

与 Ising 链耦合的中心双量子比特系统的量子关联*

杨阳[†] 王安民[‡]

(中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

(2013 年 1 月 7 日收到; 2013 年 3 月 6 日收到修改稿)

通过对双量子比特系统分别独自与 Ising 链耦合情形下的关联问题的研究, 推导出了量子失协和量子关联几何度量的演化规律. 在弱耦合相互作用情况下 Ising 链的临界点附近, 量子关联存在突变. 此外本文发现在某段时间内的演化过程中几何量子关联度保持不变.

关键词: 量子关联, 量子失协, 量子关联几何度量

PACS: 03.67.Mn, 03.65.Ud, 03.65.Yz

DOI: 10.7498/aps.62.130305

1 引言

量子纠缠在量子信息和量子计算以及量子力学基本问题探讨中, 是一个令人着迷并且有趣的课题. 纠缠在 teleportation^[1], BB84 协议^[2], 量子远程态的制备^[3] 等都有至关重要的作用. 人们在纠缠方面的研究也取得了很大的成就^[4-6]. 但是量子纠缠并不包含所有的量子关联, Olliver 和 Zurek^[7] 引入了量子失协 (quantum discord) 的概念, 量子失协即量子系统中量子互信息与经典关联的差值, 他们认为量子失协比量子纠缠更能刻画量子系统中所包含的关联. 量子失协在理论上和实际上都有很大的用处. 在量子计算中量子失协可以用于确定性的单比特量子计算 (DQC1)^[8,9], 也可用来处理量子相变的问题^[10,11], 在处理相变问题量子失协比量子纠缠更加方便. 最近 Dakić 等人发现量子关联也可用来远程量子态的制备^[12,13]. 量子关联在量子信息和量子计算中是极其重要的.

在现实中, 量子系统不可避免的受到环境的影响, 进而导致退相干现象. 环境对量子关联的影响越来越受到人们的重视^[14-18], 人们发现它与量子纠缠是不同的. 量子纠缠一般会发生纠缠死亡的现象, 而量子关联一般不会出现死亡的现象. 另外,

量子关联的演化还有很多奇妙的现象, 人们发现了非马尔科夫环境下量子关联与经典关联的突然转变^[19,20]. 最近人们也研究了自旋链作为环境下量子系统演化过程中量子关联的变化规律^[21-23].

在本文中, 我们将 Ising 链作为量子系统所处的环境, 考虑双量子比特系统的量子演化规律. 我们获得了任意初态下的演化规律, 进而推导出某些初态的关联演化情况. 我们还推导了量子关联的几何度量的演化, 发现某些态随时间变化而保持不变.

2 哈密顿量演化

由两个中心原子组成的双量子比特系统与 Ising 链独自相耦合的哈密顿量为

$$H = \sum_{l=A,B} H_l + H_I, \quad (1)$$

$$H_l = - \sum_{j=1}^N J(\sigma_{j,l}^z \sigma_{j+1,l}^z + \lambda \sigma_{j,l}^x), \quad (2)$$

$$H_I = - \sum_{j=1}^N \sum_{l=A,B} J \delta \sigma_{j,l}^x |e\rangle_l \langle e|, \quad (3)$$

这里为 H_l , H_I 分别为环境的自由哈密顿量和系统与环境的相互作用, H 为总哈密顿量. N 为自旋链粒子的总数目, J 和 λ 分别为 Ising 链的强度和 Ising 链与横向场的耦合强度, δ 为环境与系统中一

* 国家自然科学基金 (批准号: 10975125) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: yangyang@mail.ustc.edu.cn

[‡] 通讯作者. E-mail: anmwang@ustc.edu.cn

个原子的耦合强度, $|e\rangle$ 为原子的激发态, $|g\rangle$ 为基态, $\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z (j = 1, 2, \dots, N)$ 为自旋链上第 j 个位置的泡利矩阵.

