

一类具有可变系数的混沌系统的同步*

牛弘 张国山†

(天津大学电气与自动化工程学院, 天津 300072)

(2013年1月29日收到; 2013年3月20日收到修改稿)

本文基于系统传递函数矩阵的严格正实性, 针对一类具有可变系数的混沌(或超混沌)系统的自同步与异结构同步问题提出了解决方法. 通过在响应系统中加入同步控制器, 并将待同步系统导出的误差系统中的非线性部分作为误差系统输入, 将误差状态变量作为误差系统输出, 使误差系统的传递函数矩阵成为严格正实的, 这样可使误差系统的原点是渐近稳定的, 即两系统达到稳定的混沌(或超混沌)同步. 所设计的同步控制器参数选取范围明确, 均为线性的, 且对于待同步系统的系数变化具有一定的鲁棒性. 文中给出了同步控制器的具体设计过程和同步结果, 并结合数值仿真验证了该方法的可行性与有效性.

关键词: 严格正实, 可变系数, 混沌同步

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.130502

参数范围和鲁棒性.

1 引言

混沌运动是1963年由Lorenz^[1]首先发现的. 1990年, Pecora和Carroll提出了驱动-响应同步法^[2], 并在电子线路上首次观察到混沌同步现象. 自那之后, 涌现了大量的混沌同步方法, 如变量反馈控制同步法^[3,4]、主动-被动同步法^[5]、相互耦合同步法^[6]、自适应同步法^[7,8]、脉冲同步法^[9]等. 混沌同步的应用领域也从物理学迅速扩展到生物学、化学、医学、电子学、信息科学和保密通信等领域.

在混沌同步控制器的设计中, 如何合理安排非线性项以及确定各状态的混沌域范围一直是设计中的重点与难点. 当待同步系统系数发生变化时同步控制器的鲁棒性是其性能的设计要求之一. 理想的同步控制器应为线性的且各控制参数具有明确选取范围, 这有利于其在电路中实现. 为满足以上要求, 本文基于系统传递函数矩阵的严格正实性提出一种新的同步方法. 该方法通过合理利用非线性项来避免对各状态混沌域范围的确定. 而且, 所设计的同步控制器均为线性的且具有确定的控制

2 严格正实传递函数矩阵

定义1^[10] 设有一个 $p \times p$ 正则有理传递函数矩阵 $G(s)$, 如果: 1) $G(s)$ 所有元素的极点都满足 $\text{Re}[s] \leq 0$, 2) 对于所有实数 ω , $j\omega$ 不是 $G(s)$ 的任一元素的极点, 矩阵 $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ 是半正定的, 3) $G(s)$ 任一元素的任一纯虚数极点 $j\omega$ 是单阶的, 且留数矩阵 $\lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)G(s)$ 是半正定Hermit阵, 则 $G(s)$ 是正实的. 如果对于某个 $\varepsilon > 0$, $G(s - \varepsilon)$ 是正实的, 则传递函数矩阵 $G(s)$ 称为严格正实的.

引理1^[10](Kalman-Yakubovich-Popov引理) 设 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 是 $p \times p$ 传递函数矩阵, 其中 (A, B) 可控, (A, C) 可观. 当且仅当存在矩阵 $P = P^T > 0$, L, W 和正常数 ε , 满足

$$PA + A^T P = -L^T L - \varepsilon P, \quad (1)$$

$$PB = C^T - L^T W, \quad (2)$$

$$W^T W = D + D^T \quad (3)$$

时, $G(s)$ 是严格正实的.

推论1^[11] 对于 $D = 0$ 的系统, 设 $G(s) =$

* 国家自然科学基金(批准号: 61074088)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhanggs@tju.edu.cn

$C(sI - A)^{-1}B$ 是 $p \times p$ 传递函数矩阵, 其中 (A, B) 可控, (A, C) 可观. $G(s)$ 是严格正实函数矩阵的充分条件为存在矩阵 $P = P^T > 0$ 和 $Q = Q^T > 0$, 使得

$$PA + A^T P = -Q, \quad (4)$$

$$PB = C^T \quad (5)$$

同时满足.

证明 假设存在 $P = P^T > 0$ 和 $Q = Q^T > 0$ 满足 (4) 和 (5) 式, 则存在可逆矩阵 L 和 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Q = L^T L + \varepsilon P, \quad (6)$$

将 (6) 式代入到 (4) 式中, 根据引理 1 可得 $G(s)$ 是严格正实的.

证毕.

3 同步控制器的设计

3.1 待同步系统结构相同

大部分自治连续混沌系统均可表示为

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + g(x_1), \quad (7)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为 $n \times n$ 阶实矩阵, $g(x_1)$ 表示系统中的非线性部分, $x_1, \dot{x}_1 \in \chi, \chi \subset R^n$ 为一有界闭域, $x_1, g(x_1), \dot{x}_1$ 是连续的.

以系统 (7) 作为驱动系统, 则响应系统可表示为

$$\dot{x}_2 = Ax_2 + g(x_2) + u_c, \quad (8)$$

其中, $x_2, \dot{x}_2 \in \chi, x_2, g(x_2), \dot{x}_2$ 是连续的, u_c 为待设计的同步控制器.

令误差 $e = x_2 - x_1$, 则

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = Ae + [g(x_2) - g(x_1)] + u_c \\ &= Ae + B(u + u_c), \end{aligned} \quad (9)$$

由 $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2 \in \chi$, 可得 $e, \dot{e} \in \chi_1, \chi_1 \subset R^n$ 为一有界闭域. e, \dot{e} 是连续的. B 为 n 维单位矩阵.

令系统 (9) 的输出 y 和同步控制器 u_c 分别为

$$y = Ce, \quad (10)$$

$$u_c = -Ky = -KCe, \quad (11)$$

其中, C 为 n 维单位矩阵, $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k_i \in R$ 且 $k_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

将 (11) 式代入到 (9) 式中, 则误差系统可表示为

$$\dot{e} = (A - BKC)e + Bu, \quad (12)$$

$$y = Ce. \quad (13)$$

因为 B, C 均为 n 维单位矩阵, 所以 $(A - BKC, B)$ 可控, $(A - BKC, C)$ 可观, 误差系统 (12)—(13) 是能控能观的.

