

# 费米气体在光晶格中的自俘获现象及其周期调制\*

苟学强 闫明 令伟栋 赵红玉 段文山†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2013年2月4日收到; 2013年3月1日收到修改稿)

研究了一维光晶格中费米气体从 BCS 区过渡到 unitarity 区研究相图及周期调制现象. 通过调节散射长度与耦合系数对相图的影响, 发现在 unitarity 区, 从约瑟夫振荡到振荡自俘获及振荡自俘获到自俘获, 存在耦合系数的临界值, 同时得到了临界耦合系数与散射长度的关系.

**关键词:** 费米气体, 自俘获, 周期调制

**PACS:** 03.75.Ss, 67.10.Db, 71.10.Ay

**DOI:** 10.7498/aps.62.130308

## 1 引言

近年来, 对冷原子的研究中, 关于光晶格中超流费米气体及其凝聚体的动力学特性<sup>[1-5]</sup>, 量子相变, 约瑟夫森效应及物质波的干涉、演化等问题的研究已成为热点<sup>[6-10]</sup>; 实验上, 利用 Feshbach 共振技术控制光晶格特性、调节原子间相互作用参数等<sup>[11-14]</sup>, 对光晶格中费米气体 BCS-BEC 渡越过程稳定性和隧穿等的性质<sup>[15-21]</sup>, 如布洛赫振荡、超流—绝缘相变、集体激发等也有了大量的研究<sup>[22-30]</sup>.

本文主要从整个 BCS-unitarity 跨越区用相平面分析和周期调制来研究这一现象.

## 2 模型

考虑一维加速光晶格中凝聚的旋转超流费米气体. 对于凝聚的大量的 (Na) 原子来说, 库珀对的尺度相对光晶格尺度足够小, 当温度足够低时, 超流费米气体分子体系从 BCS 到 unitarity 渡越过程的动力学行为, 可由一维非线性薛定谔方程描述<sup>[31]</sup>:

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2M} \left( \hbar \frac{\partial}{\partial x} - iMa_L t \right)^2 \phi$$

$$+ V_0 \cos(2k_L x) \phi + \mu \phi, \quad (1)$$

式中,  $M = 2m$  ( $m$  是单个原子的质量),  $k_L = \frac{2\pi}{\lambda}$  ( $\lambda = 1064 \text{ nm}$ ) 是激光的波数,  $V_0$  为一维光晶格强度,  $Ma_L$  表示光晶格中的惯性力或地心引力,  $\phi$  为凝聚体的波函数,  $\mu$  为体系的化学势. 做代换:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= 2k_L x, & \tilde{\phi} &= \frac{\phi}{\sqrt{n_0}}, & \tilde{v} &= \frac{MV_0}{4\hbar^2 k_L^2}, \\ \tilde{t} &= \frac{4\hbar}{M} k_L^2 t, & \tilde{\alpha} &= \frac{M^2}{8\hbar^2 k_L^3} a_L, \end{aligned}$$

并代入 (1) 式可得到无量纲化方程

$$i \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - i\tilde{\alpha} \tilde{t} \right)^2 \tilde{\phi} + v \cos \tilde{x} \tilde{\phi} + \frac{M}{4\hbar^2 k_L^2} \mu \tilde{\phi}. \quad (2)$$

代换中  $n_0 = 3.0 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ <sup>[31]</sup> 为 Na 原子平均粒子数密度. 注意到 (2) 式中省去的各变量的波浪号并不会引起混淆. 超流费米气体体系从分子 BCS ( $a_f \rightarrow -0$ ) 渡越到 unitarity ( $a_f \rightarrow -\infty$ ) 的过程中的化学势  $\mu$  可表为<sup>[32]</sup>

$$\begin{aligned} \mu(n, a_f) &= 2 \frac{\hbar^2}{M} (6\pi^2 n)^{2/3} g(2^{1/3} n^{1/3} a_f), \\ g(x) &= 1 + \frac{\delta x}{1 - \kappa x}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $x$  取负数,  $a_f$  为散射长度, 参数  $\delta = 4\pi/(3\pi^2)^{2/3}$ ,  $\kappa = \delta/(1 - \zeta)$ ,  $\zeta = 0.44$ . 引入变换

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11275156) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: duanws@126.com