设中心原子的初态的密度矩阵为 ρ , 每个初态所处环境态为 $|G\rangle$, 我们通过计算获得中心原子的约化密度矩阵为

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) = & \rho_{11}|gg\rangle\langle gg| + \rho_{22}|ge\rangle\langle ge| \\ & + \rho_{33}|eg\rangle\langle eg| + \rho_{44}|ee\rangle\langle ee| \\ & + \rho_{12}R(t)|gg\rangle\langle ge| + \rho_{13}R(t)|gg\rangle\langle eg| \\ & + \rho_{14}R^2(t)|gg\rangle\langle ee| + \rho_{23}|R(t)|^2|ge\rangle\langle eg| \\ & + \rho_{24}R(t)|ge\rangle\langle ee| \\ & + \rho_{34}R(t)|eg\rangle\langle ee| + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (4)$$

这里 H.c. 为厄米共轭,

$$R(t) = \langle G|e^{iH_e t} e^{-iH_g t}|G\rangle,$$

其中 $H_i, i = g, e$ 为有效哈密顿量, 具体形式为

$$H = \sum_k \epsilon_k^i (\gamma_k^\dagger \gamma_k - 1/2), \quad (5)$$

这里

$$\epsilon_k^i = 2J\sqrt{1 + (\lambda + \lambda')^2 - 2(\lambda + \lambda')\cos ka}.$$

其中当 $i = g$ 时, $\lambda' = 0$; 当 $i = e$ 时, $\lambda' = \delta$. 而 $k = \frac{2n\pi}{Na}, n = -N/2, \dots, N/2 - 1$.

用 (4) 式的哈密顿量可以推导出

$$\begin{aligned} R(t) = & e^{\sum_k i/2(\epsilon_k^g - \epsilon_k^e)t} \prod_{k>0} (\cos^2 \alpha_k \\ & + \sin^2 \alpha_k e^{2i\epsilon_k^e t}), \\ \alpha_k = & \frac{1}{2} \left[\arctan \frac{-\sin ka}{\cos ka - \lambda} \right. \\ & \left. - \arctan \frac{-\sin ka}{\cos ka - (\lambda + \delta)} \right]. \end{aligned}$$

3 量子失协动力学

量子失协是由经典互信息的两种等价方式过渡到量子情形下所产生的差异而来, 被用来量化非经典关联^[7]. 对双量子比特情形, 量子失协定义为

$$Q(\rho) = I(\rho) - C(\rho), \quad (6)$$

这里 $I(\rho)$ 为总关联, $I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$, 其中 von Neumann 熵 $S(\rho) = -\text{tr} \rho \log_2 \rho$. 经典关联 $C(\rho) = S(\rho_A) - \min_{\{\Pi_j\}} S(\rho|\Pi_j)$, $S(\rho|\Pi_j)$ 的获得依赖于对系统 B 测量基矢 $\{\Pi_j\}$ 的选择, 对系统局域部分 B 测量后, 系统的量子态变为

$$\rho_j = (I \otimes \Pi_j) \rho (I \otimes \Pi_j) / p_j,$$

$$p_j = \text{tr}[(I \otimes \Pi_j) \rho (I \otimes \Pi_j)].$$

在基矢 $\{\Pi_j\}$ 测量下, 量子条件熵为 $S(\rho|\Pi_j) = \sum_j p_j S(\rho_j)$, 所以经典关联为

$$C(\rho) = \max_{\{\Pi_j\}} \{S(\rho_A) - \sum_j p_j S(\rho_j)\}. \quad (7)$$

我们考虑初态系统为

$$\rho_S(0) = \left(I + \sum_{i=x,y,z} c_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right) / 4, \quad (8)$$

这里 I 是 4×4 的单位矩阵, 这个量子态的演化为

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) = & \frac{1}{4} \{ (1 + c_3)(|gg\rangle\langle gg| + |ee\rangle\langle ee|) \\ & + (1 - c_3)(|ge\rangle\langle ge| + |eg\rangle\langle eg|) \\ & + [(c_1 - c_2)R^2(t)|gg\rangle\langle ee| \\ & + (c_1 + c_2)|R(t)|^2|ge\rangle\langle eg| + \text{H.c.}] \}, \end{aligned} \quad (9)$$

所以中心原子组成的双量子比特系统的总关联为

$$I(\rho_{AB}) = 2 + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (10)$$

这里

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = & 2 + \frac{1}{4} [(1 + c_3) \pm (c_1 + c_2)|R(t)|^2], \\ \lambda_{3,4} = & 2 + \frac{1}{4} [(1 - c_3) \pm (c_1 - c_2)|R(t)|^2]. \end{aligned}$$

