

分数阶 Chua's 系统错位同步无感模块化 电路实现及应用*

邵书义 闵富红[†] 马美玲 王恩荣

(南京师范大学电气与自动化工程学院, 南京 210042)

(2013年1月22日收到; 2013年3月11日收到修改稿)

基于分数阶混沌系统稳定性理论, 设计高效的非线性控制器, 实现初始值不同的两个分数阶 Chua's 系统错位投影同步. 根据分数阶复频域近似方法, 提出分数阶系统的等效电路, 实现分数阶 Chua's 系统错位投影同步的无感模块化电路. 最后, 利用改进的混沌掩盖通信原理, 将以上同步方案应用于混沌保密通信中, 在发送端使用分数阶混沌序列对有用信号加密传送, 从接收端可以无失真地恢复出有用信号. 数值仿真与电路仿真证实了提出方案的可行性.

关键词: 分数阶 Chua's 系统, 错位投影同步, 无感模块化电路, 保密通信

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.130504

1 引言

分数阶动力学系统与整数阶动力学系统相比, 分数阶动力学系统更能够呈现实际的物理工程现象^[1,2]. 随着人们对分数阶混沌系统的深入研究, 人们相继提出了分数阶 Rössler 系统^[3]、分数阶 Chen 系统^[4]、分数阶 Lü 系统^[5]、分数阶 Lorenz 系统^[6]等. 为了更好地利用混沌技术, 分数阶混沌系统控制与同步逐渐成为研究的热点课题. 文献 [7] 基于分数阶系统稳定性理论, 设计简单的线性反馈控制器, 成功地实现了分数阶超混沌 Lü 系统的所有状态向量与正弦信号和任意不动点的追踪控制. 文献 [8] 成功实现了分数阶 Chen 系统和三维整数阶 Lorenz 混沌系统之间的同步. 文献 [9] 提出了一种用来判定分数阶混沌系统是否稳定的判定定理, 实现了异结构分数阶混沌系统的投影同步. 文献 [10] 针对一类分数阶混沌系统的同步问题, 设计了一种新的自适应同步控制器以及控制增益系数自适应律. 文献 [11] 提出了一种新型的错位投影同步方案,

实现了初始值不同的两个同结构 Qi 混沌系统错位投影同步, 并将此同步方案应用于保密通信中, 为混沌保密通信开辟了新的路径. 文献 [12] 提出了一种基于延时的分数阶混沌逻辑系统图像加密方法, 通过嵌入密钥序列、时变时滞和分数阶导数, 从而提高了此图像加密方案的安全性能.

近年来, 关于 Chua's 混沌系统^[13]控制与同步研究已有不少, 而且多数是基于有感电路分析, 难于进行实际的电路调试. 若将同步电路的实现无感化, 那么实际电路易于调试, 在混沌保密通信中具有更好实用性. 文献 [14] 提出了一种仅需传递单路信号实现混沌自适应同步的方法, 并实现了两个 Chua's 系统渐进达到同步, 而且辨识出响应系统的未知参数. 文献 [15] 对四阶 Chua's 系统的相平面和时序进行数值仿真, 分析了此非光滑系统的分岔. 然而, 对分数阶 Chua's 系统同步控制的电路实现以及在保密通信中的应用研究鲜少. 文献 [16] 通过分析分数阶变形 Chua's 系统, 发现混沌行为存在于分数阶非线性动力学系统中分数阶的阶数小于 3, 但是没有对分数阶变形 Chua's 系统进行相应的电路

* 国家自然科学基金 (批准号: 51075275)、教育部留学回国人员科研启动基金 (批准号: 教外司 [2012]1707 号) 和江苏省六大人才高峰资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