定理 1^[12-14] 存在 $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n), k_i \in R$ 且 $k_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, P = P^T > 0$ 和 $Q = Q^T > 0$, 使得 $G(s) = C[sI - (A - BKC)]^{-1}B$ 是严格正实的, 则 $u_c = -KCe$ 可使系统 (8) 与 (7) 达到同步.

证明 因为 B, C 均为 n 维单位矩阵, 为满足 (5) 式, 所以 P 为 n 维单位矩阵, 即 $P = I_{n \times n}$. 将 $P = I_{n \times n}$ 代入到 (4) 式中, 因为 $Q = Q^T > 0$, 为满足 (4) 式, 可根据希尔维斯特判据^[15] 来确定 $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 中各参数的取值范围, 从而保证 (4) 式成立. 又因为 $(A - BKC, B)$ 可控, $(A - BKC, C)$ 可观, 根据推论 1, $G(s) = C[sI - (A - BKC)]^{-1}B$ 是严格正实的.

考虑到 u 中不显含 e , 故可将系统 (12) 在 $e = 0$ 处的线性化方程表示为

$$\dot{z} = (A - BKC)z. \quad (14)$$

取正定函数 $W(z) = \frac{1}{2}z^T z$ 作为系统 (14) 的 Lyapunov 函数, 其导数为

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{1}{2}(\dot{z}^T z + z^T \dot{z}) \\ &= \frac{1}{2}z^T [(A - BKC) + (A - BKC)^T]z. \end{aligned}$$

由上述证明过程可知, $[(A - BKC) + (A - BKC)^T]$ 是负定的, 所以 \dot{W} 是负定的, 系统 (14) 在 $z = 0$ 处是渐近稳定的, 则矩阵 $(A - BKC)$ 的所有特征值均具有负实部. 根据 Lyapunov 第一法 (间接法)^[15], 系统 (12) 在 $e = 0$ 处是渐近稳定的, 即混沌系统 (8) 与 (7) 可以达到稳定的同步.

证毕.

推论 2 若 $e = 0$ 是 (12) 式的唯一平衡点, 则系统 (12) 在 $e \in \chi_1$ 内是全局渐近稳定的.

证明 对于具有相同结构的系统 (7) 与 (8), 它们具有相同的吸引子. 又因为混沌吸引子具有遍历性^[16], 即时间足够长时, 吸引子中轨道可遍及吸引子中各处. 因此, 若 $e = 0$ 是 (12) 式的唯一平衡点,

则时间足够长时, 误差 e 一定可以进入到 $e = \mathbf{0}$ 附近的渐近稳定邻域内, 这样系统 (12) 在 $e \in \chi_1$ 内是全局渐近稳定的.

证毕.

3.2 待同步系统结构不同

对于两个结构不同的混沌 (或超混沌) 系统的全状态同步, 仍选择驱动系统如 (7) 式所示, 则响应系统可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_3 + \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}_3) + \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{u}_{cd}, \quad (15)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mm} \end{bmatrix}$$

为 $m \times m$ 阶实矩阵, $\tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}_3)$ 表示系统中的非线性部分, $\boldsymbol{x}_3, \dot{\boldsymbol{x}}_3 \in \chi_2, \chi_2 \subset \mathbf{R}^n$ 为一有界闭域, $\boldsymbol{x}_3, \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}_3), \dot{\boldsymbol{x}}_3$ 是连续的. $\boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{u}_{cd}$ 分别为待设计的结构补偿器与同步控制器. 结构补偿器 \boldsymbol{u}_s 的作用是补偿两系统结构上的差异, 以便使两形态差异很大的吸引子在同步控制器 \boldsymbol{u}_{cd} 的作用下达达到同步.

3.2.1 驱动系统的维数不高于响应系统的维数 ($n \leq m$)

若驱动系统的维数不高于响应系统的维数 ($n \leq m$), 则可将 $\boldsymbol{x}_3, \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}_3), \tilde{\boldsymbol{A}}$ 分别分解为

$$\boldsymbol{x}_3 = \left. \begin{bmatrix} x_{31} \\ \vdots \\ x_{3n} \\ x_{3(n+1)} \\ \vdots \\ x_{3m} \end{bmatrix} \right\} \begin{matrix} \boldsymbol{x}_{3(n \times 1)} \\ \boldsymbol{x}_{3((m-n) \times 1)} \end{matrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}_3) = \left. \begin{bmatrix} \tilde{g}_1(\boldsymbol{x}_3) \\ \vdots \\ \tilde{g}_n(\boldsymbol{x}_3) \\ \tilde{g}_{(n+1)}(\boldsymbol{x}_3) \\ \vdots \\ \tilde{g}_m(\boldsymbol{x}_3) \end{bmatrix} \right\} \begin{matrix} \tilde{\boldsymbol{g}}_{(n \times 1)}(\boldsymbol{x}_3) \\ \tilde{\boldsymbol{g}}_{(m-n) \times 1}(\boldsymbol{x}_3) \end{matrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times n} & \vdots & \tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times (m-n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{\boldsymbol{A}}_{(m-n) \times n} & \vdots & \tilde{\boldsymbol{A}}_{(m-n) \times (m-n)} \end{bmatrix},$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times (m-n)} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1(n+1)} & \cdots & \tilde{a}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n(n+1)} & \cdots & \tilde{a}_{nm} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{(m-n) \times n} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{(n+1)1} & \cdots & \tilde{a}_{(n+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{(m-n) \times (m-n)} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{(n+1)(n+1)} & \cdots & \tilde{a}_{(n+1)m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m(n+1)} & \cdots & \tilde{a}_{mm} \end{bmatrix}.$$

令误差 $\boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{x}_{3(n \times 1)} - \boldsymbol{x}_1$, 则