不失一般性, 我们选取 $c_1 = 1, c_2 = -c_3$, 根据文献 [24] 容易计算出经典关联为

$$C(\rho_{AB}) = \frac{1-c}{2} \log_2(1-c) + \frac{1+c}{2} \log_2(1+c), \quad (11)$$

这里

$$c = \max\{|\theta_1|, |\theta_2|, |c_3|\},$$

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} |R(t)|^2 \sqrt{2(c_1^2 + c_2^2) \pm (c_1^2 - c_2^2) \frac{\text{Re}[R^2(t)]}{|R(t)|^2}}.$$

在图 1(a) 中我们画出了当 $N = 100, c_3 = 0.8, \delta = 0.1$ 时, 量子失协随耦合常数 λ 变化的演化规律. 我们能够清晰地看到在临界点 $\lambda_c = 1$ 存在突变, 这与文献 [25] 中提到的 Loschmidt echo 相符合的. 我们取 $\delta = 0.9$ 时, 如图 1(b), 强耦合的相互作用量子失协在临界点处的现象不再明显, 并且迅速衰变为经典态.

图 2(a) 描述了 $\lambda = 0.9, \delta = 0.1$ 时的量子失协的演化规律, 我们可以看到量子失协的周期正比于环境的尺寸大小, 这与 (5) 式哈密顿量解的周期性一致.

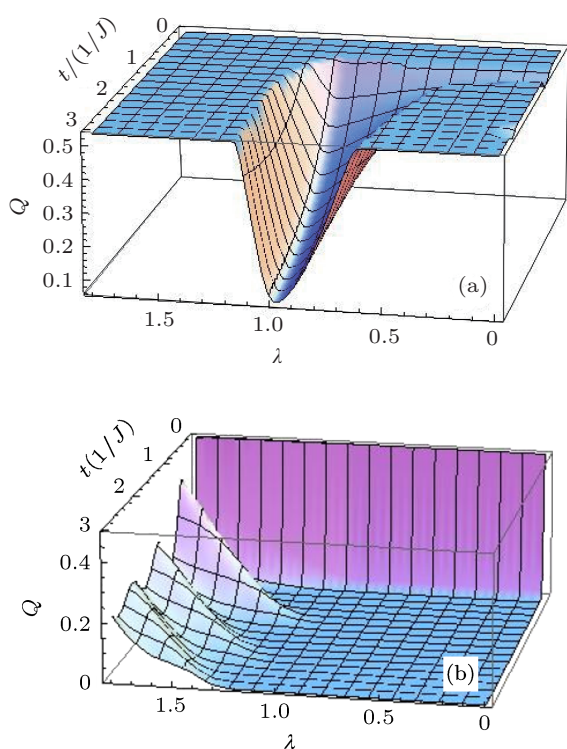


图1 变量为耦合常数 λ 与时间 t 的三维量子失协 (a) $\delta = 0.1$; (b) $\delta = 0.9$

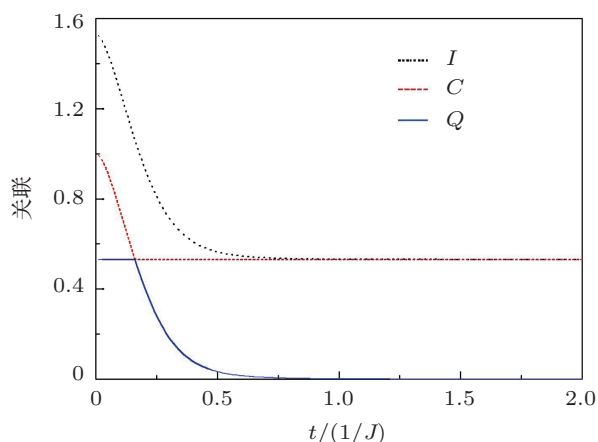


图3 $N = 100, c_3 = 0.8, \lambda = 0.9, \delta = 0.3$ 时总关联 I 与经典关联 C 以及量子关联 Q 的演化

我们取 $N = 100, c_3 = 0.8, \lambda = 0.9, \delta = 0.3$, 总关联与经典关联以及量子失协的变化如图3. 从图中我们发现如文献 [26] 所展现的关联从量子关联向经典关联的突然转变.

