张国锋†

(北京航空航天大学物理科学与核能工程学院, 物理系, 北京 100191)

(2013 年 2 月 1 日收到; 2013 年 3 月 18 日收到修改稿)

几何量子失协 (geometrical quantum discord, GQD) 是目前度量量子体系中量子关联的一种行之有效的方法, 本文利用几何量子失协考察了有阻尼存在的 Jaynes-Cummings (J-C) 模型中两原子的量子关联动力学. 给出了几何量子失协在原子和光场发生共振和非共振耦合两种情况下的动力学演化行为, 尤其揭示了阻尼耗散对几何量子失协的影响.

关键词: 阻尼 Jaynes-Cummings(J-C) 模型, 量子关联, 几何量子失协 (GQD)

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Hk

DOI: 10.7498/aps.62.130301

1 引言

量子信息的起源可以追溯到爱因斯坦等人提出的 EPR 佯谬^[1]. 人们在讨论 EPR 佯谬时引入了量子纠缠^[2]的概念, 量子纠缠曾经一度被认为是量子信息和量子计算的核心资源, 一直都是量子信息理论基础问题研究的重要方向. 然而, 最近几年在对量子纠缠的研究中发现了比量子纠缠更为基本的概念, 即量子关联^[3,4]. 目前的观点认为量子纠缠只是一种特殊的量子关联, 而包含经典和量子两部分的关联可能比纠缠更为广泛, 也更基础. 现在已经研究表明: 分离态中也可能含有量子关联, 这就意味着纠缠度为零的量子态中可能还有非零的量子关联^[3,4], 而且这种非纠缠的量子关联已经在理论上被用来在非幺正的量子计算模型中实现加速解决一些计算方案^[5], 并且已经被实验所证实^[6]. 类似于量子纠缠, 量子关联在外加周围环境噪声作用下也会不断衰减, 这就是量子退相干过程. 由于实际的量子系统不可能是完全封闭的理想系统, 将不可避免地受到环境噪声的干扰, 因而退相

干过程是必然的. 但退相干是量子信息过程优越性的最大障碍, 因此如何克服退相干一直是量子信息研究者努力的研究方向.

另一方面, 为了实现量子计算和量子通信, 人们先后提出了对量子信息进行处理的诸多方案: 腔 QED^[7]、离子阱^[8]、核磁共振^[9]、量子点^[10,11]、超导系统^[12,13]等. 其中腔 QED (cavity quantum-electrodynamics) 方案被认为是最有前景的量子硬件设计方案^[14,15]. 腔 QED 的原理是通过腔场与原子之间的相互作用实现纠缠态的制备、未知量子态的隐形传输和量子逻辑门的构建. 以往研究都侧重于腔 QED 体系中的量子纠缠, 很少涉及到其他的量子关联. 量子关联既然被认为比量子纠缠更普遍, 且在没有纠缠的量子体系中的其他量子关联能加速实现某些算法, 因此研究腔 QED 体系中量子关联的动力学就显得很有必要.

本文将应用几何量子失协 (geometrical quantum discord, GQD) 来研究开放的原子与光场相互作用体系中的量子关联动力学, 讨论光场与原子相互作用强度、光场与原子失谐量、原子阻尼耗散

* 国家自然科学基金 (批准号: 11174024, 61227902) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: gf1978zhang@buaa.edu.cn

等对量子关联的影响. 以期丰富量子关联的研究内容, 更希望对基于腔 QED 体系实现量子信息提供理论参考.

2 几何量子失协 (GQD)

量子纠缠可以在许多内含量子关联的物理体系中实现, 人们对非量子纠缠的量子关联的研究却远比量子纠缠晚很多. 量子信息科学研究的初期, 人们逐渐认识到量子纠缠是量子信息技术得以优越于目前经典技术的关键所在. 然而随着最近几年的深入探讨和研究, 人们发现了一个更加普遍的概念——量子关联, 它折射出的是量子态各部分之间的相互联系. 而以前研究甚多的量子纠缠只是量子关联中特殊的一类, 继而人们又发现没有量子纠缠的量子关联也能实现很多的量子信息过程.