$\tilde{a}_f = 2k_L a_f, \tilde{n} = n/n_0$ , 可化为无量纲化学势

$$\mu(n, a_f) = 2 \frac{\hbar^2}{M} (6\pi^2 n n_0)^{2/3} g \left( 2^{1/3} n^{1/3} \frac{a_f}{2k_L} \right), \quad (4)$$

其中各变量的波浪号被省略. 当  $g(x)$  中的  $x$  分别大于 1 及小于 1 时, 系统分别处于 BCS 区和 unitarity 区, 作泰勒展开, 可以得到各自的化学势, 其中 BCS 区的化学势  $\mu = \frac{\hbar^2}{M} (c_1 n^{2/3} + c_2 n + c_3 n^{4/3})$ , 这里  $c_1 = 2n_0^{2/3} (6\pi^2)^{2/3}$ ,  $c_2 = \frac{8\pi n_0 a_f}{k_L}$ ,  $c_3 = \frac{n_0^{4/3} 4\pi^2 a_f^2}{0.28(3\pi^2)^{2/3} k_L^2}$ .

unitarity 区的化学势  $\mu = \frac{\hbar^2}{M} (c_1 n^{2/3} + c_2 n^{1/3} + c_3)$ , 其中

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.88(6\pi^2 n_0)^{2/3}, \\ c_2 &= -\frac{2^{1/3} n_0^{1/3} [0.56(3\pi^2)^{2/3}]^2 k_L}{\pi a_f}, \\ c_3 &= -\frac{9(0.56)^3 k_L^2}{2a_f^2}. \end{aligned}$$

通过两模近似  $\phi_{(x,t)} = a e^{i\frac{x}{2}} + b e^{-i\frac{x}{2}}$ , 连同 BCS 区和 unitarity 区的化学势代入 (2) 式可得

$$\begin{aligned} i \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \alpha t \right)^2 a + \frac{v}{2} b + \frac{1}{4k_L^2} (d_1 + d_2 |b|^2) \\ &\quad + d_3 |a|^2 |b|^2 + d_4 |a|^2 |b|^4 a, \\ i \frac{db}{dt} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \alpha t \right)^2 b + \frac{v}{2} a + \frac{1}{4k_L^2} (d_1 + d_2 |a|^2) \\ &\quad + d_3 |a|^2 |b|^2 + d_4 |b|^2 |a|^4 b, \end{aligned} \quad (5)$$

其中对 BCS 区

$$\begin{aligned} d_1 &= c_1 + c_2 + c_3, \quad d_2 = \frac{2}{3} c_1 + c_2 + \frac{4}{3} c_3, \\ d_3 &= -\frac{4}{9} c_1 + \frac{4}{9} c_3, \quad d_4 = \frac{4}{27} c_1 - \frac{4}{27} c_3, \end{aligned}$$

对 unitarity 区

$$d_1 = c_1 + c_2 + c_3, \quad d_2 = \frac{2}{3} c_1 + \frac{1}{3} c_2,$$

$$d_3 = -\frac{2}{9} c_1 - \frac{2}{9} c_2, \quad d_4 = \frac{4}{27} c_1 + \frac{5}{27} c_2,$$

令  $a = \xi_1 e^{i\theta_1}, b = \xi_2 e^{i\theta_2}$ , 布局数差  $s = |b|^2 - |a|^2$ , 相对相位  $\theta = \theta_2 - \theta_1$ , 可得如下方程:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -v \sqrt{1-s^2} \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\gamma + d_2 s \frac{1}{4k_L^2} + d_4 s \frac{1-s^2}{4} \frac{1}{4k_L^2} \\ &\quad + v \cos \theta \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

### 3 不加调制

当  $\gamma = 0$  时, 没有加周期调制, 我们将分析散射长度  $a_f$  及耦合系数  $v$  对相图的影响及临界特征.