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_d &= \dot{\boldsymbol{x}}_{3(n \times 1)} - \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ &= \tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times n} \boldsymbol{x}_{3(n \times 1)} + \tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times (m-n)} \boldsymbol{x}_{3((m-n) \times 1)} \\ &\quad + \tilde{\boldsymbol{g}}_{n \times 1}(\boldsymbol{x}_3) - \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{u}_{cd} + \boldsymbol{u}_s \\ &= \tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times n} \boldsymbol{e}_d + [\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{3(n \times 1)}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)] \\ &\quad + [(\tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times n} - \boldsymbol{A}) \boldsymbol{x}_1 + \tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times (m-n)} \boldsymbol{x}_{3((m-n) \times 1)} \\ &\quad + \tilde{\boldsymbol{g}}_{n \times 1}(\boldsymbol{x}_3) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{3(n \times 1)})] + \boldsymbol{u}_{cd} + \boldsymbol{u}_s, \quad (16) \end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{x}_1, \dot{\boldsymbol{x}}_1 \in \chi, \boldsymbol{x}_3, \dot{\boldsymbol{x}}_3 \in \chi_2$, 可得 $\boldsymbol{e}_d, \dot{\boldsymbol{e}}_d \in \chi_3, \chi_3 \subset \mathbf{R}^n$ 为一有界闭域. $\boldsymbol{e}_d, \dot{\boldsymbol{e}}_d$ 是连续的.

令结构补偿器 \boldsymbol{u}_s 为

$$\boldsymbol{u}_s = - [(\tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times n} - \boldsymbol{A}) \boldsymbol{x}_1 + \tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times (m-n)} \boldsymbol{x}_{3((m-n) \times 1)} + \tilde{\boldsymbol{g}}_{n \times 1}(\boldsymbol{x}_3) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{3(n \times 1)})], \quad (17)$$

并将其代入到 (16) 式中, 则

$$\dot{\boldsymbol{e}}_d = \tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times n} \boldsymbol{e}_d + [\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{3(n \times 1)}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)] + \boldsymbol{u}_{cd}. \quad (18)$$

对比 (18) 式与 (9) 式可以看出, 对于结构不同的系统 (15) 与系统 (7), 在加入结构补偿器

$$\boldsymbol{u}_s = - [(\tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times n} - \boldsymbol{A}) \boldsymbol{x}_1 + \tilde{\boldsymbol{A}}_{n \times (m-n)} \boldsymbol{x}_{3((m-n) \times 1)} + \tilde{\boldsymbol{g}}_{n \times 1}(\boldsymbol{x}_3) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{3(n \times 1)})]$$

对系统结构差异进行补偿的基础上, 仍可将同步控制器 \mathbf{u}_{cd} 设计为 $\mathbf{u}_{cd} = -K_1 C e_d$, 即存在 $K_1 = \text{diag}(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1n})$, $k_{1i} \in \mathbb{R}$ 且 $k_{1i} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 可使 $-Q_1 = (\tilde{A}_{n \times n} - BK_1 C) + (\tilde{A}_{n \times n} - BK_1 C)^T$ 是负定的, 进而使得系统 (18) 是严格正实的, 根据定理 1, 系统 (15) 与系统 (7) 可以达到全状态同步.

备注 对于非线性部分的结构补偿, 以维数低的系统为准.

3.2.2 驱动系统的维数高于响应系统的维数 ($n > m$)

若驱动系统的维数高于响应系统的维数 ($n > m$), 则要对响应系统进行维数扩展, 使响应系统的维数与驱动系统的维数相同, 才能达到两系统的全状态同步. 对驱动系统的全状态同步是为了保证对其信息跟踪的全面性. 维数扩展后的响应系统为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_3 = \hat{A} \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}_3) + \hat{\mathbf{u}}_s + \hat{\mathbf{u}}_{cd}, \quad (19)$$

其中

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \vdots & O_{m \times (n-m)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{(n-m) \times m} & \vdots & A_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix},$$

$$O_{m \times (n-m)} = \begin{bmatrix} 0_{1(m+1)} & \dots & 0_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m(m+1)} & \dots & 0_{mn} \end{bmatrix},$$

$$A_{(n-m) \times m} = \begin{bmatrix} a_{(m+1)1} & \dots & a_{(m+1)m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

$$A_{(n-m) \times (n-m)} = \begin{bmatrix} a_{(m+1)(m+1)} & \dots & a_{(m+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n(m+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} x_{31} \\ \vdots \\ x_{3m} \\ \hat{x}_{3(m+1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{3n} \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_{31} \\ \vdots \\ x_{3m} \end{array} \right\} \mathbf{x}_3 \\ \left. \begin{array}{l} \hat{x}_{3(m+1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{3n} \end{array} \right\} \hat{\mathbf{x}}_{3((n-m) \times 1)} \end{array} \right\}$$

$$\hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}_3) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1(\mathbf{x}_3) \\ \vdots \\ \tilde{g}_m(\mathbf{x}_3) \\ g_{(m+1)}(\hat{\mathbf{x}}_3) \\ \vdots \\ g_n(\hat{\mathbf{x}}_3) \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \tilde{g}_1(\mathbf{x}_3) \\ \vdots \\ \tilde{g}_m(\mathbf{x}_3) \end{array} \right\} \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_3) \\ \left. \begin{array}{l} g_{(m+1)}(\hat{\mathbf{x}}_3) \\ \vdots \\ g_n(\hat{\mathbf{x}}_3) \end{array} \right\} \mathbf{g}_{(n-m) \times 1}(\hat{\mathbf{x}}_3) \end{array} \right\}$$

在 $\hat{\mathbf{x}}_3$ 中

$$\hat{\mathbf{x}}_{3((n-m) \times 1)} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{3(m+1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{3n} \end{bmatrix} \quad \text{与}$$

$$\mathbf{x}_{1((n-m) \times 1)} = \begin{bmatrix} x_{1(m+1)} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} \quad \text{一一对应.}$$

令误差 $\hat{e}_d = \hat{\mathbf{x}}_3 - \mathbf{x}_1$, 则

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_d &= \dot{\hat{\mathbf{x}}}_3 - \dot{\mathbf{x}}_1 \\ &= \hat{A} \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}_3) - A \mathbf{x}_1 - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) + \hat{\mathbf{u}}_{cd} + \hat{\mathbf{u}}_s \\ &= \hat{A} \hat{e}_d + [\hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}_3) - \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_1)] + [(\hat{A} - A) \mathbf{x}_1 \\ &\quad + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)] + \hat{\mathbf{u}}_{cd} + \hat{\mathbf{u}}_s, \end{aligned} \quad (20)$$

由 $\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_1 \in \mathcal{X}, \hat{\mathbf{x}}_3, \hat{\mathbf{x}}_3 \in \mathcal{X}_4$, 可得 $\hat{e}_d, \dot{\hat{e}}_d \in \mathcal{X}_5, \mathcal{X}_5 \subset \mathbb{R}^n$ 为一有界闭域. $\hat{e}_d, \dot{\hat{e}}_d$ 是连续的.