量子失协^[4]是度量量子关联比较可靠的一种方法, 最初提出来是为了捕捉量子系统中除了量子纠缠外的其他的非经典关联. 由于对两个量子关联在一起的体系的其中一个进行测量将不可避免地导致对另一个体系的扰动, 因此经典互信息量两种等价的表达式在量子世界中一般是不一致的, 二者之差就是量子失协. 具体地说, 考虑一个两体量子系统 ρ_{xy} , 其量子互信息可以定义为

$$I(\rho_{xy}) = S(\rho_x) + S(\rho_y) - S(\rho_{xy}),$$

其中 $S(\rho) = -\text{Tr}\rho \ln \rho$ 为冯诺依曼熵, ρ_x 和 ρ_y 分别为 ρ_{xy} 的约化密度矩阵. Groisman^[16] 等人已经证明了可以用量子互信息量来描述量子系统的总关联 (包括经典和量子两部分). 另一方面, 对于经典互信息表达式的推广, 需要引入一套完备的测量基底 $\{\Pi_j\}$ 来对某一子体系 (比如 x 体系), 进行测量, 每次测量结果为 j 的概率为 $p_j = \text{Tr}_{xy}(\rho_{xy}\Pi_j)$, 测量完后 y 子系统的态将塌缩到 $\rho_y^j = \text{Tr}_x(\Pi_j\rho_{xy}\Pi_j)/p_j$. 对所有的测量基进行优化, 量子体系的经典关联就被定义为 $C(\rho_{xy}) = S(\rho_x) - \min_{\{\Pi_j\}} \sum_j p_j S(\rho_x^j)$ ^[3]. 而量子互信息量与经典关联之间的差值就是著名的量子失协.

可以看到量子失协的计算涉及到对于所有的测量基底 $\{\Pi_j\}$ 进行一个最小优化, 这是非常困难的, 事实证明: 即便是两体两维量子系统, 也仅仅是某些特殊态的量子失协可以解析计算出来. 为了应对这种困难, Dakic 等^[17] 从量子态的几何特

性出发, 提出了量子失协的几何度量方法, 即 GQD (geometrical quantum discord). 尽管随着维度的增加, GQD 的计算也变得有些困难, 但是原则上任意维的两体量子系统中的 GQD 都可以用一个简单的解析式来表示. 本文中考虑的是两个二能级原子和各自的腔场相互作用, 然后考察两个原子之间的量子关联. 为简化计算, 采用 GQD 来度量体系的量子关联.

具体地, 给定一个两体量子态, 其密度矩阵如果可以表示为

$$\rho = \frac{1}{4} \left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \sum_{i=1}^3 (a_i \sigma_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes b_i \sigma_i) \sum_{i,j=1}^3 c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right],$$

其中 $\mathbf{1}$ 为二阶单位矩阵, $\sigma_i (i = x, y, z)$ 为泡利矩阵. 则对应的 GQD 为

$$D(\rho) = \frac{1}{4} (\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{C}\|^2 - k_{\max}), \quad (1)$$

上式中 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$ 是个列向量 $\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_i a_i^2$, $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ 是个矩阵且 $\|\mathbf{C}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{C}^t \mathbf{C})$, k_{\max} 为矩阵 $\mathbf{a}\mathbf{a}^t$ 的最大本征值, t 表示矢量或者矩阵的转置.

3 阻尼 Jaynes-Cummings 模型及解

典型的阻尼 Jaynes-Cummings 模型可以用下图 1 来描述其中 g 表示原子和腔场的耦合强度, γ 是二能级原子从激发态随机衰变到基态的衰减强度, 也就是耗散阻尼系数.

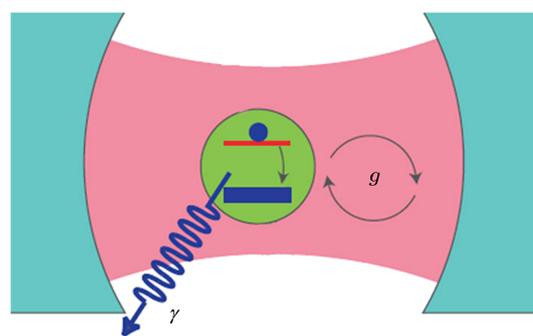


图 1 典型的阻尼 Jaynes-Cummings 模型

当两个原先没有相互作用的二能级原子各自与一个单模腔场相互作用时, 整个系统可以用以下的 Hamiltonian 来描述:

$$H = \omega \sigma_z^A + \omega \sigma_z^B + \nu a^\dagger a + \nu b^\dagger b + g(a^\dagger \sigma_-^A + a \sigma_+^A) + g(b^\dagger \sigma_-^B + b \sigma_+^B)$$

$$-i\frac{\gamma}{2}(|e\rangle_B\langle e| + |e\rangle_A\langle e|), \quad (2)$$

上式中我们已经用了旋波近似式中 $a(b)$ 和 $a^\dagger(b^\dagger)$ 各自表示两个腔场的湮没和产生算符, $|e\rangle$ 表示原子处于激发态, $|g\rangle$ 表示原子处于基态. 且 $\sigma_Z^l = |e\rangle_l\langle e| - |g\rangle_l\langle g|$, $\sigma_+^l = |e\rangle_l\langle g|$, $\sigma_-^l = |g\rangle_l\langle e|$ 是原子算符, 其中 $l = A, B$ 表示两个原子. 这里, 我们已经假设原子 A 和 B 的跃迁频率都为 ω , 腔场频率为 ν , 而且他们与各自腔场的耦合强度都为 g . 两个二能级原子从激发态随机衰变到基态的衰减强度都为 γ . 为了简单, 我们假设腔场最初都处于真空态即: $|0\rangle_a \otimes |0\rangle_b = |00\rangle$, 并且两个原子初始时处于贝尔型的量子纠缠态. 在这些假设下, 两个腔中光子数各自最多是 1. 以下分两种情况求解此模型.

3.1 初始时两二能级原子处于纠缠态

$$|\Psi_{\text{atom}}(0)\rangle = \cos\alpha|eg\rangle + \sin\alpha|ge\rangle$$

这里约定: $|mn\rangle$, m 与 n 各指原子 A 或 B , m 与 n 都可以取 e 与 g . 这样整个原子-腔场体系的初始态可以表示为

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= |\Psi_{\text{atom}}(0)\rangle \otimes |00\rangle \\ &= \cos\alpha|eg00\rangle + \sin\alpha|ge00\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

α 用来控制幅度. 任意时刻体系的量子态为

$$\begin{aligned} |\Psi(T)\rangle &= x_1[T]|eg00\rangle + x_2[T]|ge00\rangle \\ &\quad + x_3[T]|gg10\rangle + x_4[T]|gg01\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

相应的每项系数为

$$\begin{aligned} x_1[T] &= \frac{1}{2}M_- \cos\alpha e^{-\frac{T(\xi_+ + \eta_-)}{4}}, \\ x_2[T] &= \frac{1}{2}M_- \sin\alpha e^{-\frac{T(\xi_+ + \eta_-)}{4}}, \\ x_3[T] &= -2i \cos\alpha \frac{\zeta_-}{\eta_-} e^{-\frac{T(\xi_+ + \eta_-)}{4}}, \\ x_4[T] &= -2i \sin\alpha \frac{\zeta_-}{\eta_-} e^{-\frac{T(\xi_+ + \eta_-)}{4}}, \end{aligned} \quad (5)$$

上式中 $T = gt$, $\delta = \nu - \omega$ 代表失谐量, $\kappa = \gamma/g$ 并且

$$\begin{aligned} \xi_{\pm} &= \kappa \pm (2i\delta/g) \\ \eta_{\pm} &= \sqrt{-16 + \xi_{\pm}^2}, \\ \zeta_{\pm} &= -1 + e^{T\eta_{\pm}/2}, \\ M_{\pm} &= 1 + e^{T\eta_{\pm}/2} - \zeta_{\pm}\xi_{\pm}/\eta_{\pm}. \end{aligned}$$

通过方程 (4) 我们可以求得两个原子体系的密度矩阵 $\rho_{AB} = \text{Tr}_{ab}|\Psi(T)\rangle\langle\Psi(T)|$, 其中 Tr_{ab} 表示对 a, b 两个腔场求迹采取标准基矢 $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$, 两原子的密度矩阵可以表示为

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |x_1|^2 & x_1x_2^* & 0 \\ 0 & x_2x_1^* & |x_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |x_3|^2 + |x_4|^2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

式子中的 * 代表复共轭.

