

半导体光折变介质中光束传输的自囚禁及周期调制

邢耀亮 杨志安[†]

(济南大学物理科学与技术学院, 济南 250022)

(2013年2月5日收到; 2013年2月23日收到修改稿)

推导了光束在半导体光折变介质的光子晶格中演化的二能级形式, 给出了光束在其中传播时二能级方程的经典正则形式. 解析计算出了经典正则方程的不动点并对其稳定性作了分析, 计算出了拓扑结构变化的临界值. 根据二能级方程的经典正则形式做出了空间相图, 进一步分析了半导体光折变介质中光束传输的自囚禁现象, 发现有两种形式的自囚禁: 1) 能级中的布居数差和相对相位都在平衡点附近振动; 2) 能级中的布居数差在平衡点附近振动, 而相对相位单调变化. 分别从高频、低频、中频三个方面研究了外加周期调制对自囚禁的影响, 发现在高频调制中发生自囚禁现象的相变参数能够被周期场非常有效的调制, 使得光束在半导体光折变介质中传输时, 在非线性效应影响较小时也能够发生自囚禁.

关键词: 半导体光折变介质, 自囚禁, 二能级形式, 周期调制

PACS: 03.65.-w, 42.65.-k, 42.50.-p

DOI: 10.7498/aps.62.130302

1 引言

对光折变介质中光束传输的研究是一项既有理论价值又有实际意义的工作, 在光学信息处理(如全光空间调制和图象处理, 全光开关, 全光互连, 以及全光逻辑光路等方面)、集成光学、光学双稳、光存储、光互联及光计算等许多方面具有广阔的潜在应用前景.

对于光折变效应^[1]的研究, 人们已经制备出各种光折变材料^[2-4], 如屏蔽^[5,6]、光伏^[5,6]、半导体^[4]等光折变材料, 人们更多地是研究在这些材料中光孤子^[7-9]的传播行为. 2006年陈守满等人利用变分方法求解了小光强光折变非线性薛定谔方程, 得到了高斯光束在外加正偏压光折变晶体中的演化特性, 以及高斯光束宽度压缩与展宽的动态振荡规律^[10]. 2007年, 汪德生, 余卫龙用数值方法研究了对向传播条件下不同频率的光孤子的相互作用行为^[11]. 同年 Wang 等在实验上观测到了二维空间中, 鞍点上的空间光孤子^[12]. 目前实验上已经发现了光孤子的隧穿现象并且也给出了理论解释^[13], 但其解释还是局限于线性范围. 2009年, 王

沙等人推导出光束在三种光折变介质: Kerr 介质、屏蔽介质和光伏介质的一维光子晶格中演化的二能级模型, 并详细研究了在这三种光折变介质中光束传播时的非线性 Landau-Zener 隧穿行为^[5,6].

对光折变介质中光束传输的非线性现象, 如几何相位(如贝里相^[14-17])、Landau-Zener 隧穿^[18-21]、纠缠^[22,23]、自囚禁^[24,25]、混沌^[26-28]等一系列问题, 目前有待进一步研究. 另外, 一些光折变介质, 如半导体光折变介质目前也未见相关报道.

本文讨论了光束在半导体光折变介质中演化的自囚禁行为.

2 半导体光折变介质中光束传播的二能级模型

在光折变介质的二维光格子中, 光束演化方程^[29,30]为

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} \right) + [U(\xi) + \alpha \cdot \xi + f(\psi)] \psi = 0, \quad (1)$$

[†] 通讯作者. E-mail: ss.yangza@ujn.edu.cn

在方程中, η 是光束传播方向的坐标, ξ 是垂直光束传播方向的横向坐标, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 是二维空间变量. $U(\xi) = v \cos(2q\xi_1)$, 与光格子的形式有关, v 是常数, 正比于激光强度, q 是激光的波数, 本文取 $q = 1/2$. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, 和外加的横向偏压有关. 函数 $f(\psi)$ 描述光折变介质的非线性行为.

对半导体光折变介质, 非线性函数为

$$f(\psi) = \frac{g}{(1 + |\psi|^2)^2} \quad [4]$$

g 是描述非线性强度的系数. 这时方程 (1) 为

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} \right) + \left[v \cos(2q\xi_1) + \alpha \cdot \xi + \frac{g}{(1 + |\psi|^2)^2} \right] \psi = 0. \quad (2)$$

为讨论自囚禁问题, 需方程 (2) 的二能级形式. 做两模近似 [29]

$$\psi = [a_1(\eta) e^{ik(\eta)\xi_1} + a_2(\eta) e^{i[k(\eta) - 2q]\xi_1}] e^{il(\eta)\xi_2}, \quad (3)$$

设 $\frac{dk}{d\eta} = \alpha_1$, $\frac{dl}{d\eta} = \alpha_2$, 将 (3) 代入 (2) 式, 并消去共

同的因子 $e^{il\xi_2}$, 作变换 $a_1 = |a_1| e^{i\theta_1}$, $a_2 = |a_2| e^{i\theta_2}$, $\theta_2 - \theta_1 = \theta$. 用 $e^{-ik\xi_1}$ 左乘, 令 $y = -2q\xi_1 + \theta$, 两边对 y 从 0 到 2π 积分, 考虑到 $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$, 得

$$i \frac{da_1}{d\eta} = \frac{1}{2}(k^2 + l^2)a_1 - \frac{1}{2}va_2 - \frac{1}{4}g \frac{|a_1|^2 a_1}{(1 - |a_1|^2 |a_2|^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

按同样做法, 用 $e^{-i(k-2q)\xi_1}$ 左乘, 类似地作变换 $2q\xi_1 - \theta = x$, 所以 $2q\xi_1 = x + \theta$, 并对 x 从 0 到 2π 积分, 得

$$i \frac{da_2}{d\eta} = \frac{1}{2}[(k-2q)^2 + l^2]a_2 - \frac{1}{2}va_1 - \frac{1}{4}g \frac{|a_2|^2 a_2}{(1 - |a_1|^2 |a_2|^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

上述计算中用到了留数定理.