同理可得

$$\hat{\mathbf{u}}_s = -[(\hat{A} - A) \mathbf{x}_1 + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)], \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{cd} = -K_2 C \hat{e}_d. \quad (22)$$

根据希尔维斯特判据, 存在 $K_2 = \text{diag}(k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2n}), k_{2i} \in \mathbb{R}$ 且 $k_{2i} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 使得 $-Q_2 = (\hat{A} - BK_2 C) + (\hat{A} - BK_2 C)^T$ 是负定的, 从而可使系统 (20) 是严格正实的, 根据定理 1, 系统 (19) 与系统 (7) 可以达到全状态同步.

4 应用与仿真

4.1 线性部分含可变系数的混沌系统的自同步

4.1.1 统一混沌系统 [17,18]

1999 年, 陈关荣等 [19] 在 Lorenz 系统的基础上, 利用工程反馈控制的方法构造了 Chen 混沌系统. 随后, 吕金虎等 [20] 又提出了一个新的 Lü 混沌系统. 2001 年, 吕金虎与陈关荣提出了一个单参数

的统一混沌系统,称为 Lorenz 系统族. 其系统模型如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (25\alpha + 10)(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= (28 - 35\alpha)x_1 - x_1z_1 + (29\alpha - 1)y_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1 - \frac{\alpha + 8}{3}z_1, \end{aligned} \quad (23)$$

系统 (23) 在区间 $\alpha \in [0, 1]$ 内始终是混沌的.

4.1.2 统一混沌系统的同步控制器设计

以系统 (23) 作为驱动系统, 则响应系统的模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= (25\alpha + 10)(y_2 - x_2) + u_{c1}, \\ \dot{y}_2 &= (28 - 35\alpha)x_2 - x_2z_2 + (29\alpha - 1)y_2 + u_{c2}, \\ \dot{z}_2 &= x_2y_2 - \frac{\alpha + 8}{3}z_2 + u_{c3}, \end{aligned} \quad (24)$$

那么,

$$A = \begin{bmatrix} -(25\alpha + 10) & (25\alpha + 10) & 0 \\ (28 - 35\alpha) & (29\alpha - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha + 8}{3} \end{bmatrix},$$

$$B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2z_2 + x_1z_1 \\ x_2y_2 - x_1y_1 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix},$$

$$u_c = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \end{bmatrix} = -KCe = \begin{bmatrix} -k_1e_1 \\ -k_2e_2 \\ -k_3e_3 \end{bmatrix}.$$

所以

$$-Q = (A - BKC) + (A - BKC)^T = \begin{bmatrix} -2(25\alpha + 10 + k_1) & (38 - 10\alpha) & 0 \\ (38 - 10\alpha) & 2(29\alpha - 1 - k_2) & 0 \\ 0 & 0 & -2\left(\frac{\alpha + 8}{3} + k_3\right) \end{bmatrix},$$

其各阶顺序主子行列式分别为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -2(25\alpha + 10 + k_1) < 0, \\ \Delta_2 &= -4(25\alpha + 10 + k_1)(29\alpha - 1 - k_2) \\ &\quad - (38 - 10\alpha)^2 > 0, \\ \Delta_3 &= 2\left(\frac{\alpha + 8}{3} + k_3\right) [4(25\alpha + 10 + k_1) \\ &\quad \times (29\alpha - 1 - k_2) + (38 - 10\alpha)^2] < 0, \end{aligned} \quad (25)$$

由 (25) 式, 可取

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 > \max [-(25\alpha + 10)] = -10, \\ k_2 &= 40 > \max \left[\frac{(38 - 10\alpha)^2}{4(25\alpha + 10 + k_1)} + (29\alpha - 1) \right] \\ &= 35.1, \\ k_3 &= 0 > \max \left(-\frac{\alpha + 8}{3} \right) = -\frac{8}{3}, \end{aligned}$$

所以

$$u_c = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -40e_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

4.1.3 同步控制器的有效性与鲁棒性

定义2^[16] 加入同步控制器 u_c 后, 响应系统的 Lyapunov 指数称为条件 Lyapunov 指数.

定理2^[2,16](同步定理) 只有当响应系统的所有条件 Lyapunov 指数都是负值时, 才能达到响应系统与驱动系统的同步.

当 $\alpha \in [0, 1]$ 时, 保持同步控制器 u_c 如 (26) 式所示, 响应系统 (24) 的条件 Lyapunov 指数谱如图 1 中所示, 其中 $(x_{10}, y_{10}, z_{10}) = (1, 1, 1)$, $(x_{20}, y_{20}, z_{20}) = (5, 7, 8)$. 从图 1 中可以看出, 响应系统 (24) 的条件 Lyapunov 指数均为负值, 说明所设计的同步控制器 u_c 在 $\alpha \in [0, 1]$ 内均可使响应系统 (24) 与驱动系统

(23) 达到稳定的混沌同步. 该同步控制器 u_c 对于统一混沌系统的系数变化具有一定的鲁棒性.