3.2 初始时两二能级原子处于纠缠态

$$|\Psi_{\text{atom}}(0)\rangle = \cos\alpha|ee\rangle + \sin\alpha|gg\rangle$$

这种情况下, 整个体系在任意时刻的状态可以用下式表示:

$$\begin{aligned} |\Phi(T)\rangle &= x_1[T]|ee00\rangle + x_2[T]|gg11\rangle \\ &\quad + x_3[T]|eg01\rangle + x_4[T]|ge10\rangle \\ &\quad + x_5[T]|gg00\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} x_1[T] &= \frac{1}{2\eta_-^2} \left\{ \cos\alpha e^{-T(\kappa+2i\nu/g+\eta_-)/2} \right. \\ &\quad \times [-8(2+\zeta_-)^2 - \zeta_-(2+\zeta_-)\eta_- \xi_- \\ &\quad \left. + (1+(1+\zeta_-)^2)\xi_-^2 \right\}, \\ x_2[T] &= -4e^{-T(\kappa+2i\nu/g+\eta_-)/2} \left(\frac{\zeta_-}{\eta_-} \right)^2 \cos\alpha, \\ x_3[T] &= x_4[T] \\ &= -\frac{i}{\eta_-^2} \left\{ \cos\alpha e^{-T(\kappa+2i\nu/g+\eta_-)/2} \right. \\ &\quad \left. \times [-\zeta_-^2\xi_- + (-1+e^{T\eta_-})\eta_-] \right\}, \\ x_5[T] &= e^{2iT\omega/g} \sin\alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

同样地, 可以得到此时两原子的密度矩阵为

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} |x_1|^2 & 0 & 0 & x_1x_5^* \\ 0 & |x_3|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |x_4|^2 & 0 \\ x_5x_1^* & 0 & 0 & |x_2|^2 + |x_5|^2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

各符号意义及约定同第一初态.

4 讨论

基于前面的模型解和 GQD 度量方法介绍, 通过数值计算, 可以得到方程 (6) 和 (9) 所表示的两原子量子态的几何量子失协 D^{AB} . 计算表明对于不同的两种初态, 原子间的量子关联动力学几乎一样, 以下仅给出两原子初始时处于 $|\Psi_{\text{atom}}(0)\rangle = \cos\alpha|eg\rangle + \sin\alpha|ge\rangle$ 的结果. 从两个方面讨论其演化行为: 1) 考察原子与腔场发生共振时量子关联的动力学行为; 2) 原子与腔场如果是非共振耦合, 两者之间的频率差称为失谐量, 研究失谐量对量子关联的影响. 两个方面都将涉及到耗散阻尼的作用.

4.1 共振条件下量子关联动力学

我们首先考虑共振条件下量子关联的时间演化特性 (即 $\delta = \nu - \omega = 0$). 取 $\kappa = 0, \kappa = 0.3g, \kappa = g$ 分别代表零耗散、弱耗散和强耗散, 开始时两原子处于最大纠缠态, 其量子关联也是最大值. 在相互作用开始之后 (即 $T > 0$), 对于零耗散情形, 量子关联逐渐降低到最小值, 之后, 再次上升并做周期相同的规则震荡. 从图 2 可以看出: 对于同样的初始态, 随着阻尼耗散的逐渐介入, 量子关联能达到的最大值越来越小并迅速消失. 而且从图 3 中还可看出: 演化中处于无量子失协的时间段在增加, 这一点与文献 [18] 报道的阻尼耗散可以缩短量子纠缠猝死的时间很不同. 而且更不会出现类似于量子纠缠的猝死行为, 再一次证实了量子失协与量子纠缠不一样的特性. 在实际的系统中, 处于基态 $|g\rangle$ 的原子是稳定的, 但是当原子处于激发态 $|e\rangle$ 时, 诸如自发辐射等因素将会导致高能级原子的衰变. 事实上, 除了基态, 实际的多能级原子都会从高能级部分地衰变到其他能级, 因此阻尼衰变系数将会很大程度上影响量子关联的演化行为. 同时可以看到随着 α 从 $\pi/4$ 到 $\pi/8$ 的逐渐增大, 不仅初始以及演化过程中能达到的最大的量子失协值降低了, 而且演化过程中零量子失协的时间段也在增加.

