

雪茄形铷原子玻色-爱因斯坦凝聚中单极子模的朗道阻尼和频移*

柴兆亮¹⁾ 周昱²⁾ 马晓栋^{1)†}

1) (新疆师范大学物理与电子工程学院, 乌鲁木齐 830054)

2) (江苏科技大学数理学院, 镇江 212003)

(2013年1月23日收到; 2013年3月11日收到修改稿)

采用含时哈特里-福克-博戈留波夫近似研究雪茄形铷原子玻色-爱因斯坦凝聚中单极子模的朗道阻尼和频移. 通过考虑元激发的实际弛豫及其各弛豫间的正交关系改进原有方法, 并由此给出计算朗道阻尼和频移的新公式. 此外, 令凝聚体边界处动能密度为零代替令基态能量极小以改进原消除三模耦合矩阵元的方法. 通过这些改进, 同时计算阻尼和频移, 并讨论它们的温度依赖, 所得理论结果都与实验符合.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 朗道阻尼和频移, 哈特里-福克-博戈留波夫近似, 托马斯-费米近似

PACS: 03.75.Kk, 05.30.Jp, 67.85.De

DOI: 10.7498/aps.62.130307

1 引言

在量子多体物理研究中元激发是一个重要课题, 而集体激发是超冷玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensate, BEC) 中最重要的激发形式^[1-15]. 粒子间相互作用不仅导致集体激发的能级移动 (称为频移), 而且使集体激发的振幅衰减 (称为阻尼). 阻尼和频移的计算可以解释很多实验现象, 推断粒子间相互作用, 检验和发展量子多体理论. 虽然已有很多关于囚禁 BEC 中集体激发朗道阻尼的实验^[16-23] 和理论^[24-42] 研究, 但是阻尼的物理机理仍然没有得到很好地揭示. 尽管频移是阻尼相伴的物理现象, 但在囚禁 BEC 朗道阻尼的研究中, 未见频移的计算.

在原有朗道阻尼计算的方法中^[37], 将准粒子跃迁分为阻尼强度大的共振跃迁和阻尼强度小的背景跃迁, 并只考虑了一小部分背景跃迁对阻尼的贡献. 把洛伦兹分布函数用于计算阻尼系数的公式中, 阻尼系数的计算值在阻尼系数随洛伦兹宽度缓

慢变化的范围内确定. 如果考虑所有的跃迁计算结果会非常大, 如果考虑共振跃迁缓变范围就有可能不出现. 因此原有的方法采用了很大的近似, 并且洛伦兹宽度没有明确的物理意义. 此外, 在准一维和准二维凝聚体的情况中, 不存在阻尼系数随洛伦兹宽度的缓变, 原有的计算方法不适用. 为了改进方法, 文献 [41, 42] 考虑元激发的实际弛豫, 但在计算阻尼的公式中各元激发的弛豫简单地加在一起. 本文考虑实际弛豫并考虑各弛豫间的正交关系, 采用这样的方法给出朗道阻尼并包括频移的新计算方法.

由于问题的复杂性, 大多数朗道阻尼的研究都是数值模拟的, 在平均场理论框架下研究朗道阻尼和频移, 需要求解基态波函数的格罗斯-皮塔耶夫斯基 (Gross-Pitaevskii, GP) 方程和元激发本征函数的博格留波夫-德热纳 (Bogoliubov-de Gennes, BdG) 方程组, 计算描述集体模和准粒子之间的相互作用三模耦合矩阵元. 在谐振子势问题中 BdG 方程的解析解可以通过托马斯-费米近似 (Thomas-Fermi

* 国家自然科学基金 (批准号: 10864006, 11047101, 11264039, 11205071)、新疆高校科研计划重点项目 (批准号: XJED2010141)、新疆理论物理重点学科 (批准号: LLWLY201106, LLWLY201107) 和新疆师范大学研究生科技创新项目 (批准号: 20111202, 20121214) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xdma07@yahoo.com.cn

approximation, TFA) 得到. 但是基于 TFA 的耦合矩阵元是发散的^[11]. 文献 [38—40] 在文献 [37] 方法的基础上, 改进 TFA 提出了一个消除耦合矩阵元发散的方法, 实现了朗道阻尼的解析计算, 但发散是通过引入一个变分参量 q 消除的. 本文令凝聚体在边界处的动能密度为零改进消除发散的方法, 因为发散是由于元激发本征函数引起, 而本征函数依赖于基态波函数.

基于上述两个改进, 朗道阻尼的计算更为合理, 同时频移的计算也成功完成.

2 关于朗道阻尼和频移的哈特里-福克-博戈留波夫平均场理论

我们采用哈特里-福克-博戈留波夫 (Hartree-Fock-Bogoliubov, HFB) 平均场近似^[30] 和解析的 BdG 方程本征函数集^[13], 这些内容在 2.1 和 2.2 节简要介绍. 2.3 节介绍我们计算朗道阻尼和频移的新方法.