取 $\alpha_1 = \beta$, $k = q - \alpha_1 \zeta = q - \beta \zeta$, 作变换

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{2} \left(\int \eta l^2 d\eta + q^2 \eta + \frac{1}{3} \beta^2 \eta^3 \right)} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

整理得到方程 (4), (5) 的矩阵形式为

$$i \frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4} \frac{g|a|^2}{(1 - |a|^2|b|^2)^{3/2}} & -\frac{1}{2}v \\ -\frac{1}{2}v & \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4} \frac{g|b|^2}{(1 - |a|^2|b|^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (6)$$

式中 γ 表征二能级间的能级差, v 表示二能级之间的耦合程度, g 表示非线性效应对系统的影响程度.

3 半导体光折变介质二能级模型的经典形式

令 $a = |a| e^{i\theta_a}$, $b = |b| e^{i\theta_b}$, 并引入布居数差 $s = |b|^2 - |a|^2$ 以及相对相位 $\theta = \theta_b - \theta_a$, 新变量 s, θ 是一对正则变量, 推导出方程 (6) 的正则变量形式

$$\frac{ds}{d\eta} = v \sqrt{1 - s^2} \sin \theta, \quad (7)$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = -\gamma - v \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} \cos \theta + 2g \frac{s}{(3 + s^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

方程 (7), (8) 满足正则方程 $\frac{ds}{d\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$, $\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{\partial H}{\partial s}$, 通过计算可得到对应系统的经典哈密顿形式

$$H(s, \theta, \gamma) = -\gamma s + v \sqrt{1 - s^2} \cos \theta$$

$$-2g \frac{1}{\sqrt{3 + s^2}}. \quad (9)$$

4 半导体光折变介质正则方程的不动点和稳定性分析及拓扑结构变化的临界值

4.1 半导体光折变介质正则方程的不动点求解

由于正则方程的不动点对应非线性二能级系统的本征态, 由 (7) 和 (8) 式, 不动点满足的方程组为

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{ds}{d\eta} = -v \sqrt{1 - s^2} \sin \theta = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{d\theta}{d\eta} = -\gamma - v \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} \cos \theta + 2g \frac{s}{(3 + s^2)^{3/2}} = 0.$$

在此讨论 $\gamma = 0$ 的情况, 可以解析求出两个不动点 ($s = 0, \theta = 0$) 和 ($s = 0, \theta = \pi$). 而当 $\frac{9}{2} \leq x + y \leq 6$ 时, 又可求出两个不动点, 为 ($s = \pm \sqrt{\frac{2}{3}(x+y) - 3}, \theta = 0$), 其中

$$x = \left(27 \frac{g^2}{v^2} - 3 \frac{g^2}{v^2} \sqrt{3 \frac{g^2}{v^2} + 81} \right)^{1/3},$$

$$H_J = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \theta} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{vs \sin \theta}{\sqrt{1-s^2}} & v\sqrt{1-s^2} \cos \theta \\ -\frac{v \cos \theta}{(1-s^2)^{3/2}} + \frac{2g(3-2s^2)}{(3+s^2)^{5/2}} & \frac{vs \sin \theta}{\sqrt{1-s^2}} \end{pmatrix}.$$

在四个不动点中, 先对 ($s = 0, \theta = 0$) 和 ($s = 0, \theta = \pi$) 这两个不动点进行稳定性分析.

在不动点附近有线性化本征方程

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \theta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \theta \end{pmatrix},$$

上式有非零解的充要条件是 $\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0$, 其中 $T = \alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$, 即 $\lambda = \pm i\sqrt{\Delta}$, 其中

$$\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = -\frac{(vs \sin \theta)^2}{1-s^2} - \frac{(v \cos \theta)^2}{(1-s^2)} + \left(\frac{2g(3-2s^2)}{(3+s^2)^{5/2}} \right) (v\sqrt{1-s^2} \cos \theta).$$

经计算得出以下结论:

1) 当 $0 < g < \frac{3\sqrt{3}}{2}v \approx 2.598v$ 时, 相空间中只存在两个不动点 ($s = 0, \theta = 0$) 和 ($s = 0, \theta = \pi$). 由稳定性分析, 这两个不动点的 $\Delta > 0$, 因此这两个不动点都是椭圆不动点, 其不动点的指数和 $\chi = 2$, χ 是欧拉示性数, 是一个拓扑不变量.

2) 当 $g > \frac{3\sqrt{3}}{2}v$ 时, 相空间中共有 4 个不动点, 其中不动点 ($s = 0, \theta = \pi$) 的 $\Delta > 0$, 是椭圆不动点, 不动点 ($s = 0, \theta = 0$) 的 $\Delta < 0$, 是一个双曲不动点. 这两个不动点的指数和为 0, 由于全空间的欧拉示性数 $\chi = 2$ 是一个拓扑不变量, 由此推测还应有两个椭圆不动点, 根据 4.1 节, 这两个对应的椭圆不动点为 ($s = \pm \sqrt{\frac{2}{3}(x+y) - 3}, \theta = 0$).