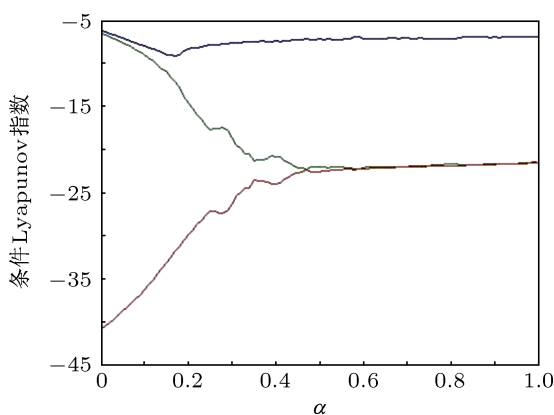


图1 $\alpha \in [0, 1]$ 时响应系统 (24) 的条件 Lyapunov 指数谱

4.1.4 同步控制器的灵活性

现考虑结构与系统 (23) 相同但系数不满足单参数关系的混沌系统的同步问题. 系统模型如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (25\alpha_1 + 10)(y - x), \\ \dot{y} &= (28 - 35\alpha_2)x - xz + (29\alpha_3 - 1)y, \\ \dot{z} &= xy - \frac{\alpha_4 + 8}{3}z, \end{aligned} \quad (27)$$

其中, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in [0, 1]$.

对于系统 (27), 要使由误差系统线性部分的系数矩阵 A 计算出的矩阵 $-Q = (A - BKC) + (A - BKC)^T$ 是负定的, 则仍可取 $k_1 = 0, k_3 = 0$, 此时只要适当调整 k_2 的取值即可使两系统达到稳定的混沌同步. 这扩大了同步控制器 u_c 的应用范围, 说明了同步控制器 u_c 在使用中的灵活性.

4.2 非线性部分含可变系数的混沌系统的自同步

4.2.1 一个新混沌系统

2012 年, 张国山等^[21] 通过在 Chen 系统的第一个方程中加入一个可变系数的乘积项, 构造了一个新的三维自治混沌系统. 该系统可通过调节所加乘积项的可变系数实现不同系数组合下系统的混沌产生或抑制. 新系统的模型如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(y_1 - x_1) + Hy_1z_1, \\ \dot{y}_1 &= (c - a)x_1 - x_1z_1 + cy_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1 - bz_1, \end{aligned} \quad (28)$$

其中, $a = 23, b = 3, c = 18$. 当 $H \in [22.2, 40]$ 时, 系统 (28) 一直处于混沌状态.

4.2.2 新系统的同步控制器设计

以系统 (28) 作为驱动系统, 则响应系统的模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) + Hy_2z_2 + u_{c1}, \\ \dot{y}_2 &= (c - a)x_2 - x_2z_2 + cy_2 + u_{c2}, \\ \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2 + u_{c3}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix},$$

$$B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} H(y_2z_2 - y_1z_1) \\ -x_2z_2 + x_1z_1 \\ x_2y_2 - x_1y_1 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix},$$

$$u_c = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \end{bmatrix} = -KCe = \begin{bmatrix} -k_1e_1 \\ -k_2e_2 \\ -k_3e_3 \end{bmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} -Q &= (A - BKC) + (A - BKC)^T \\ &= \begin{bmatrix} -2(a + k_1) & c & 0 \\ c & 2(c - k_2) & 0 \\ 0 & 0 & -2(b + k_3) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其各阶顺序主子行列式分别为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -2(a + k_1) < 0, \\ \Delta_2 &= -4(a + k_1)(c - k_2) - c^2 > 0, \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = 2(b+k_3)[4(a+k_1)(c-k_2)+c^2] < 0, \quad (30)$$

由 (30) 式, 可取

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 > -a = -23, \\ k_2 &= 25 > \left[\frac{c^2}{4(a+k_1)} + c \right] = 21.6, \\ k_3 &= 0 > -b = -3, \end{aligned}$$

所以,

$$\mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -25e_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

4.2.3 同步控制器的有效性与鲁棒性

由于误差系统 (12) 的非线性部分被外化为不显含误差 e 的系统输入 u , 因此在同步控制器 u_c 的设计过程中未考虑非线性部分的系数变化对两系统同步的影响. 现同时改变 (28) 式与 (29) 式中非线性乘积项可变系数 H 的取值, 使其在 $H \in [22.2, 40]$ 之间变化, 仍选择同步控制器 u_c 如 (31) 式所示, 考察响应系统 (29) 与驱动系统 (28) 的同步情况.

$H \in [22.2, 40]$ 时, 响应系统 (29) 的条件 Lyapunov 指数谱如图 2 中所示, 其中 $(x_{10}, y_{10}, z_{10}) = (1, 1, 1)$, $(x_{20}, y_{20}, z_{20}) = (5, 7, 8)$. 从图 2 中可以看出, 不同 H 值下响应系统 (29) 的条件 Lyapunov 指数均为负值, 说明同步控制器 u_c 对于 H 的变化具有一定的鲁棒性, 即改变 H 的取值, 仍选择同步控制器 u_c 如 (31) 式所示, 响应系统 (29) 与驱动系统 (28) 仍可以很好的达到混沌同步. 这降低了 H 变化时同步控制器 u_c 的设计难度, 增强了 u_c 的适用性.

4.2.4 同步控制器的明确性与线性性

采用本文提出的方法设计同步控制器的优势在于, 同步控制器中各参数的选取只与系统线性部分各系数有关, 与非线性部分系数及混沌系统状态变量无关. 因此, 在系统线性部分各系数已知的前提下, 同步控制器中各参数可以具有明确的选取范围. 以新系统为例, 响应系统 (29) 与驱动系统 (28) 对应项相减构成的误差系统在 $e = 0$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a-k_1 & a+Hz_1 & Hy_1 \\ c-a-z_1 & c-k_2 & -x_1 \\ y_1 & x_1 & -b-k_3 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

可以看出, 矩阵 (32) 式中包含驱动系统 (28) 的状态变量和可变系数 H . 若要使矩阵式 (32) 是 Hurwitz 的, 则同步控制器参数 k_1, k_2, k_3 的选取将与 $x_1, y_1,$

z_1 的范围及 H 的大小有关, 而 x_1, y_1, z_1 的范围是不易确定的且 H 亦是可变的. 因此, 采用本文提出的方法仅根据系统线性部分的系数矩阵 A 就可以得到参数选取范围明确的同步控制器, 且所设计的同步控制器均为线性的, 便于在同步电路中实现.