4 量子关联的几何度量

除了纠缠以外, 由于量子失协的出现, 随后人们提出了许多关于量子关联的度量方式, 比如双边同时测量, 热力学度量, 测量扰动, 距离相对熵以及几何度量等方法. 最近量子关联的几何度量 [27,28] 引起人们的注意, 并在量子远程态的制备上得到应用. 我们在本章主要考虑在 Ising 环境下, 中心双原子量子关联的几何度量的演化规律. 量子关联的几何度量具体形式为

$$G(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_0} \|\rho - \chi\|^2, \quad (12)$$

其中 $\|X\|^2 = \text{tr}X^2, \Omega_0$ 为量子关联为零的态.

对于两量子比特的态

$$\rho = \frac{1}{4} \left(I \otimes I + \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i \otimes I + \sum_{i=1}^3 y_i I \otimes \sigma_i + \sum_{i,j=1}^3 T_{i,j} \sigma_i \otimes \sigma_j \right)$$

的量子关联的几何度量为

$$G(\rho) = \frac{1}{4} (\|X\|^2 + \|T\|^2 - k_{\max}), \quad (13)$$

其中 $K = \mathbf{x}\mathbf{x}^t + \mathbf{T}\mathbf{T}^t, \mathbf{t}$ 表示矩阵的转置, k_{\max} 为矩阵 K 的最大本征值.

对于 X 态来说, 量子关联的几何度量为

$$G(\rho) = \frac{1}{4} [k_1 + k_2 + k_3 - \max\{k_1, k_2, k_3\}], \quad (14)$$

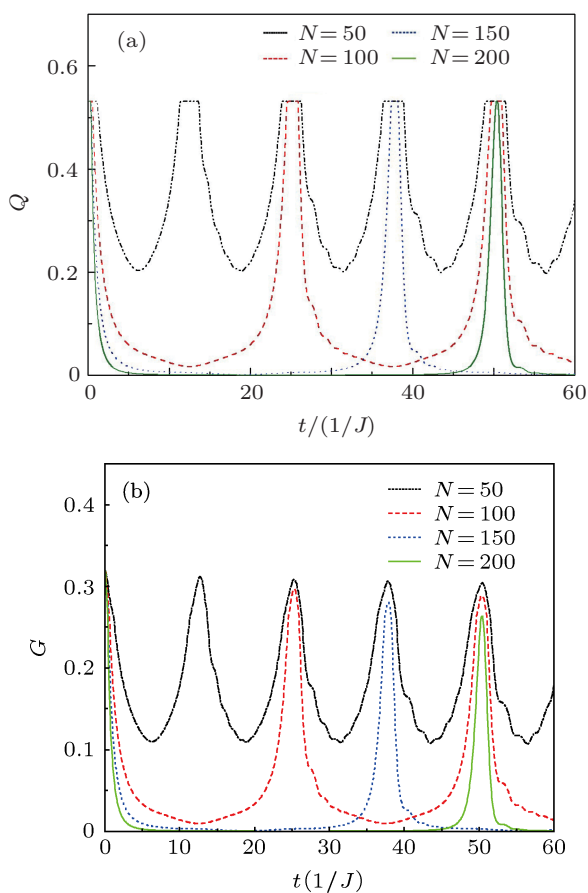


图2 $\lambda = 0.9, \delta = 0.1$ 时 $N = 50, 100, 150, 200$ 量子关联的演化规律 (a) 量子失协 Q 的演化规律; (b) 量子关联的几何度量 G 的演化规律

这里

$$\begin{aligned} k_1 &= 4(|\rho_{14}|^2 - |\rho_{23}|^2), \\ k_2 &= 4(|\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}|^2), \\ k_3 &= 2[(\rho_{11} - \rho_{33})^2 + (\rho_{22} - \rho_{44})^2]. \end{aligned}$$