3) 当 $g = \frac{3\sqrt{3}}{2}v$ 时, 是临界点, 表征相空间中 2 个不动点与 4 个不动点之间转化的临界状态.

$$y = \left(27 \frac{g^2}{v^2} + 3 \frac{g^2}{v^2} \sqrt{3 \frac{g^2}{v^2} + 81} \right)^{1/3}.$$

4.2 半导体光折变介质正则方程的稳定性分析

半导体光折变介质系统的哈密顿-雅各比矩阵为

$$H_J = \begin{pmatrix} -\frac{vs \sin \theta}{\sqrt{1-s^2}} & v\sqrt{1-s^2} \cos \theta \\ -\frac{v \cos \theta}{(1-s^2)^{3/2}} + \frac{2g(3-2s^2)}{(3+s^2)^{5/2}} & \frac{vs \sin \theta}{\sqrt{1-s^2}} \end{pmatrix}.$$

4.3 半导体光折变介质拓扑结构变化的临界值

临界状态即为相空间中 2 个不动点与 4 个不动点之间转化的瞬间, 由图 1(d), (e) 可看出, 此时, 在临界点处, H 的一阶导数和二阶导数都为零. 于是可以得到 S_c (临界状态的 s 值) 满足的方程:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \Big|_{s_c} = -\frac{v \cos \theta}{(1-s_c^2)^{3/2}} + 2g \frac{3-2s_c^2}{(3+s_c^2)^{5/2}} = 0. \quad (10)$$

通过 4.2 节所得结论以及图 1(d), (e) 都可看出, 临界状态发生在相空间 ($s = 0, \theta = 0$) 处. 将 $s = 0, \theta = 0$ 代 (10) 式, 我们确定出非线性参数的临界值 $g_{c1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}v \approx 2.598v$.

通过图 1(e), (f) 可以看出在还有一临界值, 此临界值表征两种不同的自囚禁: 1) 能级中的布居数差和相对相位都在平衡点附近振动; 2) 能级中的布居数差在平衡点附近振动, 而相对相位单调变化. 在发生两种不同自囚禁替换瞬间, 哈密顿量在 ($s = 0, \theta = 0$) 与 ($s = \pm 1, \theta = 0$) 处的值应相等. 代入经典哈密顿方程 (9), 可得出这一临界值为 $g_{c2} = (2\sqrt{3} + 3)(v + \gamma) \approx 6.464(v + \gamma)$.

5 不加调制时半导体光折变介质的自囚禁

哈密顿系统在相平面中的演化有两种不同的种类: 不动点以及不动点周围的轨道, 改变参数的数值, 将会有三种不同的演化情况, 如图 1 所示. 本文研究的是能级为零的情况.

当非线性参数较小时, 相图中有两个不动点 p_1 和 p_2 , 如图 1(a) 所示, 分别在 ($s = 0, \theta = 0$)

和 $(s = 0, \theta = \pi)$ 两点处, 它们都是稳定的不动点. 对于两个不动点周围的轨道, 布居数差 s 都在 $[-1, 1]$ 间变化. 不动点 p_1 的相对相位 θ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内变化, 系统等效的经典哈密顿 H 在 $[-g, v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g]$ 内变化; 不动点 p_2 的相对相位 θ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 内变化, H 在 $[-v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g, -g]$ 内变

化. 其中轨道 $s = \pm 1$ 对应的 $H = -g$; 系统等效的经典哈密顿的最大值为 $H = v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g$, 最小值为 $H = -v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g$. 此时, 不动点周围光束平衡分布, 它周围的轨道对应于光束在二能级间振荡, 布居数差对 η 的平均值 $\langle s \rangle = 0$.

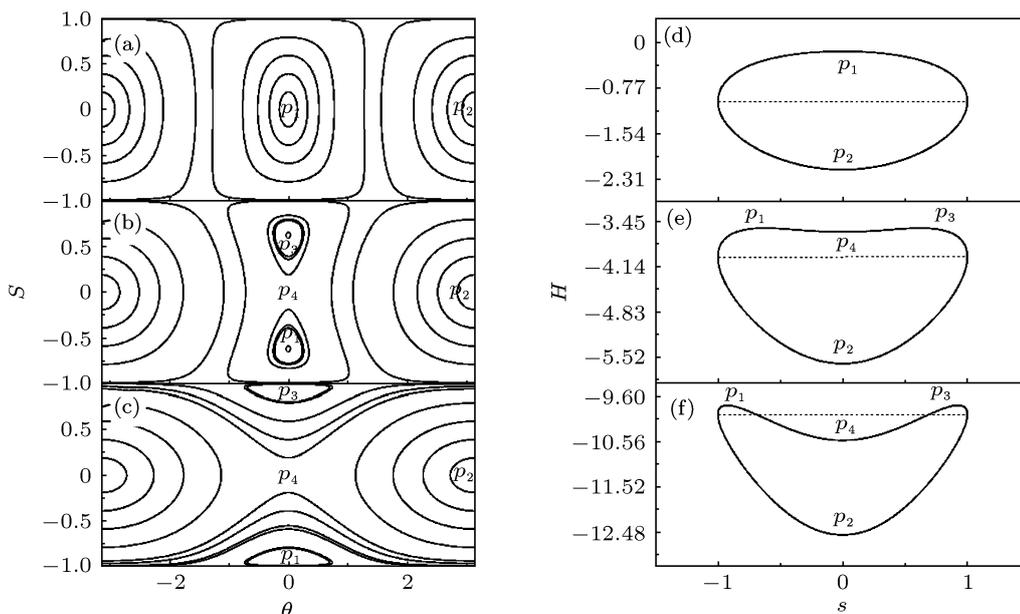


图1 相平面中系统哈密顿的演化 (a), (b), (c) 分别对应 $g = 1, 4, 10$ 时能级中布居数差与相对相位的关系; (d), (e), (f) 是对应的能量图, 其中虚线下半部对应 $\theta = \pi$, 上半部对应 $\theta = 0$