2.1 HFB 近似和 BdG 方程的本征函数集

囚禁于外势 $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = m\omega_{\text{ho}}^2/2$ (其中 $\mathbf{r}^2 = s^2 + \lambda^2 z^2$, $s^2 = x^2 + y^2$ 而 ω_{ho} 和 λ 分别是谐振频率和各向异性参数) 中的稀薄 BEC 原子气体的巨正则哈密顿量为

$$K = H - \mu N = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) H_0 \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

其中 $H_0 = -\hbar^2 \nabla^2 / (2m) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu$ 而 μ 是化学势, $g = 4\pi\hbar^2 a_{\text{sc}} / m$ 而 a_{sc} 是 s 波散射长度. 玻色场算符 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 的运动方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_0 \psi(\mathbf{r}, t) + g \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

场算符 ψ 被分解为凝聚部分 $\varphi = \langle \psi \rangle$ 和非凝聚部分 $\tilde{\psi}$, 即

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) + \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

且 $\langle \tilde{\psi} \rangle = 0$, 其中 $\langle \dots \rangle$ 代表非平衡平均; 凝聚部分又可分解为静态部分 $\varphi_0 = \langle \varphi \rangle_0$ 和激发部分 $\delta\varphi$, 即 $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \delta\varphi(\mathbf{r}, t)$, 其中 $\langle \dots \rangle_0$ 代表平衡平均. 我们采用 HFB 近似: 1) $\langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \rangle = \tilde{n}$, $\langle \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle = \tilde{m}$, 其中 $\tilde{m}(\mathbf{r}, t)$ 和 $\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$ 分别代表正常和

反常热粒子密度; 2) $\langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle = \langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \rangle = 0$; 3) $\langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle = 4\tilde{n} \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} + \tilde{m} \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger + \tilde{m}^* \tilde{\psi} \tilde{\psi}$; 4) $\tilde{n}(\mathbf{r}, t) = \tilde{n}^0(\mathbf{r}) + \delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$, $\tilde{m}(\mathbf{r}, t) = \tilde{m}^0(\mathbf{r}) + \delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t)$, 其中 $\tilde{n}^0 = \langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \rangle_0$, $\tilde{m}^0 = \langle \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle_0$; 5) $\tilde{n}^0 = 0$ 和 $\tilde{m}^0 = 0$.

利用上述近似, 得到凝聚体波函数满足的方程

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_0 \varphi(\mathbf{r}, t) + g |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 \varphi(\mathbf{r}, t) + 2g \varphi(\mathbf{r}, t) \delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t) + g \varphi(\mathbf{r}, t)^* \delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

忽略 (3) 式中的 $\delta\tilde{n}$ 和 $\delta\tilde{m}$ 得到描述凝聚体静态分布的 GP 方程

$$[H_0 + g n_0(\mathbf{r})] \varphi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (4)$$

其中 $n_0 = \varphi_0^2$ 为凝聚体密度.

采用博戈留波夫变换

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_k [u_k(\mathbf{r}) \alpha_k^\dagger(t) + v_k^*(\mathbf{r}) \alpha_k(t)]$$

(其归一化条件为 $\int d\mathbf{r} [u_k^*(\mathbf{r}) u_{k'}(\mathbf{r}) - v_k(\mathbf{r}) v_{k'}^*(\mathbf{r})] = \delta_{kk'}$ 而玻色算符 α_k 满足 $[\alpha_k^\dagger, \alpha_{k'}] = \delta_{kk'}$), 并对角化哈密顿量 (1), 得到准粒子本征函数满足的 BdG 方程组

$$\begin{aligned} \hat{L} u_j(\mathbf{r}) + g n_0 v_j(\mathbf{r}) &= \varepsilon_j u_j(\mathbf{r}), \\ \hat{L} v_j(\mathbf{r}) + g n_0 u_j(\mathbf{r}) &= -\varepsilon_j v_j(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中算子 $\hat{L} = H_0 + 2g n_0$.

由 (3) 式还可得到描述凝聚体激发部分的运动方程

$$i\hbar \frac{\partial \delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = [H_0 + 2g n_0] \delta\varphi(\mathbf{r}, t) + g n_0 \delta\varphi^*(\mathbf{r}, t) + 2g \varphi_0 \delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t) + g \varphi_0^* \delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

略去 (6) 式中 $\delta\tilde{n}$ 和 $\delta\tilde{m}$, 容易看出凝聚体中的集体激发 $\delta\varphi(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r}) \exp(i\varepsilon_0 t / \hbar)$ 和 $\delta\varphi^*(\mathbf{r}, t) = v_0(\mathbf{r}) \exp(i\varepsilon_0 t / \hbar)$ 也决定于 BdG 方程, 即 $u_0(\mathbf{r})$, $v_0(\mathbf{r})$ 和 ε_0 满足 (5) 式.