#### 3.1 相图分析

在 BCS 区分别调节散射长度  $a_f$  与耦合系数  $v$ , 我们可以看到它们对相图的影响不大, 粒子全部被俘获, 如图 1(a). 在 unitarity 区分别调节散射长度  $a_f$  与耦合系数  $v$ , 我们可以看到它们对相图的影响也不大, 但从该区的相图来看, 约瑟夫振荡存在, 振荡自俘获却不存在, 从整体来看粒子发生自俘获, 也就是相对相位单调变化的自俘获, 即通常所说的自俘获. 如图 1(b), (c)

在 unitarity 区, 我们固定耦合系数  $v$  时, 改变散射长度  $a_f$ , 相图将基本不变化. 相反, 我们固定散射长度  $a_f$  时, 改变耦合系数  $v$ , 相图将发生 3 种情况的变化, 如图 2, 随着耦合系数的减小, 粒子从约瑟夫振荡过渡到自俘获, 则我们可以得到在 unitarity 区耦合系数对相图的影响很大.

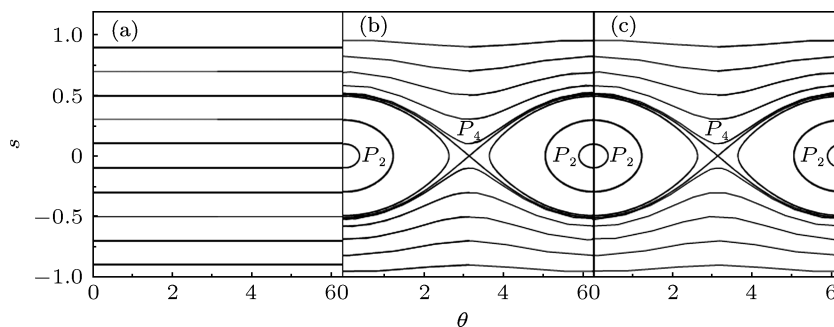


图 1 在不同散射长度下光晶格中粒子布局数差与相对相位的关系 ( $v = 1.0$ ) (a) BCS 区,  $a_f = -10^{-14}$ ; (b) unitarity 区,  $a_f = -10^{14}$ ; (c) unitarity 区,  $a_f = -10^9$

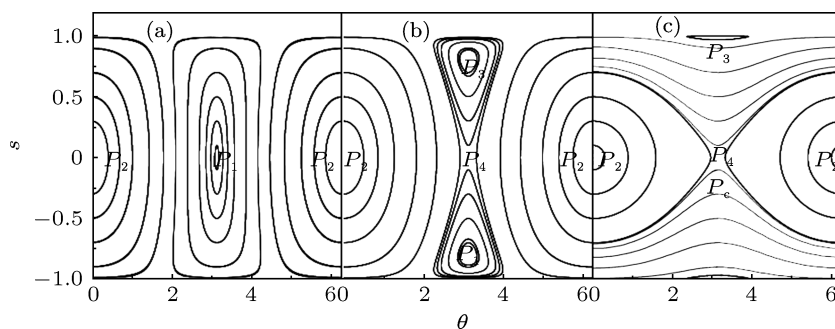


图2 在不同耦合系数下 unitarity 区光晶格中粒子布居数差与相对相位的关系 ( $a_f = -10^{10000}$ ) (a)  $\nu = 18.0$ ; (b)  $\nu = 8.0$ ; (c)  $\nu = 2.0$

### 3.2 散射长度 $a_f$ 与临界值 $\nu$ 的关系

在图2中我们可以看到从约瑟夫振荡区过渡到振荡自俘获区时有一个临界点  $\nu_1$ , 再从振荡自俘获区过渡到自俘获区时又有一个临界点  $\nu_2$ , 因此, 我们将改变散射长度  $a_f$ , 看临界值将如何变化(图3, 其中实心球表示临界点  $\nu_1$  的变化, 圆圈表示临界点  $\nu_2$  的变化). 1) 从约瑟夫振荡区过渡到振荡自俘获区时(图3实心球表示), 当散射长度  $a_f < -10^2$  时, 临界值  $\nu_1 = 14$  将保持不变, 当散射长度  $-10^2 \leq a_f < -2$  时, 临界值  $\nu_1 = 15$  将保持不变, 当散射长度  $a_f \geq -2$  时, 临界值逐渐增大; 2) 从振荡自俘获区过渡到自俘获区时(图3圆圈表示), 当散射长度  $a_f < -8$  时, 临界值  $\nu_2 = 7$  将保持不变, 当散射长度  $-8 \leq a_f < -1$  时, 临界值  $\nu_2 = 8$  将保持不变, 当散射长度  $a_f \geq -1$  时, 临界值逐渐增大.