当非线性参数增大到 $g > \frac{3\sqrt{3}}{2}v \approx 2.598v$ 时, 相平面里在 $\theta = 0$ 这条线上出现新的不动点: 稳定不动点 p_1, p_3 和不稳定不动点 p_4 , 它们分别在 $s = -d, 0, d$ 处, 其中 $d = \sqrt{\frac{2}{3}(x+y) - 3}$, 并且出现了绕这三个不动点的公共轨道. 对于这些公共轨道 s 在 $[-1, 1]$ 内变化, H 在 $[-g, v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g]$ 内变化, 布居数差对 η 的平均值 $\langle s \rangle = 0$. 对于不动点 p_1, p_3 周围的封闭轨道, 能量是简并的, 在 $[v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g, -h]$ 间变化, 其中

$$h = \frac{2g}{\sqrt{\frac{2}{3}(x+y)}} - v\sqrt{4 - \frac{2}{3}(x+y)},$$

但 s 分别在 $[-s_c, 0]$ 和 $[0, s_c]$ 内变化, θ 在平衡点附近振荡, 可以看出对不动点 p_1, p_3 来说, 光束是不平衡分布的; 围绕它们的轨道, 布居数差 s 对 η 的平均值不为零, 即 $\langle s \rangle \neq 0$, 发生了自囚禁. 不动点 p_4 实际上是等效经典系统哈密顿的鞍点, 相应的

$H = v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g$. 不动点 p_2 依旧在原来的位置上, 与它周围的轨道对应的 s, θ 的振荡范围没有变化, H 仍然在 $[-v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g, -g]$ 间变化.

当非线性参数增大到 $g > (2\sqrt{3} + 3)v \approx 6.464v$ 时, 在 $\theta = 0$ 这条线上围绕三个不动点的公共轨道消失, 相空间里有新的轨道出现. 对这些新轨道来说, 能量是简并的, H 在 $[v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g, -g]$ 内变化, s 在 $[-1, 0]$ 和 $[0, 1]$ 内振荡, 相对相位 θ 单调增加, 很明显, 和此对应的 $\langle s \rangle \neq 0$, 光束发生自囚禁. 不动点 p_1, p_2, p_3 以及不动点 p_1, p_3 周围的轨道仍旧存在. 对于围绕 p_1, p_3 的那些轨道, 分别在 $[-1, -s_c]$ 和 $[s_c, 1]$ 内变化, θ 在不动点附近振荡, 能量是简并的, 它在 $[-g, -h]$ 内变化. 对于绕 p_2 的那些轨道, s, θ 的振荡范围不变, H 在 $[-v - \frac{2\sqrt{3}}{3}g, -g]$ 内变化, 这说明振荡自囚禁和约瑟夫森振荡^[25] 仍然存在. 不动点 p_4 位置不变.

由上面的分析可知, $\frac{g}{v} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 是发生相对相位在平衡点附近振荡的自囚禁的临界条件; $\frac{g}{v} = 2\sqrt{3} + 3$ 是发生相对相位单调变化的自囚禁的临界条件, 这个临界值与通过 $s = \pm 1$ 的轨道(即相平面中不动点 p_2 周围最外层的轨道)从约瑟夫森振荡向自囚禁转变的临界值是一致的。

从图 2 可看出 $g = 1$ 时通过 $s = 0.7$ 的轨道为约瑟夫森振荡, 此时光束在半导体光折变介质中传输时均匀的在两能级间来回振荡; $g = 4$ 时发生第一

种自囚禁, 光束在介质中传输时大部分在其中一个能级中传输; $g = 10$ 时发生第二种自囚禁, 光束在介质中传输时, 在光束传输的某些周期性的点上会发生完全在某一能级中传输的情形。

6 加周期调制时半导体光折变介质的自囚禁

在系统能级上加上周期调制 $A \sin \omega \eta$, 系统的哈密顿变为

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A \sin \omega \eta - \frac{1}{4} \frac{g|a|^2}{(1-|a|^2|b|^2)^{3/2}} & -\frac{1}{2}v \\ -\frac{1}{2}v & \frac{1}{2}A \sin \omega \eta - \frac{1}{4} \frac{g|b|^2}{(1-|a|^2|b|^2)^{3/2}} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

下面我们主要讨论的是周期调制对自囚禁的临界条件的影响. 按 ω 大小分三种情况进行讨论, 会得到三种不同的现象。

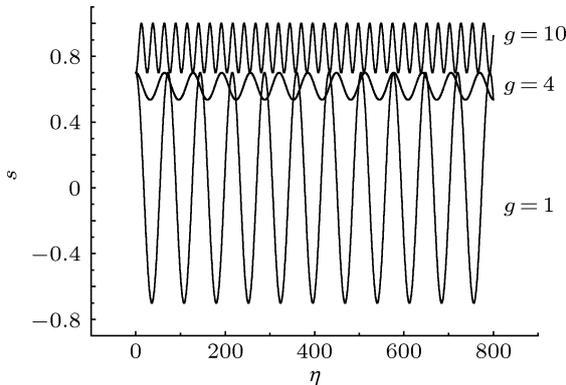


图 2 $v = 1.0$ 不加调制时, 布居数差与 η 的关系 (从下往上分别对应 $g = 1, 4, 10$)