通过无量纲化 $\tilde{\gamma} = \gamma / R_0$ 和 $\tilde{\nabla} = R_0 \nabla$, 并引入 $\zeta = \hbar \omega_{\text{ho}} / 2\mu$ (其中 $R_0 = \sqrt{2\mu / m \omega_{\text{ho}}}$ 是凝聚体特征半径), (4) 式变为无量纲形式

$$\zeta^2 \sigma(\tilde{r}) + \tilde{r}^2 - 1 + |\varphi_0(\tilde{r}) / \varphi_0(0)|^2 = 0, \quad (7)$$

其中 $\sigma(\tilde{r}) = -[\tilde{\nabla}^2 \varphi_0(\tilde{r})] / \varphi_0(0)$ 是一个正比于零点能的量.

通过无量纲化元激发频率 $\tilde{\omega} = \omega / \omega_{\text{ho}}$ (其中 $\omega = \varepsilon / \hbar$), 并定义 $\varphi_j^\pm = u_j \pm v_j$, (5) 式变为无量

纲形式

$$\begin{aligned}
 & -\bar{\nabla}^2(1-\bar{r}^2)\varphi_j^+ - (1-\bar{r}^2)\sigma\varphi_j^+ + \frac{\zeta^2}{2}[\bar{\nabla}^4 + 3\bar{\nabla}^2\sigma \\
 & + \sigma\bar{\nabla}^2 + 3\sigma^2]\varphi_j^+ = 2\bar{\omega}_j^2\varphi_j^+, \\
 & - (1-\bar{r}^2)\bar{\nabla}^2\varphi_j^- - (1-\bar{r}^2)\sigma\varphi_j^- + \frac{\zeta^2}{2}[\bar{\nabla}^4 + \bar{\nabla}^2\sigma \\
 & + 3\sigma\bar{\nabla}^2 + 3\sigma^2]\varphi_j^- = 2\bar{\omega}_j^2\varphi_j^-. \quad (8)
 \end{aligned}$$

改进 TFA 的 (7) 式基态波函数解为

$$\varphi_0(\bar{r}) = C_0\sqrt{\lambda}(1-\bar{s}^2-\lambda^2\bar{r}^2)^{\frac{q+1}{2}}\Theta(1-\bar{r}), \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{s} &= \bar{s}/R_0, \quad \bar{z} = z/R_0, \\
 C_0 &= [\lambda N_0/(2\pi R_0^3 B(3/2, 2+q))]^{1/2}
 \end{aligned}$$

是归一化常数而 $B(3/2, 2+q)$ 为贝塔函数, $N_0 = R_0^3 \int d\bar{r} |\Phi_0(\bar{r})|^2$ 是凝聚体粒子数密度. 相应的化学势为

$$\mu = \hbar\omega_{ho}[4\lambda P/B(3/2, 2+q)]^{2/5}/2,$$

其中 $P = N_0 a_{sc}/a_{ho}$ 是无量纲的原子相互作用强度而 $a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\omega_{ho}}$ 是横向长度. 在此, 参量 q 用来消除三模耦合矩阵元的发散, 这将在 2.3 节解释.

改进 TFA 的 (8) 式元激发本征函数满足方程解为

$$\begin{aligned}
 \varphi_{n_z n_s m}^\pm(\bar{r}) &= \frac{(\zeta \bar{\omega}_{n_z n_s m})^{\pm 1/2}}{\sqrt{2\pi R_0^3 I_{n_z n_s m}}} (1-\bar{s}^2-\lambda^2\bar{z}^2)^{\frac{q\pm 1}{2}} \\
 &\times \bar{s}^{n_p} P_{n_p}^{(2n_s)}(\bar{s}, \bar{z}) e^{im\phi}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

其中 $\bar{\omega}_{n_z n_s m}$ 是本征值, $I_{n_z n_s m}$ 是归一化系数, $n_p = (0, 1, 2, \dots)$ 是主量子数, $n_s (= 0, 1, 2, \dots, \text{int}[n_p/2])$ 是径向量子数, $n_z = n_p - 2n_s$ 是轴向量子数, $m (= 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是方位角量子数. 径向和轴向耦合函数 $P_{n_p}^{(2n_s)}$ 满足一个二维微分方程, 解的形式为

$$P_{n_p}^{(2n_s)}(\bar{z}, \bar{s}) = \sum_{k=0}^{n_p} \sum_{n_s=0}^{\text{int}[k/2]} b_{k, n_s} \bar{z}^{k-2n_s} \bar{s}^{2n_s}.$$

本征值 $\bar{\omega}_{n_z n_s m}$ 由如下封闭方程决定:

$$-1 = \frac{g_0}{1 + \frac{g_1}{1 + \frac{g_2}{1 + \dots}}}, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned}
 g_{n_s} &= \frac{-4\lambda^2(n_s+1)(n_s+|m|+1)(n_p-2n_s-1)(n_p-2n_s)}{2\gamma-2|m|(1+q)-4n_s(n_s+|m|+1+q)-\lambda^2(n_p-2n_s)(n_p-2n_s+1+2q)} \\
 &\times [2\gamma-2|m|(1+q)-4(n_s+1)(n_s+|m|+2+q)-\lambda^2(n_p-2n_s-2)(n_p-2n_s-1+2q)]^{-1}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