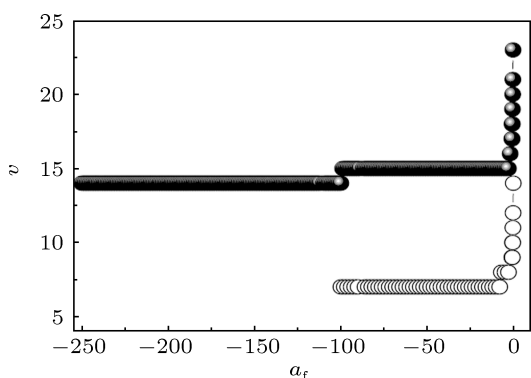


图3 散射长度  $a_f$  与临界值  $\nu$  的关系 (其中实心表示从约瑟夫振荡区过渡到振荡自俘获区, 圆圈表示从振荡自俘获区过渡到自俘获区)

### 4 周期调制

系统加上高频周期调制场  $\gamma = A \sin(\omega t)$  后 ( $\omega \geq 100$ ), 对于不同的耦合系数  $\nu$ , 数值计算布居数差  $s$  随时间的变化, 我们发现临界现象. 例如

$\omega = 100, \frac{A}{\omega} = 0.5$  时,  $\langle s \rangle = 0$  和  $\langle s \rangle \neq 0$  (即非俘获与自俘获) 的临界值是  $\nu = 8.1$  (图4).

当周期调制的频率  $\omega$  小于 100.0 时, 情况比较复杂. 例如, 当  $\omega = 10.0$  时, 改变  $A = 10-90$ , 得出关于  $\nu$  的一条临界线 (临界线上面非俘获区, 下面自俘获区), 当  $\omega = 2.0$  时, 改变  $A = 10-90$ , 又得出关于  $\nu$  的另一条临界线 (临界线上面非俘获区, 下面自俘获区), 这时,  $\omega = 2.0$  非俘获区与  $\omega = 10.0$  自俘获区部分重合 (图5).

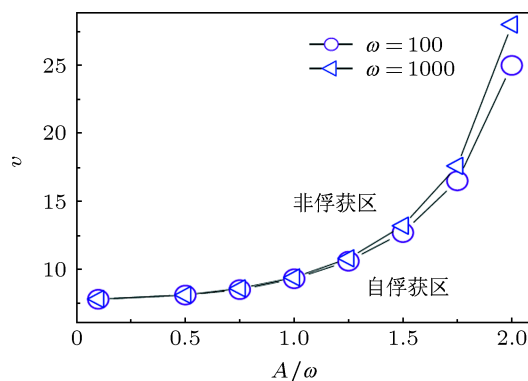


图4 不同频率  $\omega$  下  $\nu$  的临界值与  $A/\omega$  的关系 ( $a_f = -10^{10000}$ , 初值  $s = 0.99, \theta = 3.14$ )

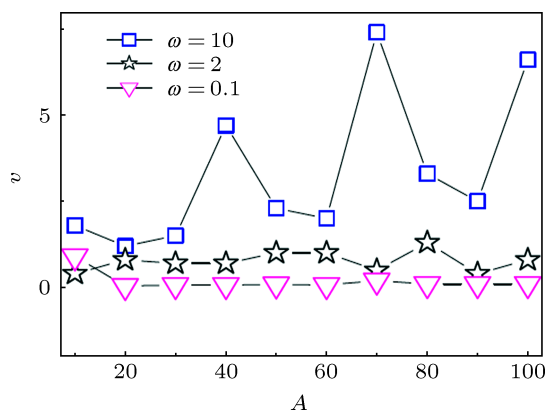


图5 不同频率  $\omega$  下  $\nu$  的临界值与  $A/\omega$  的关系 ( $a_f = -10^{10000}$ , 初值  $s = 0.99, \theta = 3.14$ )

## 5 结论

讨论了从 BCS 区过渡到 unitarity 区相图的变化与周期调制, 发现耦合系数与散射长度主要影响 unitarity 区相图, 从约瑟夫振荡到振荡自俘获和振

荡自俘获到自俘获分别找到了临界的耦合系数, 并得到了临界耦合系数与散射长度的关系. 对于周期调制, 在 unitarity 区的高频区 ( $\omega \geq 100.0$ ) 存在自俘获与非俘获转变的临界曲线.