6.1 高频调制 ($\omega \gg v$)

系统加上高频周期调制场 $A \sin \omega \eta$ 后, 薛定谔方程不再是定态的. 作变换

$$a = e^{-i \frac{A}{2\omega} \cos \omega \eta} a', \quad b = e^{i \frac{A}{2\omega} \cos \omega \eta} b',$$

根据式 (7), 薛定谔方程变为

$$i \frac{da'}{d\eta} = -\frac{1}{4} \frac{g|a'|^2}{(1-|a'|^2|b'|^2)^{3/2}} a' - \frac{1}{2} v e^{i \frac{A}{\omega} \cos \omega \eta} b',$$

$$i \frac{db'}{d\eta} = -\frac{1}{4} \frac{g|b'|^2}{(1-|a'|^2|b'|^2)^{3/2}} b' - \frac{1}{2} v e^{-i \frac{A}{\omega} \cos \omega \eta} a',$$

根据公式

$$e^{\pm iz \cos \omega \eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) (\pm i)^n e^{\pm in \omega \eta},$$

其中 $J_n(z)$ 是 n 阶贝塞尔函数, 薛定谔方程变为

$$\begin{aligned} i \frac{da'}{d\eta} &= -\frac{1}{4} \frac{g|a'|^2}{(1-|a'|^2|b'|^2)^{3/2}} a' \\ &\quad - \frac{v}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{A}{\omega}\right) (i)^n e^{in \omega \eta} b', \\ i \frac{db'}{d\eta} &= -\frac{1}{4} \frac{g|b'|^2}{(1-|a'|^2|b'|^2)^{3/2}} b' \\ &\quad - \frac{v}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{A}{\omega}\right) (-i)^n e^{-in \omega \eta} a', \end{aligned}$$

对于 $\omega \gg v$ 的高频调制, 在一个空间周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ 内, a', b' 变化很慢, 在 $\frac{A}{\omega}$ 不是很大的时候, 对上边两式进行积分, 高阶项的贡献很小可以忽略掉^[31,32], 只保留零阶贝塞尔函数项. 这样, 薛定谔方程就变为

$$i \frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} g \frac{|a'|^2}{(1-|a'|^2|b'|^2)^{3/2}} & -\frac{v}{2} J_0\left(\frac{A}{\omega}\right) \\ -\frac{v}{2} J_0\left(\frac{A}{\omega}\right) & -\frac{1}{4} g \frac{|b'|^2}{(1-|a'|^2|b'|^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}, \quad (12)$$

与 (6) 进行对比, 可看出 (12) 式可以近似看成与 (6) 式形式相同的不含时的定态方程. 因此, 高频调制时的自囚禁临界条件可以通过与 (6) 式的非线性参数作对比得到.

推导出布居数差与相对相位随 η 的演化方程为

$$\frac{ds}{d\eta} = vJ_0\left(\frac{A}{\omega}\right)\sqrt{1-s^2}\sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = -vJ_0\left(\frac{A}{\omega}\right)\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\cos\theta + 2g\frac{s}{(3+s^2)^{3/2}},$$

由不加周期调制时临界条件的讨论可看出 $\frac{g}{v} = \frac{3\sqrt{3}}{2}J_0\left(\frac{A}{\omega}\right)$ 是发生自囚禁的临界条件, 而 $\frac{g}{v} = (2\sqrt{3}+3)J_0\left(\frac{A}{\omega}\right)$ 是发生相对相位单调变化的自囚禁的临界条件. 与 (7), (8) 两式作对比, 可看出仅仅只有耦合常数不同, 等效耦合常数变为 $v' = vJ_0\left(\frac{A}{\omega}\right)$. 因为零阶贝塞尔函数值小于 1, 所以高频调制时, 二能级间的有效耦合变小, 因此在一些非线性较强的系统中发生的现象, 如自囚禁在非线性较弱的系统中通过高频周期场调制变得可以发生. 如图 3 所示, 当 $v = 1.0, s = 0.7, g = 3$ 不加周期调制时为约瑟夫森振荡, 而当加高频调制时发生了第一种处囚禁; 如图 4 所示, 当 $v = 1.0, s = 0.7, g = 8$ 不加周期调制时为第一种自囚禁, 而当加高频调制时发生了第二种处囚禁.

6.2 低频调制 ($\omega \ll v$)

当周期调制的频率与两能级间的耦合强度 v 相比非常小时, 含时系统 (11) 可以近似为方程 (6) 的绝热演化 ($\gamma = A\omega\cos\omega\eta$). 根据方程 (6) 的绝热演化性质可以得知, 对一定大的非线性强度, 如果振幅 A 不超过隧穿窗口, 一定为自囚禁, 换句话说, 低频调制时, 其最大强度不超过

$$A = -v\frac{s_c}{\sqrt{1-s_c^2}} + 2g\frac{s_c}{(3+s_c^2)^{3/2}}.$$

当周期调制场的强度 A 大到超过隧穿窗口的大小的程度时, 便不能再自囚禁了, 而是发生量子隧穿, 即朗道齐纳 (Landau-Zener) 隧穿. 所以低频调制时, 发生自囚禁的非线性强度的最小值为

$$g = A\frac{(3+s_c^2)^{3/2}}{s_c} + v\frac{(3+s_c^2)^{3/2}}{\sqrt{1-s_c^2}}.$$

显然低频调制在一定程度上反而破坏了系统的自囚禁, 如图 6 所示, 当 $A = 1, g = 0.5, 4, 7$ 时, 光束在一段距离内传输时为自囚禁, 整体为隧穿, 但 $g = 15$ 时依旧为自囚禁, 而当 $A = 10$ 时, 为隧穿行为.