而 $Z = 1 + \text{int}[n_p/2]$ 且 $\gamma = \bar{\omega}_{n_z n_s m}^2$. 系数 b_{k, n_s} 由如下递推关系决定:

$$\begin{aligned}
 & 4(n_s+1)(n_s+|m|+1)b_{k+2, n_s+1} \\
 & + (k-2n+2)(k-2n_s+1)b_{k+2, n_s} \\
 & = 4\lambda^2(n_s+1)(n_s+|m|+1)b_{k, n_s+1} \\
 & - [2\gamma-2|m|(1+q)-4n_s(n_s+|m|+1+q) \\
 & - \lambda^2(k-2n_s)(k-2n_s+1+2q)]b_{k, n_s} \\
 & + (k-2n_s+2)(k-2n_s+1)b_{k, n_s-1}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

2.2 集体模的频率修正及其阻尼强度和耦合矩阵元

通过博戈留波夫变换得到反映 $\delta\hat{n}$ 和 $\delta\hat{m}$ 时间演化的运动方程

$$i\hbar \frac{\partial f_{ij}(t)}{\partial t} = \langle |\alpha_i^\dagger \alpha_j, K| \rangle,$$

$$i\hbar \frac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t} = \langle |\alpha_i \alpha_j, K| \rangle, \quad (14)$$

其中 $f_{ij} = \langle \alpha_i^\dagger \alpha_j \rangle - f_i^0$ 和 $g_{ij} = \langle \alpha_i \alpha_j \rangle$ 分别是正常和反常准粒子分布函数而

$$f_j^0 = \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle = 1/[\exp(2\zeta \bar{\omega}_j/\bar{T}) - 1]$$

是准粒子的平衡密度, $\bar{T} = k_B T/\mu$ 是无量纲温度而 k_B 为玻尔兹曼常数.

我们关注在凝聚体中激发出来的频率为 $\bar{\omega}_0$ 的集体模. 通过对 (6) 和 (14) 式进行傅里叶变换可以得到集体模朗道机理的频率修正

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}, \quad (15)$$

其中

$$\bar{\gamma}_{ij} = 4\pi(4\pi a_{sc}/a_{ho})^2 |\bar{A}_{ij}|^2 (f_i^0 - f_j^0) \quad (16)$$

是以 ω_{ho}^2 为标度的无量纲的阻尼强度, 而

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= a_{\text{ho}}^3 \int d\mathbf{r} \varphi_0 [u_0(u_i u_j^* + v_i v_j^* + v_i u_j^*) \\ &\quad + v_0(u_i u_j^* + v_i v_j^* + u_i v_j^*)] \\ &= \frac{[4P/B(3/2, 2+q)]^{1/10}}{8\pi\lambda^{9/10} [I_0 I_i I_j \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j]^{1/2}} \\ &\quad \times \left(\frac{N_0}{P}\right)^{1/2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy W_0 W_i W_j^* F(x, y) \end{aligned} \quad (17)$$

是以 $1/a_{\text{ho}}^3$ 为标度的无量纲三模耦合矩阵元. 在此, 我们定义 $x = \bar{s}^2$,

$$\begin{aligned} y &= \lambda \bar{z} / \sqrt{1-x}, \quad W_j = \bar{s}^m P_{n_p}^{(2n_s)}(\bar{s}, \bar{z}), \\ F(x, y) &= 3\xi^2 \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j (1-x)^{2q-1/2} (1-y^2)^{2q-1} \\ &\quad + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j) (1-x)^{2q+3/2} (1-y^2)^{2q+1}. \end{aligned}$$

2.3 朗道阻尼和频移的计算方法

参量 $q > 0$ 的引入是为了改进 TFA 而消除三模耦合矩阵元的发散. 当 $q = 0$, 改进的 TFA 退化为 TFA, 在这种情况下, 三模耦合矩阵元是发散的. 我们用改进的 TFA 计算元激发的本征函数, 因为发散来自于 TFA 的本征函数. 我们取参量 $q = 1$, 这是满足边界连续条件并且最接近 TFA 的一种情况. 因为在凝聚体的边界 $1 - s^2 - \lambda^2 z^2 = 0$, 动能密度

$$\begin{aligned} &\sim -\varphi_0 \bar{\nabla}^2 \varphi_0 \sim -(1+q)(1-s^2 - \lambda^2 z^2)^{-1+q} \\ &\times [-2 - \lambda^2 + z^2(2\lambda^2 + q\lambda^4) + s^2(1+q + \lambda^2)] \end{aligned}$$

在 $0 < q < 1$ 时发散, 在 $q > 1$ 等于 0. 我们将 (10) 式中 $\bar{\omega}_{n_i n_s m}$ 和 ζ 里的化学势替换为 TFA 的相应量, 因为 TFA 的能量和实验符合.

由微扰理论推出的 (15) 式右边, 第一项是集体模的零阶频率, 第二项是集体模的微扰修正, 第二项在 $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j = 0$ 的条件下发散.