- 
- [1] Xiong H W, Lin S J, Zhang W P, Zhan M S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 120401
- [2] Men F D, Lin H, Zhu H Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3236
- [3] Qin F, Chen J S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2654
- [4] Huang Z F, Ou C J, Chen J C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1380
- [5] Men F D, Liu H, Fan Z L, Zhu H Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2649
- [6] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404 Liu J, Wu B, Niu Q 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 140402
- [7] Mu Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云, 傅立斌, 杨志安, 刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]
- [8] Wen W, Shen S Q, Huang G X 2010 *Phys. Rev. B* **81** 014528
- [9] Zang X F, Li J P, Tan L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4348 (in Chinese) [臧小飞, 李菊萍, 谭磊 2007 物理学报 **56** 4348]
- [10] Wang G F, Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 13619
- [11] Jochin S, Bartenstein M, Altmeyer A, Hendl G, Chin C, Hecker Denschlag J, Grimm R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **91** 240402
- [12] Qi P T, Duan W S 2011 *Phys. Rev. A* **84** 033627
- [13] Adhikari S K, Malomed B A, Salasnich L, Toigo F 2010 *Phys. Rev. A* **81** 053630
- [14] Cheng Y S, Adhikari S K, 2011 *Phys. Rev. A* **84** 023632
- [15] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [16] Qi R, Yu X L, Li Z B, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 185301
- [17] Liu J, Fu L B, Ou B Y, Chen S G, Wu B, Qiu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404
- [18] Wang W Y, Meng H J, Yang Y, Qi P T, Ma Y Y, Ma Y, Duan W S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 087302 (in Chinese) [王文元, 蒙红娟, 杨阳, 祁鹏堂, 马云云, 马莹, 段文山 2012 物理学报 **61** 087302]
- [19] Ye D F, Fu L B, Liu J 2008 *Phys. Rev. A* **77** 013402
- [20] Li S C, Fu L B, Duan W S, Liu J 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063621
- [21] Inguscio M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 150403
- [22] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023402
- [23] Adhikari S.K, Salasnich L 2008 *Phys. Rev. A* **78** 043616
- [24] Fu L B, Liu J, Chen S G 2002 *Phys. Rev. A* **298** 388
- [25] Liu W M, Fan W B, Zheng W M, Liang J Q, Chui S T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
- [26] Huang F, Li H B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020303 (in Chinese) [黄芳, 李海彬 2011 物理学报 **60** 020303]
- [27] Bharucha C F, Madison K W, Morrow P R, Wilkinson S R, Sundaram B, Raizen M G 1997 *Phys. Rev. A* **55** R857
- [28] Madison K W, Bharucha C F, Morrow P R, Wilkinson S R, Niu Q, Sunaram B, Raizen M G 1997 *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **65** 693
- [29] Qi P T, Duan W S 2011 *Phys. Rev. A* **84** 033627
- [30] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [31] Modugno G, Roati G, Riboli F, Ferlaino F, Brecha R J, Inguscio M 2002 *Science* **297** 2240
- [32] Volz T, Dürr S, Ernst S, Marte A, Rempe G 2003 *Phys. Rev. A* **68** 010702

# Self-trapping and periodic modulation of Fermi gases in optical lattices\*

Gou Xue-Qiang Yan Ming Ling Wei-Dong Zhao Hong-Yu Duan Wen-Shan<sup>†</sup>

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 4 February 2013; revised manuscript received 1 March 2013)

## Abstract

The change of phase space and periodic modulation of Fermi gas from the BCS to unitarity is investigated in one-dimensional optical lattice. Through controlling the scattering length and coupling constant in unitarity, we find the critical values (from the Josephson oscillation to the oscillating-phase-type self-trapping and from the latter to the self-trapping), at the same time, we also find the relationship between the critical coupling constants and the scattering length.

**Keywords:** Fermi gases, self-trapping, periodic modulation

**PACS:** 03.75.Ss, 67.10.Db, 71.10.Ay

**DOI:** 10.7498/aps.62.130308

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11275156).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: duanws@126.com