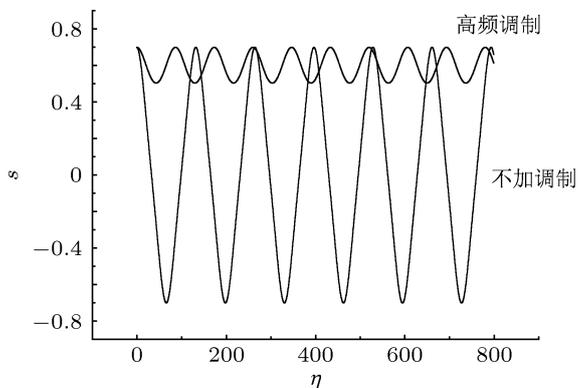


图 3 $v = 1.0, s = 0.7, g = 3$ 时分别在高频与不加调制时布居数差与 η 的关系 (高频调制为 $A/\omega = 1.0$)

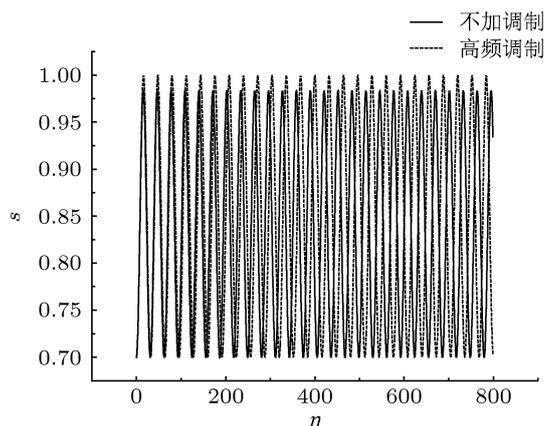


图 4 $v = 1.0, s = 0.7, g = 8$ 时分别在高频与不加调制时布居数差与 η 的关系 (高频调制为 $A/\omega = 1.0$)

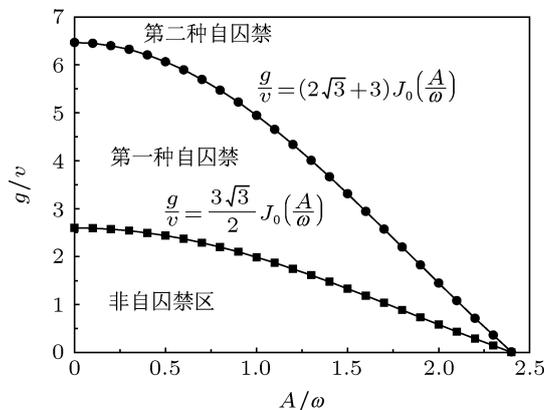


图 5 高频调制时 g/v 与 A/ω 的关系

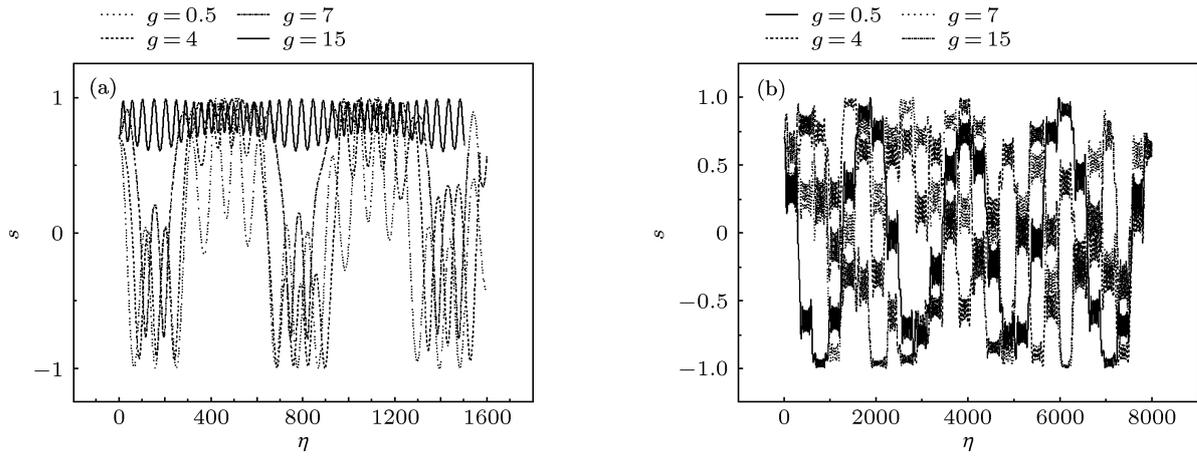


图6 $\nu = 1.0, \omega = 0.01, s = 0.7$ 时布居数差与 η 的关系 (a) 为 $A = 1$; (b) 为 $A = 10$