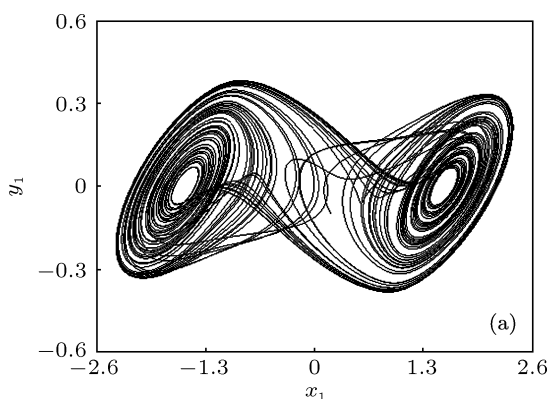
设计. 因而, 开展分数阶 Chua's 混沌系统的错位投影同步研究、无感电路设计以及通信应用, 具有重要的实际意义.

本文针对分数阶 Chua's 混沌系统进行研究, 基于分数阶线性系统稳定理论, 设计同步方案, 实现初始值不同的两个分数阶 Chua's 混沌系统的错位投影同步. 设计出分数阶等效模块电路, 基于 Multisim 软件构建分数阶 Chua's 混沌系统错位投影同步的无感模块化电路图, 完成同步电路的模拟. 然后, 将该同步方案应用到混沌系统的保密通信中, 证实错位投影同步方案在保密通信中的有效性.

2 分数阶 Chua's 系统

分数阶 Chua's 系统的数学模型为

$$\frac{d^q x_1}{dt^q} = a[y_1 - h(x_1)],$$



$$\begin{aligned} \frac{d^q y_1}{dt^q} &= x_1 - y_1 + z_1, \\ \frac{d^q z_1}{dt^q} &= -by_1. \end{aligned} \quad (1)$$

其中, 非线性函数为

$$h(x_1) = m_1 x_1 + 0.5(m_0 - m_1)[|x_1 + 1| - |x_1 - 1|],$$

q 为分数阶的阶数. a, b, m_0, m_1 为控制参数, x_1, y_1, z_1 为系统的状态变量. 选取系统参数 $a = 10, b = 14.7, m_0 = -0.144, m_1 = 0.256$, 初始值 $[0.2 \ 0.1 \ 0.1]$. 对分数阶 $q \in (0.01, 0.99)$ 进行数值仿真, 步长取为 0.005, 逼近误差为 1 dB. 当分数阶 $0 < q \leq 0.96$ 时系统 (1) 出现周期或者不动点; 当 $q = 0.97$ 时, 系统 (1) 出现单涡卷; 当 $q = 0.98$ 和 0.99 时, 系统 (1) 出现双涡卷. 分数阶 Chua's 系统相平面如图 1 所示.

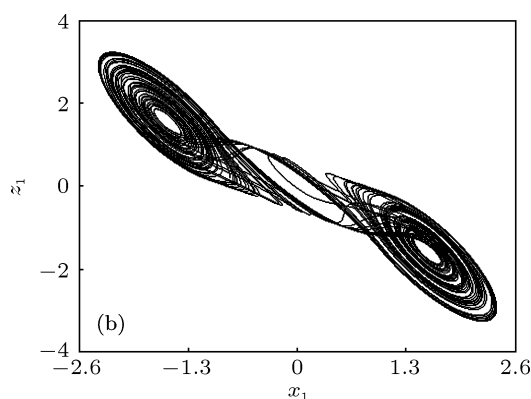


图 1 分数阶 Chua's 系统相平面图 ($q = 0.98$) (a) $x_1 - y_1$ 相平面; (b) $x_1 - z_1$ 相平面

3 分数阶 Chua's 系统的错位投影同步

根据文献 [11], 混沌系统错位投影同步是指要求驱动系统与响应系统的状态向量至少有一对状态向量不按照广义投影同步的对应关系. 下面将设计合适的非线性反馈控制器, 研究初始值不同的两个分数阶 Chua's 系统错位投影同步及应用. 考虑如下耦合的两个非线性混沌系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i), \\ \dot{y}_j &= g(y_j) + u_j, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 系统 (2) 中的第一式为驱动系统, 系统 (2) 中的第二式为响应系统, 其中

u_j 为设置的控制器. 假设存在 α ($\alpha \neq 0$), 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_j - \alpha x_i\| = 0$, 并且 i 和 j 至少有一对值不相等, 那么称系统 (2) 完成了错位投影同步.