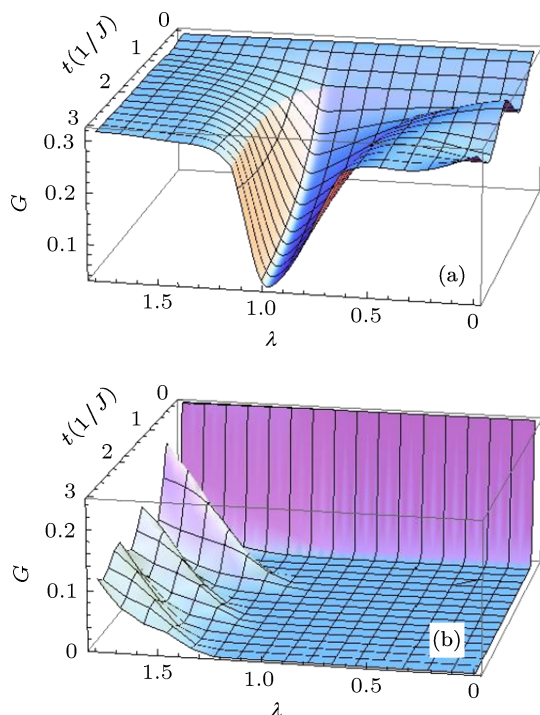


图4 变量为耦合常数 λ 与时间 t 的三维量子关联的几何度量 (a) $\delta = 0.1$; (b) $\delta = 0.9$

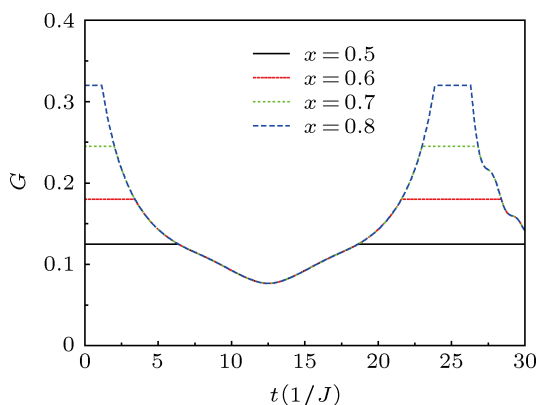


图5 不同的 x 值时的量子关联几何度量

我们仍取 (8) 式中的态作为初态 ($c_1 = 1$,

$c_2 = -c_3$), 对 $N = 100$, $c_3 = 0.8$, $\delta = 0.1$ 与 $\delta = 0.9$, 其态演化的关联几何度量如图 4 所示. 从图中我们仍然可以看到弱相互作用时在临界点 $\lambda_c = 1$ 的突变性, 强耦合的相互作用下, 关联迅速衰变为零, 这一点与量子失协相一致的. 另外 $\lambda = 0.9$, $\delta = 0.1$, 几何度量与自旋链长度的周期关系如图 2(b) 所示.

我们取初态为

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(0) &= \frac{1}{2} (|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| \\ &\quad + x|00\rangle\langle 00| - x|11\rangle\langle 11|). \end{aligned}$$

由 (4) 和 (14) 式可得到其量子关联的几何度量

$$G(\rho) = \frac{1}{2} (|R(t)|^2 + x^2 - \max[|R(t)|^2, x^2]),$$

如图 5 所示. 由图我们可以看到在一定时间区间内, 其量子关联的几何度量保持不变. 其实, 对 Ising 链环境下的 X 态来说, 只要满足

$$\begin{aligned} |\rho_{14}| = |\rho_{23}|, |\rho_{23}|^2 \geq [(\rho_{11} - \rho_{33})^2 \\ + (\rho_{22} - \rho_{44})^2]/8, \end{aligned}$$

则态的演化中量子关联的几何度量必定不变 [29]. 这一点我们认为在实验上将有很大用处, 比如量子态的远程制备等.

5 结论

我们主要研究了中心双原子量子比特系统在 Ising 模型中的量子关联动力学演化, 其度量方式我们采用量子失协和量子关联的几何度量. 关联的演化不仅与横向场的耦合强度, 自旋链的长度有关, 还与自旋链与原子的相互作用强度有关. 首先, 不管是量子失协还是几何度量, 我们都发现在弱相互作用下自旋链的临界点 $\lambda_c = 1$, 量子关联都存在突变现象, 而在强相互作用下, 关联的这种突变性消失. 我们比较了强相互作用和弱相互作用时的关联演化情形, 强相互作用下, 量子关联迅速衰减. 其次, 我们量子关联的演化呈现一定的周期性. 最后我们得到某类态在演化过程中, 其几何度量保持不变.