4.2 失谐量对量子关联的影响

结果表明失谐量可以控制量子关联性质, 甚至改变量子关联的演化行为, 这里只讨论 $\alpha = \pi/6$ 的情况, 如图 3. 无阻尼耗散时, 失谐的存在可以整体

提高量子关联的值, 而且延缓其演化的周期. 阻尼存在时, 尽管失谐某种程度上也提高了量子关联, 但量子关联衰减直至消失的时间会越来越快.

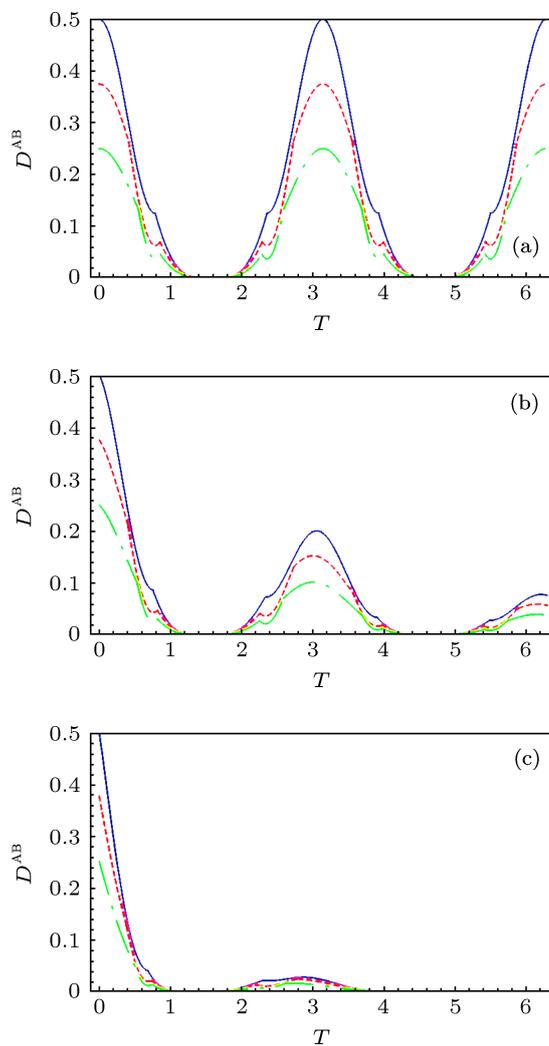


图 2 初态为 $|\Psi_{\text{atom}}(0)\rangle = \cos\alpha|eg\rangle + \sin\alpha|ge\rangle$ 且共振情形下两原子之间的量子关联 (蓝色实线代表 $\alpha = \pi/4$, 红色虚线代表 $\alpha = \pi/6$, 绿色点划线代表 $\alpha = \pi/8$) (a) 阻尼耗散系数 $\kappa = 0$; (b) $\kappa = 0.3g$; (c) $\kappa = g$

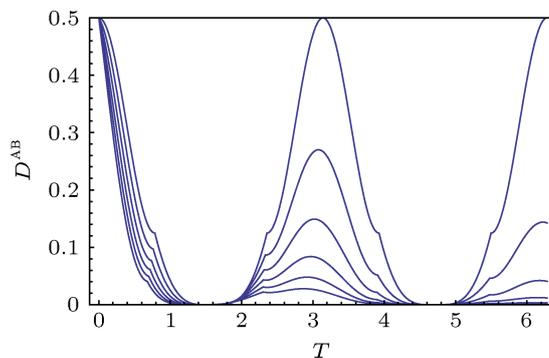


图 3 初态为 $|\Psi_{\text{atom}}(0)\rangle = \cos\alpha|eg\rangle + \sin\alpha|ge\rangle$ 且共振情形下两原子之间的量子关联 (从上到下阻尼耗散系数依次为 $0.2g, 0.4g, 0.6g, 0.8g, g$)