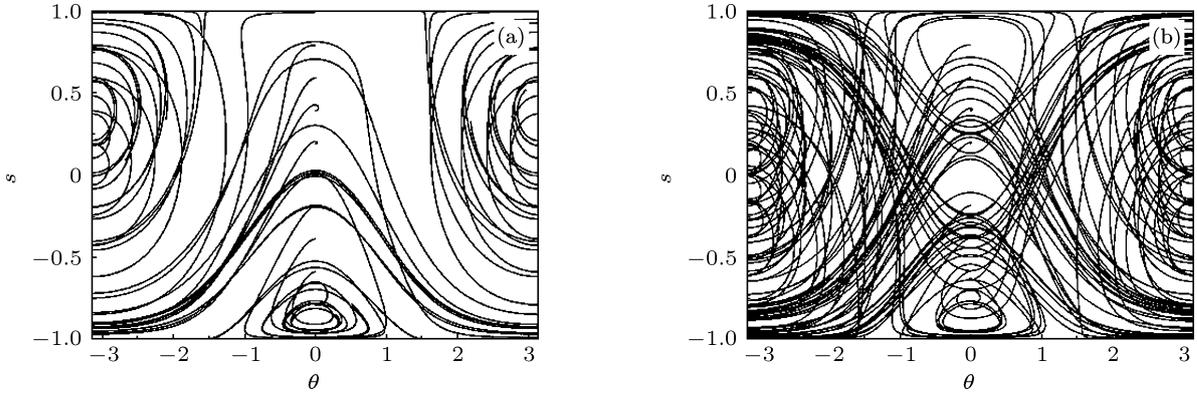


图7 $\nu = 1.0, \omega = 0.01, A = 1, g = 4$ 时的庞加莱截面 (a) 为 $\eta = 200$; (b) 为 $\eta = 1000$

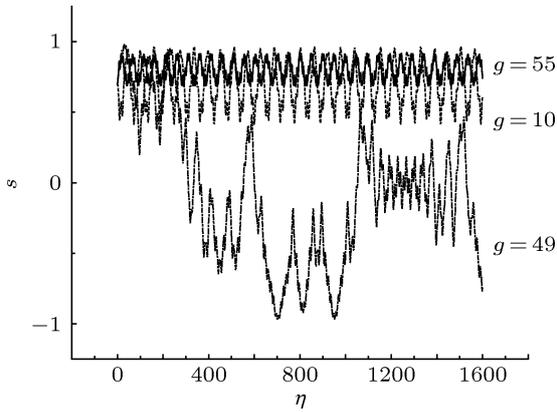


图8 $\nu = 1.0, \omega = 0.5, s = 0.7, A = 10$ 时布居数差与 η 的关系 (从下往上分别对应 $g = 49, 10, 55$)

6.3 中频调制 ($\omega \approx \nu$)

无论是高频调制还是低频调制, 都有使光束自囚禁的明确条件, 高频调制的自囚禁条件为 $\frac{g}{\nu} > \frac{3\sqrt{3}}{2} J_0\left(\frac{A}{\omega}\right)$, 低频调制的条件为

$$g > A \frac{(3+s_c^2)^{3/2}}{s_c} + \nu \frac{(3+s_c^2)^{3/2}}{\sqrt{1-s_c^2}}.$$

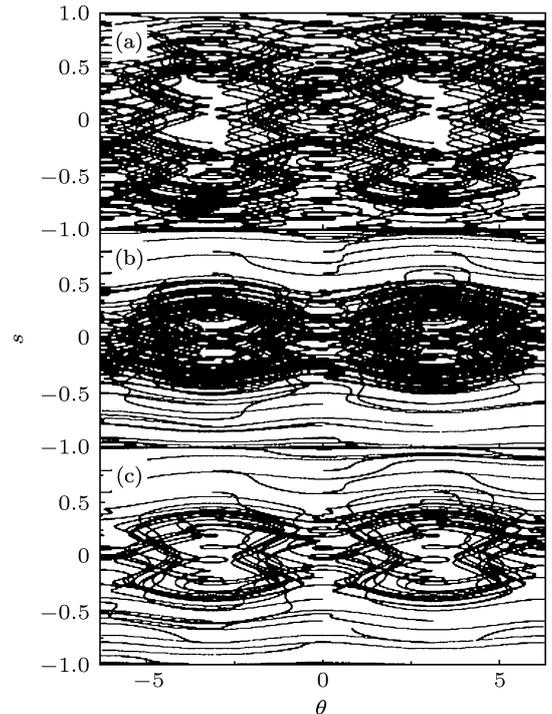


图9 $\nu = 1.0, \omega = 0.5, A = 10$ 时哈密顿在庞加莱截面的演化 (a), (b), (c) 分别对应 $g = 10, 49, 55$

但是当周期调制的频率 ω 与 ν 比较接近时, 情况则比较复杂, 相平面中的各轨道之间发生共振, 光束时而自囚禁时而进入混沌区. 如图 8 所示, 当 $\nu = 1.0$, $\omega = 0.5$ 时, 通过 $s = 0.7$ 的轨道 g 取某些值, 如 $g = 31$ 时为自囚禁, 但再增大一些, 便不能自囚禁了, 如 $g = 33, 49$, 当 g 增大到一定程度时, 便一直是自囚禁了.

7 结论

我们推导了光束在半导体光折变介质的光子晶格中演化的二能级形式, 给出了光束在其中传播时二能级方程的经典正则形式. 解析计算出了经典

正则方程的不动点并对其稳定性作了分析, 计算出了拓扑结构变化的临界值. 根据二能级方程的经典正则形式做出了空间相图, 进一步分析了半导体光折变介质中光束传输的自囚禁现象, 发现有两种形式的自囚禁: 1) 能级中的布居数差和相对相位都在平衡点附近振动; 2) 能级中的布居数差在平衡点附近振动, 而相对相位单调变化. 分别从高频、低频、中频三个方面研究了外加周期调制对自囚禁的影响, 发现在高频调制中发生自囚禁现象的相变参数能够被周期场非常有效的调制, 使得光束在半导体光折变介质中传输时, 在非线性效应影响较小时也能够发生自囚禁.