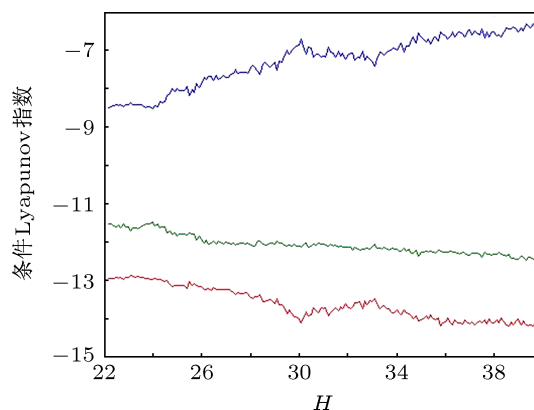


图 2 $H \in [22.2, 40]$ 时响应系统 (29) 的条件 Lyapunov 指数谱

4.3 不同维异结构系统的全状态同步

4.3.1 统一超混沌系统

统一超混沌系统^[22]的模型如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (25a+20)(y_1-x_1)+w_1, \\ \dot{y}_1 &= (28-35a)x_1-x_1z_1+(29a-1)y_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1-\frac{a+8}{3}z_1, \quad \dot{w}_1 = bw_1+cy_1z_1, \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $b = 0.2, c = 0.1$. 当 $a \in [0.08, 2.76]$ 时, 系统 (33) 一直处于超混沌状态.

4.3.2 不同维异结构系统的结构补偿器与同步控制器设计

以统一超混沌系统 (33) 作为驱动系统, 以新系统 (28) 作为响应系统, 对新系统进行维数扩展, 得到响应新系统的模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= a_2(y_3-x_3)+Hy_3z_3+u_{s1}+u_{cd1}, \\ \dot{y}_3 &= (c_2-a_2)x_3-x_3z_3+c_2y_3+u_{s2}+u_{cd2}, \\ \dot{z}_3 &= x_3y_3-b_2z_3+u_{s3}+u_{cd3}, \\ \dot{w}_3 &= bw_3+cy_3z_3+u_{s4}+u_{cd4}, \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} b &= 0.2, c = 0.1, a_2 = 23, b_2 = 3, \\ c_2 &= 18, \quad H \in [22.2, 40], \\ \mathbf{u}_s &= [u_{s1} \quad u_{s2} \quad u_{s3} \quad u_{s4}]^T \end{aligned}$$

为结构补偿器, $\mathbf{u}_{cd} = [u_{cd1} \quad u_{cd2} \quad u_{cd3} \quad u_{cd4}]^T$ 为同步控制器.

根据上文中的理论推导可得

$$A = \begin{bmatrix} -(25a+20) & (25a+20) & 0 & 1 \\ (28-35a) & (29a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a+8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} -a_2 & a_2 & 0 & 0 \\ (c_2-a_2) & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \\
 B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix}, \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 z_1 \\ x_1 y_1 \\ c y_1 z_1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}_3) = \begin{bmatrix} H y_3 z_3 \\ -x_3 z_3 \\ x_3 y_3 \\ c y_3 z_3 \end{bmatrix}, \\
 K_2 = \begin{bmatrix} k_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{24} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{e}}_d = \hat{\mathbf{x}}_3 - \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \hat{e}_{d1} \\ \hat{e}_{d2} \\ \hat{e}_{d3} \\ \hat{e}_{d4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ w_3 - w_1 \end{bmatrix}.$$

所以

$$\mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s3} \\ u_{s4} \end{bmatrix} = -[(\hat{A} - A)\mathbf{x}_1 + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)] \\
 = \begin{bmatrix} -(25a+20-a_2)x_1 + (25a+20-a_2)y_1 + w_1 - H y_1 z_1 \\ (28-35a+a_2-c_2)x_1 + (29a-1-c_2)y_1 \\ \left(-\frac{a+8}{3}+b_2\right)z_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\mathbf{u}_{cd} = \begin{bmatrix} u_{cd1} \\ u_{cd2} \\ u_{cd3} \\ u_{cd4} \end{bmatrix} = -K_2 C \hat{\mathbf{e}}_d = \begin{bmatrix} -k_{21} \hat{e}_{d1} \\ -k_{22} \hat{e}_{d2} \\ -k_{23} \hat{e}_{d3} \\ -k_{24} \hat{e}_{d4} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

所以

$$-Q_2 = (\hat{A} - BK_2C) + (\hat{A} - BK_2C)^T = \begin{bmatrix} -2(a_2+k_{21}) & c_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 2(c_2-k_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(b_2+k_{23}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(b-k_{24}) \end{bmatrix},$$

其各阶顺序主子行列式分别为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -2(a_2 + k_{21}) < 0, \\ \Delta_2 &= -4(a_2 + k_{21})(c_2 - k_{22}) - c_2^2 > 0, \\ \Delta_3 &= 2(b_2 + k_{23})[4(a_2 + k_{21}) \\ &\quad \times (c_2 - k_{22}) + c_2^2] < 0, \\ \Delta_4 &= 4(b_2 + k_{23})[4(a_2 + k_{21}) \\ &\quad \times (c_2 - k_{22}) + c_2^2](b - k_{24}) > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

由 (37) 式, 可取

$$\begin{aligned} k_{21} &= 0 > -a_2 = -23, \\ k_{22} &= 60 > \left[\frac{c_2^2}{4(a_2 + k_1)} + c_2 \right] = 21.6, \\ k_{23} &= 0 > -b_2 = -3, \\ k_{24} &= 1 > b = 0.2, \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{u}_{cd} = \begin{bmatrix} u_{cd1} \\ u_{cd2} \\ u_{cd3} \\ u_{cd4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -60\hat{e}_{d2} \\ 0 \\ -\hat{e}_{d4} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