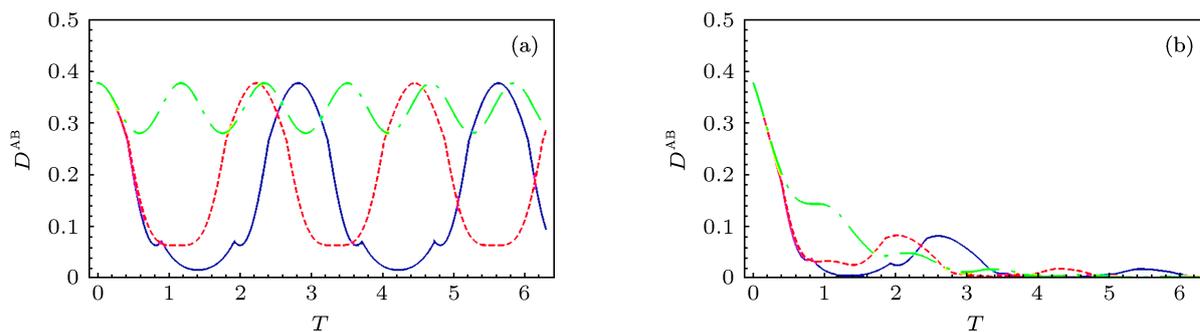


图4 初态为 $|\Psi_{\text{atom}}(0)\rangle = \cos\alpha|eg\rangle + \sin\alpha|ge\rangle$ 时非共振情形下两原子的量子关联 (蓝色实线代表 $\delta = 1$, 红色虚线代表 $\delta = 2$, 绿色点划线代表 $\delta = 5$) (a) 阻尼耗散系数 $\kappa = 0$; (b) $\kappa = 0.5g$

5 结论

我们考察了在共振和失谐情况下, 阻尼 Jaynes-Cummings 模型中两原子间的量子关联动力学. 发现阻尼耗散会使量子关联能达到的最大值越来越小并迅速消失, 阻尼耗散对几何量子失协的影响不同

于对量子纠缠的影响. 腔场频率与原子频率之间的失谐可以提高几何量子失协的值, 某种程度上甚至改变几何量子失协的演化行为. 无论是共振还是非共振, 几何量子失协都不会出现类似于量子纠缠的猝死行为.

- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [2] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
- [3] Henderson L, Vedral V 2001 *J. Phys. A Math. Gen.* **34** 6899
- [4] Ollivier H, Zurek W H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 017901
- [5] Datta A, Shaji A, Caves C M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 050502
- [6] Lanyon B P, Barbieri M, Almeida M P, White A G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 200501
- [7] Pellizzari T, Gardiner S A, Cirac J I, Zoller P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3788
- [8] Cirac J I, Zoller P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4091
- [9] Cory D G, Fahmy A F, Havel T F 1997 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **94** 1634
- [10] Imamoglu A, Awschalom D D, Burkard G, Divincenzo D P, Loss D, Sherwin M, Small A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4204
- [11] Wang H X, Yin W, Wang F W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5241 (in Chinese) [王海霞, 殷雯, 王芳卫 2010 物理学报 **59** 5241]
- [12] Shnirman A, Schon G, Hermon Z 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2371
- [13] Pan H Z, Kuang L M 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 424
- [14] Pellizzari T, Gardiner S, Cirac J, Zoller P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3788
- [15] Lu D M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120303 (in Chinese) [卢道明 2011 物理学报 **60** 120303]
- [16] Groisman B, Popescu S, Winter A 2005 *Phys. Rev. A* **72** 032317
- [17] Dakic B, Vedral V, Brukner C 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 190502
- [18] Zhang G F, Xie X C 2010 *Eur. Phys. J. D* **60** 423

The dynamics of quantum correlation between two atoms in a damping Jaynes-Cummings model*

Fan Kai-Ming Zhang Guo-Feng[†]

(Department of Physics, School of Physics and Nuclear Energy Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

(Received 1 February 2013; revised manuscript received 18 March 2013)

Abstract

The geometrical quantum discord (GQD) is an effective measure of quantum correlation in quantum systems. We investigate the dynamics of quantum correlation between two atoms in a damping Jaynes-Cummings (J-C) model according to the geometrical quantum discord. The evolutionary characteristics of GQD are given for both the resonant and non-resonant cases; moreover, the effect of damping on GQD is revealed.

Keywords: damping Jaynes-Cummings model, quantum correlation, geometrical quantum discord (GQD)

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Hk

DOI: 10.7498/aps.62.130301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11174024, 61227902).

[†] Corresponding author. E-mail: gf1978zhang@buaa.edu.cn