- [1] Ashkin A, Boyd G D, Dziedzic J M, Smith R G, Ballman A A, Levinstein J J, Nassau K 1966 *Appl. Phys. Lett.* **40** 72
- [2] Wang X D, Yu W L 2011 *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni* **40** 32 (in Chinese) [王晓东, 余卫龙 2011 中山大学学报: 自然科学版 **40** 32]
- [3] Ren Z M 2005 *Laser Journal* **26** 1 (in Chinese) [任占梅, 激光杂志 2005 **26** 1]
- [4] Hou C F, Li S Q, Li F, Sun X D 2001 *Progress In Physics* **21** 237 (in Chinese) [侯春风, 李师群, 李斌, 孙秀冬 2001 物理学进 **21** 237]
- [5] Wang S, Yang Z A 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3699 (in Chinese) [王沙, 杨志安 2009 物理学报 **58** 3699]
- [6] Wang S, Yang Z A 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 729 (in Chinese) [王沙, 杨志安 2009 物理学报 **58** 729]
- [7] Hu Y, Lou C B, Liu S, Zhang P, Zhao J L, Xu J J, Chen Z G 2009 *Opt. Lett.* **34** 1114
- [8] Hu Y, Lou C B, Zhang P, Xu J J, Yang J K, Chen Z G 2009 *Opt. Lett.* **34** 3259
- [9] Zhang P, Liu S, Zhao J L, Lou C B, Xu J J, Chen Z G 2008 *Opt. Lett.* **33** 878
- [10] Chen S M, Shi S X, Dong H Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **56** 1379 (in Chinese) [陈守满, 石顺祥, 董洪舟 2005 物理学报 **56** 1379]
- [11] Wang D S, Yu W L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 245 (in Chinese) [汪德生, 余卫龙 2007 物理学报 **56** 245]
- [12] Wang X S, Chen Z G, Wang J D, Yang J K 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 243901
- [13] Ghulinyan M, Oton C J, Gaburro Z, Pavesi L T C, Wiersma D 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 127401
- [14] Liu J, Fu L B 2010 *Phys. Rev. A* **81** 1114
- [15] Song D Y 2000 *Phys. Rev.* **85** 1141
- [16] Zhu S L, Wang Z D 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1076
- [17] Li S C, Liu J, Fu L B 2011 *Phys. Rev. A* **83** 042107
- [18] Wang G F, Liu F, Fu L B, Zhao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3733 (in Chinese) [王冠芳, 刘斌, 傅立斌, 赵鸿 2007 物理学报 **56** 3733]
- [19] Ye D F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5071 (in Chinese) [叶地发, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2007 物理学报 **56** 5071]
- [20] Zener C 1932 *Proc. R. Soc. London A* **137** 692
- [21] Landau L 1932 *Phys. Z. Sowjetunion* **2** 46
- [22] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2661 (in Chinese) [房永翠, 杨志安, 杨丽云 2008 物理学报 **57** 2661]
- [23] Ma Y, Fu L B, Yang Z A 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5628 (in Chinese) [马云, 傅立斌, 杨志安 2006 物理学报 **55** 5628]
- [24] Liu Z Z, Yang Z A 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1245 (in Chinese) [刘泽专, 杨志安 2007 物理学报 **56** 1245]
- [25] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [26] Xu B, Ming N B 1994 *Phys. Rev. A* **50** 5197
- [27] Valkering T P, Irman A 2004 *Phys. Rev. E* **70** 036610
- [28] McAvity D M, Enns R H, Rangnekar S S 1988 *Phys. Rev. A* **38** 4647
- [29] Shchesnovich V S, Cavalcanti S B, Hickmann J M, Kivshar Y S 2006 *Phys. Rev. E* **74** 056602
- [30] Desyatnikov A S, Kivshar Y S, Shchesnovich V S, Cavalcanti S B, Hickmann J M 2007 *Opt. Lett.* **32** 325
- [31] Yosuke K, Yoshihiko M 2000 *Phys. Rev. A* **62** 061401
- [32] Yosuke K 1994 *Phys. Rev. A* **50** 843

Self-trapping and periodic modulation of beam propagation in semiconductor photorefractive medium*

Xing Yao-Liang Yang Zhi-An[†]

(School of Physics and Technology, University of Jinan, Jinan 250022, China)

(Received 5 February 2013; revised manuscript received 23 February 2013)

Abstract

We have deduced a two-level form of beam evolution in photonic lattices of semiconductor photorefractive medium and its classical canonical form of the two-level equation. We analytically calculate the fixed points of the classical canonical aligns, analyze its stability and calculate the critical value of topology changes. According to the classical canonical form of the two-level equation, we make space phase diagram, further analyze the self-trapping of beam propagation in semiconductor photorefractive medium and find two kinds of self-trapping: 1) Both the population difference and the relative phase in energy levels oscillate near an equilibrium point in the phase space. 2) The population difference in energy levels oscillate near an equilibrium point while the relative phase increases monotonously. From the three aspects of high frequency, low frequency, and intermediate frequency, we investigate how an external periodic field influences the self-trapping and find that the external high frequency periodic field may dramatically modulate the critical points at which the transition to self-trapping occurs. It makes the self-trapping occur with small nonlinear effect when the beam propagates in semiconductor photorefractive medium.

Keywords: semiconductor photorefractive medium, self-trapping, two-level form, periodic modulation

PACS: 03.65.-w, 42.65.-k, 42.50.-p

DOI: 10.7498/aps.62.130302

*

[†] Corresponding author. E-mail: ss_yangza@ujn.edu.cn