考虑集体模 $\bar{\omega}_0$ 的实际弛豫, 将 (15) 式右边的 $\bar{\omega}_0$ 替换为 $\bar{\omega}_0 + i\bar{\gamma}_0$ (其中 $\bar{\gamma}_0$ 是以 ω_{ho} 为标度的集体模无量纲朗道阻尼系数), (15) 式变为

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_0^2}$$

$$+ i \left[\bar{\gamma}_0 - \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\gamma}_0}{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_0^2} \right]. \quad (18)$$

令 (18) 式的虚部为零, 得到

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\gamma}_0}{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_0^2} \quad (19)$$

和

$$\bar{\omega} - \bar{\omega}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_0^2}. \quad (20)$$

考虑准粒子的弛豫 $\bar{\omega}_i \rightarrow \bar{\omega}_i + i\bar{\gamma}_i$ (其中 $\bar{\gamma}_i$ 是准粒子的朗道阻尼系数), 将 (19) 式中的 $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$ 替换为 $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_i^2]/\bar{\gamma}_i$, 得到

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\gamma}_0}{\left[\frac{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_i^2}{\bar{\gamma}_i} \right]^2 + \bar{\gamma}_0^2}. \quad (21)$$

考虑准粒子的弛豫 $\bar{\omega}_j \rightarrow \bar{\omega}_j - i\bar{\gamma}_j$ (其中 $\bar{\gamma}_j$ 是准粒子的朗道阻尼系数), 将 (21) 式中的 $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$ 替换为 $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_j^2]/\bar{\gamma}_j$, 最终得到计算集体模朗道阻尼的公式

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_0 &= \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \\ &\times \frac{\bar{\gamma}_0}{\frac{\{[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_j^2]^2 + \bar{\gamma}_j^2 \bar{\gamma}_i^2\}^2}{\bar{\gamma}_j^4 \bar{\gamma}_i^2} + \bar{\gamma}_0^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式考虑了元激发的弛豫, 并且各弛豫间关系是正交的. 把 $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$ 替换为 $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}^2]/\bar{\gamma}$, 相当于修改失谐, 弛豫使能级产生宽度, 从而修改了失谐. 当 $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \rightarrow 0$ 时 $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}^2]/\bar{\gamma} \rightarrow \bar{\gamma}$, 尽管跃迁的失谐很小, 但由于修改, 失谐恰好等于弛豫. 如果 $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j = \bar{\gamma}$, $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}^2]/\bar{\gamma} = 2\bar{\gamma}$, 修改后的失谐恰好是原来失谐的 2 倍; 当 $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \gg \bar{\gamma}$ 时, $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}^2]/\bar{\gamma} \rightarrow \infty$, 因修改后的失谐很大, 跃迁对阻尼的贡献很小, 这是因为元激发弛豫很小, 能级跃迁概率很小.

以同样的物理考虑来修改失谐, 我们给出计算集体模频移的公式

$$\bar{\omega} - \bar{\omega}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\frac{[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_j^2]^2 + \bar{\gamma}_j^2 \bar{\gamma}_i^2}{\bar{\gamma}_j^2 \bar{\gamma}_i} \frac{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{|\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j|}}{\frac{\{[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_j^2]^2 + \bar{\gamma}_j^2 \bar{\gamma}_i^2\}^2}{\bar{\gamma}_j^4 \bar{\gamma}_i^2} + \bar{\gamma}_0^2}. \quad (23)$$

3 计算及结果

考虑频率为 $\omega_{ho} = 1146.73$ Hz、各向异性参数为 $\lambda = 0.0646$ 的谐振囚禁势中的雪茄型⁸⁷Rb 原子气体 (s 波散射程度 $a_{sc} = 5.82 \times 10^{-9}$ m). 凝聚体原子数为 $N_0 = N[1 - (T/T_c)^3]$, 其中原子总数为 $N = 3 \times 10^5$ 且 BEC 跃迁临界温度为 $T_c = 4.5(\omega_{ho}/200\pi)(\lambda N)^{1/3}$ nK = 220.6 nK.^[1] 参量 $q = 1$. 研究单极子模 $(n_z, n_s, m) = (0, 1, 0)$, 其频率为 $\omega_0 = 2.00052$ (以 ω_{ho} 为单位), 其博戈留波夫振幅为 $u_0 = (\varphi_{010}^+ + \varphi_{010}^-)/2, v_0 = (\varphi_{010}^+ - \varphi_{010}^-)/2$.

3.1 朗道阻尼强度

朗道阻尼强度 γ_{ij} 用 (16) 及 (17) 式来计算.