4.3.3 应用举例

令驱动系统 (33) 的初值为 $(x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}) = (1, 2, 3, 4)$, 取 $a = 1.5$, 此时系统 (33) 的 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_{d1} = 2.4662 > 0$, $\lambda_{d2} = 0.1349 > 0$, $\lambda_{d3} = -0.0014 \approx 0$, $\lambda_{d4} = -20.5662 < 0$, 说明系统 (33) 是超混沌的, 其相轨迹曲线如图 3 中所示. 令响应系统 (34) 的初值为 $(x_{30}, y_{30}, z_{30}, w_{30}) = (5, 7, 8, 6)$, 取 $H = 26.1$, 未进行维数扩展且未加入结构补偿器 \mathbf{u}_s 和同步控制器 \mathbf{u}_{cd} 时, 系统 (34) 的 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_{r1} = 1.3794 > 0$, $\lambda_{r2} = 0$, $\lambda_{r3} = -9.3795 < 0$, 说明此时系统 (34) 是混沌的, 其相轨迹曲线如图 4 中所示. 现将 (35) 式与 (38) 式代入到 (34) 式中, 可得响应系统 (34) 的条件 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1^c = -0.8000$, $\lambda_2^c = -2.6906$, $\lambda_3^c = -32.5944$, $\lambda_4^c = -32.7123$, 均为负值, 说明响应系统 (34) 与驱动系统 (33) 可以达到稳定的同步.

响应系统 (34) 与驱动系统 (33) 对应各状态的误差曲线及同步曲线分别如图 5 和图 6 中所示. 图中横轴 t 表示系统微分方程求解的区间, 为一无量纲量. 可以看出, 误差均渐近收敛于 0, 且收敛速度很快, 两系统的各状态均可以很好的达到同步. 这

说明通过加入结构补偿器 \mathbf{u}_s 与同步控制器 \mathbf{u}_{cd} , 可以实现不同维异结构系统的全状态同步.

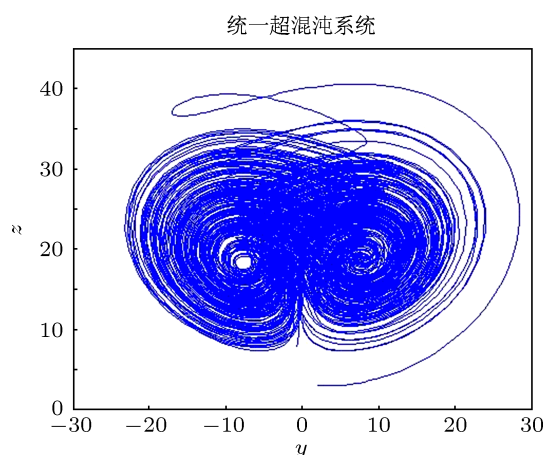


图 3 统一超混沌系统 (33) 的相轨迹曲线

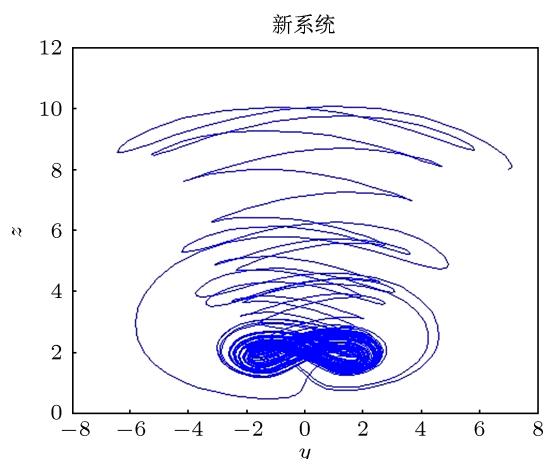


图 4 新系统 (28) 的相轨迹曲线

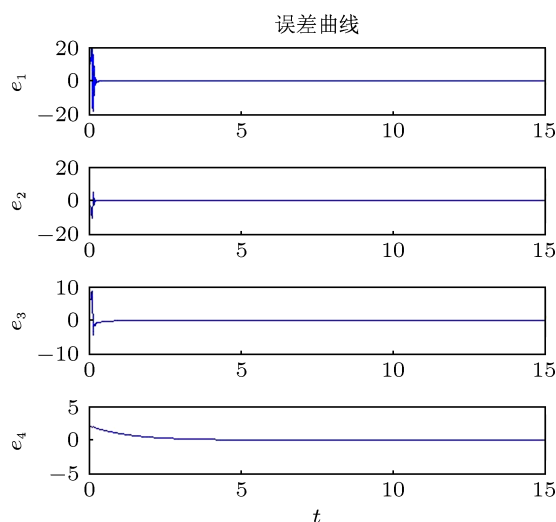


图 5 系统 (34) 与系统 (33) 的误差曲线

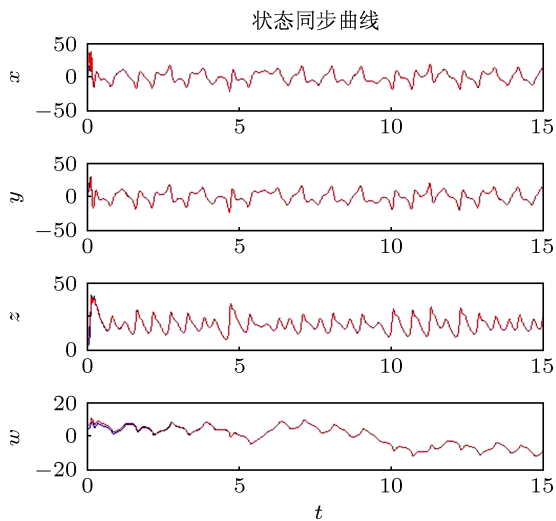


图6 系统(34)与系统(33)的状态同步曲线

4.3.4 同步控制器的鲁棒性

在同步控制器 u_{cd} (38) 式的作用下, 当 $H = 26.1$ 时, 响应系统 (34) 可以同步的驱动系统 (33) 的可变系数 a 的范围为 $a \in ([0.08, 1.95] \cup [1.98, 2.62])$; 当 $H = 32.7$ 时, 可变系数 a 的范围变为

$$a \in ([0.08, 0.78] \cup [0.8, 1.81] \cup [1.83, 1.85] \cup [2.07, 2.1] \cup [2.16, 2.23]).$$

这是由于驱动系统与响应系统的维数不同、结构不同, 故两吸引子差异很大, 因此某一组控制参数下的同步控制器 u_{cd} 很难保证在可变系数的全部变化范围内是鲁棒的, 而只能保证在一定范围内的鲁棒性. 此时可通过适当调整同步控制器参数的取值使其可控范围尽量大. 又因为同步控制器参数的选取具有灵活性, 因此, 对于每个可变系数, 总可以找到合适的控制参数使两维数不同的异结构系统达到全状态同步.