[1] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (1st Edn.) (Cambridge: Cambridge Univ. Press) p26
 [2] Bennett C H 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 3121
 [3] Bennett C H, DiVincenzo D P, Shor P W, Smolin J A 2001 *Phys. Rev.*

Lett. **87** 077902
 [4] Li W, Fan M Y, Wang G W 2011 *Acta Phys. Sin.* **61** 080302 (in Chinese) [李伟, 范明钰, 王光卫 2011 物理学报 **60** 080302]
 [5] Lu D M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090302 (in Chinese) [卢道明 2011

- 物理学报 60 090302]
- [6] He X, He J Z, Xiao Y L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 150302 (in Chinese)
[何弦, 何济洲, 肖宇玲 2012 物理学报 **61** 150302]
- [7] Ollivier H, Zurek W H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 017901
- [8] Datta A, Shaji A, Caves C M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 050502
- [9] Lanyon B P, Barbieri M, Almeida M P, White A G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 200501
- [10] Werlang T, Trippe C, Ribeiro G A P, Rigolin G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 095702
- [11] Maziero J, Guzman H C, Céleri L C, Sarandy M S, Serra R M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 012106
- [12] Dakić B, Lipp Y O, Ma X S, Ringbauer M, Kropatschek S, Barz S, Paterek T, Vedral V, Zeilinger A, Brukner C, Walther P 2012 *Nature Physics* **8** 666
- [13] Tufarelli T, Girolami G, Vasile R, Bose S, Adesso G 2012 arXiv 1205.0251 [help-ph]
- [14] Maziero J, Cáleri L C, Serra R M, Vedral V 2009 *Phys. Rev. A* **80** 044102
- [15] Werlang T, Souza S, Fanchini F F, Villas B C J 2009 *Phys. Rev. A* **80** 024103
- [16] Fanchini F F, Werlang T, Brasil C A, Arruda L G E, Caldeira A O 2010 *Phys. Rev. A* **81** 052107
- [17] Wang B, Xu Z Y, Chen Z Q, Feng M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 014101
- [18] Guo J L, Wang L, Long G L 2013 *Annals of Physics* **330** 192
- [19] Xu J S, Xu X Y, Li C F, Zhang C J, Zou X B, Guo G C 2010 *Nature Commun* **1** 7
- [20] Mazzola L, Piilo J, Maniscalco S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 200401
- [21] Qiu L, Wang A M 2011 *Phys. Scr.* **84** 045021
- [22] Qian Y, Xu J B 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030405
- [23] Yan Y Y, Qin L G, Tian L J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100304
- [24] Luo S 2008 *Phys. Rev. A* **77** 042303
- [25] Quan H T, Song Z, Liu X F, Zanardi P, Sun C P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 140604
- [26] Luo D W, Lin H Q, Xu J B, Yao D X 2011 *Phys. Rev. A* **84** 062112
- [27] Dakić B, Vedral V, Brukner C 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 190502
- [28] Zhou T, Cui J X, Long G L 2011 *Phys. Rev. A* **84** 062105
- [29] Song W, Yu L B, Li D C, Dong P, Yang M, Cao Z L 2012 arXiv: 1203.3356v1 [help-ph]

Quantum correlation for a central two-qubit system coupled to Ising chain*

Yang Yang[†] Wang An-Min[‡]

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(Received 7 January 2013; revised manuscript received 6 March 2013)

Abstract

Studying quantum correlation dynamics of a central two-qubit system coupled to Ising chain model, we obtain that the evolution of quantum discord and geometric measure of quantum discord for the central atoms. We find that quantum correlation exists a sudden transition in the weak coupled interaction near the quantum critical point of Ising chain. Moreover, the evolution of geometric measure of quantum discord is invariant to some extent.

Keywords: quantum correlation, quantum discord, geometric measure of quantum discord

PACS: 03.67.Mn, 03.65.Ud, 03.65.Yz

DOI: 10.7498/aps.62.130305

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10975125).

[†] Corresponding author. E-mail: yangyang@mail.ustc.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: anmwang@ustc.edu.cn