在图 1 及其插图中, 给出各个跃迁 ω_{ij} ($\omega_{ij} = \omega_j - \omega_i$, 以 ω_{ho} 为单位) 的阻尼强度 γ_{ij} 计算值 (以 ω_{ho}^2 为单位), 这些跃迁服从单极子选择定则 $m_i = m_j$ (其中 m_i 和 m_j 分别是准粒子 ω_i 和 ω_j 的方位角量子数). 图中的箭头指向集体模的频率, 线的位置对应着允许的跃迁频率 ω_{ij} , 而其高度给出 γ_{ij} 的值. 大图和小图中的跃迁分别满足 $1.6\omega_0 < \omega_{ij} < 2.4\omega_0$ 和 $1.99\omega_0 < \omega_{ij} < 2.01\omega_0$.

能级量子数大的准粒子本征函数振荡很快且其极大值远离凝聚体中心, 另外量子数大的能级能量高, 其玻色布居因子 f_i^0 小, 因此量子数大的能级

间的跃迁耦合矩阵元小. 通过仔细的考虑, 在计算中选取 $(0, 0, m), (1, 0, m), (2, 0, m), (0, 1, m), (3, 0, m), (1, 1, m), (4, 0, m), (2, 1, m), (0, 2, m), (5, 0, m), (3, 1, m), (1, 2, m), (6, 0, m), (4, 1, m), (2, 2, m)$, 和 $(0, 3, m)$ 而 m 满足 $\omega_{n_z, n_s, m} < 0.7\mu/\hbar$ 的能级.

图 1 插图中的跃迁是大小与集体模式频率非常接近的跃迁, 属于能级 $(n_z, 0, 4)$ (其中 $n_z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 和能级 $(n_z, 1, 4)$ (其中 $n_z = 0, 1, 2, 3, 4$) 之间的跃迁.

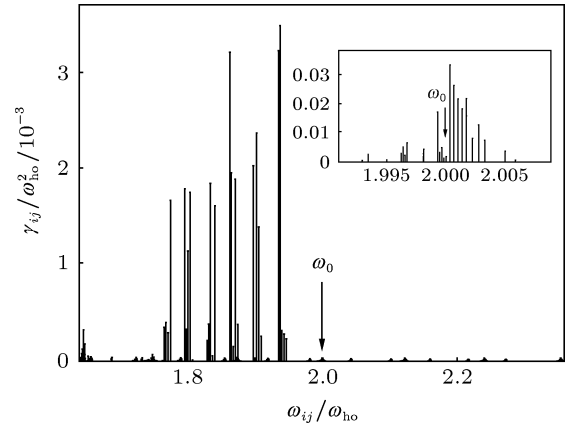


图 1 以跃迁 ω_{ij} 为变量的凝聚体单极子模阻尼强度 γ_{ij} 函数线状图

3.2 阻尼系数和频移及其温度依赖

把 (22) 式右边用 γ_0 替换为 γ , 并且近似认为阻尼系数正比于跃迁频率, (22) 式改为

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\gamma}}{\left\{ \left[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma} \right)^2 \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma} \right)^2 \right\}^2 + \bar{\gamma}^2} \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma} \right)^4 \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma} \right)^2, \quad (24)$$

用迭代方法计算集体模的阻尼系数. 图 2 给出 γ_0 随 γ 变化的图 (γ_0 和 γ 都以 ω_{ho} 为单位), 图中可以看出, γ_0 随 γ 的增加而减小, 由星号表示三个点处 $\gamma_0 = \gamma$, 温度 $T = 50, 100, 150$ nK 时的集体模阻尼系数数值在此三点给出, 分别为 0.0012, 0.0021, 0.0033, 相当于 1.38, 2.41, 3.78 s^{-1} .

(22) 式可改写为

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\Delta'^2 + \bar{\gamma}_0^2}, \quad (25)$$

其中 $\bar{\Delta}'' = (\bar{\Delta}^2 + \bar{\gamma}_i^2)/\bar{\gamma}_i$ 而 $\bar{\Delta}' = (\bar{\Delta}^2 + \bar{\gamma}_j^2)/\bar{\gamma}_j$ 且 $\bar{\Delta} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$. 在 (25) 式中, 当 $\bar{\Delta} > \bar{\gamma}_j$ 时 $\bar{\Delta}'$ 随 $\bar{\Delta}$ 的增加迅速增加, 当 $\bar{\Delta}' > \bar{\gamma}_i$ 时, $\bar{\Delta}''$ 随 $\bar{\Delta}'$ 的增加迅速增加, 当 $\bar{\Delta}'' > \bar{\gamma}_0$ 时, $(\bar{\Delta}'' + \bar{\gamma}_0^2)/\bar{\gamma}_0$ 随 $\bar{\Delta}''$ 的增加迅速增加. 由于上述三重因素, 对阻尼的主要贡献来自于小部分失谐很小的跃迁, 而其他大部分失谐大的跃迁贡献很小, 图 1 插图中的跃迁就是这一小部分失谐很小的跃迁.

用阻尼系数的计算值 $\bar{\gamma}_0$ 把 (23) 式改写为

$$\bar{\omega} - \bar{\omega}_0 = \sum_{ij} \tilde{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\left[\left(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \right)^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^2 \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^2}{\left(\frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^2 \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^2} \frac{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{|\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j|} \frac{1}{\left\{ \left[\left(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \right)^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^2 \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^2 \right\}^2} + \tilde{\gamma}_0^2 \frac{1}{\left(\frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^4 \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \tilde{\gamma}_0 \right)^2} \quad (26)$$

计算频移.