4.3.5 结构补偿器 u_s 的特点

本文所设计的结构补偿器 u_s 在处理误差系统的非线性项时, 并不是简单的将其完全消去, 而是对两异结构系统非线性结构上的差异进行补偿.

从结构补偿器 u_s 的构造方法中可以看出, 如果两维数不同的异结构系统的非线性项相同, 那么由结构补偿器与同步控制器构成的控制部分可以是线性的, 这有利于在同步电路中的应用.

5 结论

本文针对一类具有可变系数的混沌(或超混沌)系统提出了一种基于传递函数矩阵严格正实性的同步方法. 该方法通过在响应系统中加入同步控制器, 并将误差系统中的非线性部分作为误差系统输入, 将误差状态变量作为误差系统输出, 使误差系统的传递函数矩阵成为严格正实的, 从而使得两系统达到稳定的同步. 对于混沌系统的自同步问题, 文中以统一混沌系统和一个新混沌系统为例, 给出了同步控制器的具体设计过程以及响应系统随可变系数变化的条件 Lyapunov 指数谱. 该谱表明, 加入同步控制器后, 响应系统的所有条件 Lyapunov 指数都是负值, 说明在系统可变系数的变化范围内, 系统各状态均可以达到稳定的混沌同步. 这同时也说明所设计的同步控制器对于可变系数的变化具有一定的鲁棒性. 对于不同维异结构系统的全状态同步问题, 文中以统一超混沌系统与新系统的全状态同步为例, 给出了结构补偿器与同步控制器的具体设计过程, 并结合数值仿真绘制出了两系统各状态的误差曲线与同步曲线. 各曲线表明, 通过加入结构补偿器与同步控制器, 确实可使系统各状态的误差很快收敛于 0, 从而实现不同维异结构系统的全状态同步. 应用本文提出的方法设计同步控制器, 无需考察系统中各状态的混沌域范围以及非线性项系数变化的影响, 即可得出参数选取范围明确的线性同步控制器, 且其具有一定的鲁棒性. 综上所述, 本文所提出的方法设计思路直观, 参数选取灵活, 普适性强, 有助于对于混沌以及超混沌同步的进一步研究.

- [1] Lorenz E N 1963 *Amos. J. Sci.* **20** 130
 [2] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 [3] Pyragas K 1993 *Phys. Lett. A* **181** 203
 [4] Wu C J, Zhang Y B, Yang N N 2011 *Chin. Phys. B* **20** 060505
 [5] Kocarev L, Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5028
 [6] Roy R, Thornburg K S J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2009
 [7] Huberman B A, Lumer E 1990 *IEEE Trans. CAS* **37** 547
 [8] Liu F C, Li J Y, Zang X F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030504 (in Chinese)

- [9] Yang T, Chua L O 1997 *IEEE Trans. CAS* **44** 976
 [10] Khalil H K (translated by Zhu Y S) 2005 *Nonlinear Systems* (3rd Ed.) (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) pp173–176 (in Chinese) [哈里尔著(朱义胜译)2005 非线性系统(第三版)(北京:电子工业出版社)第173–176页]
 [11] Xia C Y 1998 *Adaptive control of AC and DC drive systems* (Beijing: China Machine Press) p21 (in Chinese) [夏超英 1998 交直流传动系

- 统的自适应控制 (北京: 机械工业出版社) 第 21 页]
- [12] Liao X X, Chen G R 2003 *Control Theory & Applications* **20** 253
- [13] Liao X X, Fu Y L, Xie S L 2005 *Sci. China Ser. F* **48** 304
- [14] Tanaka T, Langbort C 2011 *IEEE T Automat. Contr.* **56** 2218
- [15] Liu B, Tang W S 2006 *Modern Control Theory* (3rd Ed.) (Beijing: China Machine Press) pp161–165 (in Chinese) [刘豹, 唐万生 2006 现代控制理论 (第 3 版) (北京: 机械工业出版社) 第 161—165 页]
- [16] Liu B Z, Peng J H 2007 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p147 (in Chinese) [刘秉正, 彭建华 2007 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社) 第 147 页]
- [17] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Celikovskiy S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [18] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamic Analysis, Control and Synchronization of Lorenz System Families* (Beijing: Science Press) pp131–149 (in Chinese) [陈关荣, 吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步 (北京: 科学出版社) 第 131—149 页]
- [19] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [20] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [21] Zhang G S, Niu H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110503 (in Chinese) [张国山, 牛弘 2012 物理学报 **61** 110503]
- [22] Wang X Y, Zhao G B 2010 *Int. J. Mod. Phys. B* **24** 4619

Synchronization of chaotic systems with variable coefficients*

Niu Hong Zhang Guo-Shan†

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(Received 29 January 2013; revised manuscript received 20 March 2013)

Abstract

In this paper, a novel method, to synchronize two identical or different chaotic/hyperchaotic systems with variable coefficients, is proposed based on the strictly positive real transfer function matrix. By adding a synchronization controller to the response system, the nonlinear parts of the error system derived from the synchronized systems are identified as the inputs of the error system, and the error state variables are identified as the outputs of the error system. Then the transfer function matrix of the error system can be strictly positive real. As a result, the error system can be asymptotically stable at the origin, i.e., the two chaotic/hyperchaotic systems can reach stable synchronization. Moreover, the designed synchronization controllers are linear, clear in parameter selections and robust to the changes of the coefficients of the error system. The specific design processes of the synchronization controllers and the corresponding results are presented in the paper. Also, the numerical simulation results are given to verify the feasibility and effectiveness of this method.

Keywords: strictly positive realness, variable coefficients, chaos synchronization

PACS: 05.45.—a, 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.130502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61074088).

† Corresponding author. E-mail: zhanggs@tju.edu.cn