图 3 给出了阻尼 γ_0 (以 s^{-1} 为单位) 和频移 (以 ω 形式表现, 以 ω_{h0} 为单位) 随温度 T (以 nK 为单位) 变化关系. 图中光滑的曲线是我们的理论计算结果, 圆点是实验值^[19], 线段的长度表示误差范围. 阻尼系数的大小、频移的大小正负及其阻尼系数和频移的温度依赖理论计算结果与实验结果都符合. 图 3(a) 中的直线标示单极子模频率 TFA 理论值 ω_0 ($T \rightarrow 0$ 没有频移时的频率, 以 ω_{h0} 为单位), 显然可以看出单极子模频率 TFA 理论值和实验值有大约不到 4% 的差别.

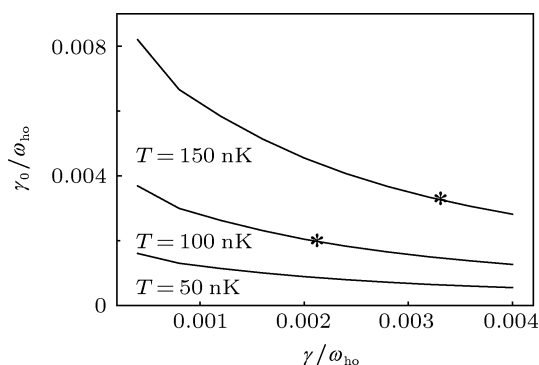


图 2 关于朗道阻尼以 γ 为变量的 γ_0 函数图

有必要将我们现在的方法和原来的方法^[37-40]进行比较. 我们现在的方法考虑了所有阻尼强度大的跃迁对阻尼强度的贡献, 而原来的方法只考虑满足条件 $0.82\omega_0 < \omega_{ij} < 1.18\omega_0$ 的背景跃迁. 如果考虑所有的跃迁, 原来方法阻尼计算值是现在方法阻尼计算值的 7 倍左右. 同样得到一样的计算结果, 我们现在的方法比原来的方法更合理. 如果只考虑

所有的跃迁, 用 (15) 式 (不考虑元激发的实际弛豫频移公式) 计算频移, 结果是我们现在方法计算值的 1800 倍左右. 比较现在方法和原来方法的阻尼公式, 可以看出原来方法中引入洛伦兹分布函数相当于只考虑了一个元激发的弛豫, 所以如果考虑所有的跃迁, 原来的计算方法得到的结果将会很大.

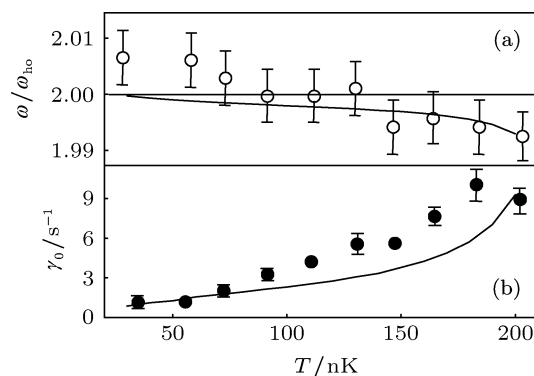


图 3 凝聚体集体模的朗道阻尼和频移随温度 T 变化图

4 结论

本文研究了雪茄型铷原子 BEC 中单极子模, 解析计算了单极子模的朗道阻尼和频移, 并详细讨论了阻尼和频移与温度的依赖关系. 通过考虑元激发的实际弛豫及其各弛豫间的正交关系, 不仅改进了原来计算朗道阻尼系数的方法, 而且给出了计算频移的公式. 此外, 令凝聚体边界的动能密度为零代替令基态能量极小, 改进了我们前期工作中消除三模耦合矩阵元发散的方法. 我们采用比较少的近似而计算结果与实验符合, 因此我们的理论方法有助于探究 BEC 中元激发的动力学.

- [1] Pethick C J, Smith H 2008 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (2nd Edn.) (Cambridge University Press)
- [2] Stringari S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2360
- [3] Fetter A L 1996 *Phys. Rev. A* **53** 4245
- [4] Ruprecht P A, Edwards M, Burnett K, Clark C W 1996 *Phys. Rev. A* **54** 4178
- [5] Dalfovo F, Minniti C, Pitaevskii L P 1997 *Phys. Rev. A* **56** 4855
- [6] Morgan S A, Choi S, Burnett K, Edwards M 1998 *Phys. Rev. A* **57** 3818
- [7] Hechenblaikner G, Maragó O M, Hodby E, Arlt J, Hopkins S, Foot C J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 692
- [8] Hodby E, Maragó O M, Hechenblaikner G, Foot C J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2196
- [9] Maragó O M, Hopkins S A, Arlt J, Hodby E, Hechenblaikner G, Foot C J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2056
- [10] Khawaja U Al, Stoof H T C 2001 *Phys. Rev. A* **65** 013605
- [11] Hechenblaikner G, Morgan S A, Hodby E, Maragó O M, Foot C J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033612
- [12] Liu W M, Fan W B, Zheng W M, Liang J Q, Chui S T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
- [13] Ma Y L, Chui S T 2002 *Phys. Rev. A* **65** 053610
- [14] Hu B, Huang G, Ma Y L 2004 *Phys. Rev. A* **69** 063608
- [15] Huang G, Szeftel J, Zhu S 2002 *Phys. Rev. A* **65** 053605
- [16] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [17] Jin D S, Matthews M R, Ensher J R, Wieman C E, Cornell E A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 764
- [18] Jin D S, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 420
- [19] Chevy F, Bretin V, Rosenbusch P, Madison K W, Dalibard J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 250402
- [20] Stamper-Kurn D M, Miesner H J, Inouye S, Andrews M R, Ketterle W 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 500
- [21] Onofrio R, Durfee D S, Raman C, Köhl M, Kuklewicz C E, Ketterle W 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 810
- [22] Maragó O, Hechenblaikner J, Hodby E, Foot C 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3938
- [23] Mewes M O, Andrews M R, Druten N J V, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 988
- [24] Zaremba E, Griffin A, Nikuni T 1998 *Phys. Rev. A* **57** 4695
- [25] Zaremba E, Nikuni T, Griffin A 1999 *J. Low Temp. Phys.* **116** 277
- [26] Jackson B, Zaremba E 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 180402
- [27] Jackson B, Zaremba E 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 150402
- [28] Morgan S A, Rusch M, Hutchinson D A W, Burnett K 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 250403
- [29] Morgan S A 2004 *Phys. Rev. A* **69** 023609
- [30] Giorgini S 1998 *Phys. Rev. A* **57** 2949
- [31] Giorgini S 2000 *Phys. Rev. A* **61** 063615
- [32] Pitaevskii L P, Stringari S 1997 *Phys. Lett. A* **235** 398
- [33] Fedichev P O, Shlyapnikov G V, Walraven J T M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2269
- [34] Reidl J, Csordás A, Graham R, Szépfalussy P 2000 *Phys. Rev. A* **61** 043606
- [35] Tsuchiya S, Griffin A 2005 *Phys. Rev. A* **72** 053621
- [36] Guilleumas M, Pitaevskii L P 2003 *Phys. Rev. A* **67** 053607
- [37] Guilleumas M, Pitaevskii L P 1999 *Phys. Rev. A* **61** 013602
- [38] Ma X, Ma Y L, Huang G 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013628
- [39] Ma X, Zhou Y, Ma Y L, Huang G 2006 *Chin. Phys.* **15** 1871
- [40] Ma X, Ma Y L, Huang G 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 616
- [41] Ma X, Yang Z, Lu J, Wei W 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070307
- [42] Yang Z, Chai Z, Li C, Ma X 2012 *Commun. Theor. Phys.* **57** 789

Landau damping and frequency-shift of monopole mode in an elongated-rubidium Bose-Einstein condensate*

Chai Zhao-Liang¹⁾ Zhou Yu²⁾ Ma Xiao-Dong^{1)†}

1) (College of Physics and Electronic Engineering, Xinjiang Normal University, Urumchi 830054, China)

2) (School of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China)

(Received 23 January 2013; revised manuscript received 11 March 2013)

Abstract

The Landau damping and frequency-shift of monopole mode in an elongated-rubidium Bose-Einstein condensate are investigated by using the time-dependent Hartree-Fock-Bogoliubov approximation. Improving the previous approach, We have taken into account the practical relaxations of elementary excitations and the orthogonal relation among them. With such an approach, we provide a new calculation formula for Landau damping rate and frequency-shift. In addition, our previous method of eliminating the divergence in three-mode coupling matrix elements is also improved by zeroing the kinetic energy at the condensate boundary instead of minimizing the ground-state energy. Based on these improvements, both the Landau damping rate and the frequency-shift of the monopole mode are analytically calculated and their temperature dependences are also discussed. And all the theoretical results are in agree meat with experimental data.

Keywords: Bose-Einstein condensate, Landau damping and frequency-shift, Hartree-Fock-Bogoliubov approximation, Thomas-Fermi approximation

PACS: 03.75.Kk, 05.30.Jp, 67.85.De

DOI: 10.7498/aps.62.130307

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10864006, 11047101, 11264039, 11205071), the Key Research Project of Xinjiang Higher Education, China (Grant No. XJED2010141), the Key Discipline of Theoretical Physics of Xinjiang, China (Grant Nos. LLWLY201106, LLWLY201107), the Postgraduate Scientific and Technological Innovation Project of Xinjiang Normal University, China (Grant Nos. 20111202, 20121214).

† Corresponding author. E-mail: xdma07@yahoo.com.cn