以系统 (1) 作为驱动系统, 响应系统设为

$$\begin{aligned} \frac{d^q x_2}{dt^q} &= a[y_2 - h(x_2)] + u_1, \\ \frac{d^q y_2}{dt^q} &= x_2 - y_2 + z_2 + u_2, \quad \frac{d^q z_2}{dt^q} = -by_2 + u_3. \end{aligned} \quad (3)$$

其中, u_1, u_2, u_3 为控制器. 定义错位投影同步误差为

$$\begin{aligned} e_1 &= y_2 - \alpha x_1, \\ e_2 &= z_2 - \alpha y_1, \quad e_3 = x_2 - \alpha z_1. \end{aligned} \quad (4)$$

误差系统动力学方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^q e_1}{dt^q} &= x_2 - y_2 + z_2 - \alpha a[y_1 - h(x_1)] + u_2, \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} &= -by_2 - \alpha(x_1 - y_1 + z_1) + u_3, \\ \frac{d^q e_3}{dt^q} &= a[y_2 - h(x_2)] + \alpha by_1 + u_1. \end{aligned} \quad (5)$$

控制器 u_1, u_2, u_3 设为

$$\begin{aligned} u_1 &= -a[y_2 - h(x_2)] - \alpha by_1 - k_3 e_3, \\ u_2 &= -\alpha z_1 + \alpha x_1 - \alpha ah(x_1) + \alpha y_1(a - 1), \\ u_3 &= -\alpha y_1 + \alpha z_1 + \alpha x_1(b + 1) - k_2 e_2. \end{aligned} \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (5) 式, 得到如下误差方程:

$$\frac{d^q e_i}{dt^q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -b & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中, $i = 1, 2, 3, k_2 > 0, k_3 > 0$. 通过计算得到, (7) 式中系数矩阵的三个特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-(1+k_2) \pm \sqrt{(k_2+1)^2 - 4(b+k_2)}}{2}, \\ \lambda_3 &= -k_3. \end{aligned} \quad (8)$$

上式中 λ_3 为负实数. 参数 $b = 14.7$. 通过分析, 当 $0 < k_2 \leq 8.53$ 时, 特征值 $\lambda_{1,2}$ 为具有负实部的共轭复根, 当 $k_2 > 8.53$ 时, 特征值 $\lambda_{1,2}$ 为负实数. 显然, 当分数阶次数 $q \in (0.01, 0.99)$ 时, 特征值都满足 $|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2, (i = 1, 2, 3)$, 表明只要控制参数 $k_2 > 0, k_3 > 0$, 对于 $0 < q < 1$ 的分数阶 Chua's 系统同步控制都适用. 根据分数阶线性系统稳定原理, 在误差系统 (7) 的零点渐进稳定, 从而实现了驱动系统 (1) 和响应系统 (3) 的状态向量错位投影同步.

采用预估 - 校正法进行数值仿真, 设 $k_i = 1 (i = 2, 3)$, 时间步长为 0.005, 系统的初始值为 $[0.2, -0.1, 0.1, 0.5, 0.3, -0.2]$. 选取比例因子 $\alpha = 0.5$, 以 $q = 0.98$ 为例, 观测分数阶 Chua's 系统的错位投影同步结果, 仿真结果如图 2 所示. 图 2(a) 表示驱动系统和相应系统的相平面图, 图 2(b) 和 (c) 表示驱动系统和响应系统的状态向量时序图. 图 2(d) 表示错位同步的误差响应曲线, 呈现振荡衰减. 可见, 当时间 $t \geq 5$ s 时, 满足 $y_2 = 0.5x_1, z_2 = 0.5y_1, x_2 = 0.5z_1$, 从而实现了分数阶 Chua's 系统的错位投影同步, 同步响应速度快, 性能好.

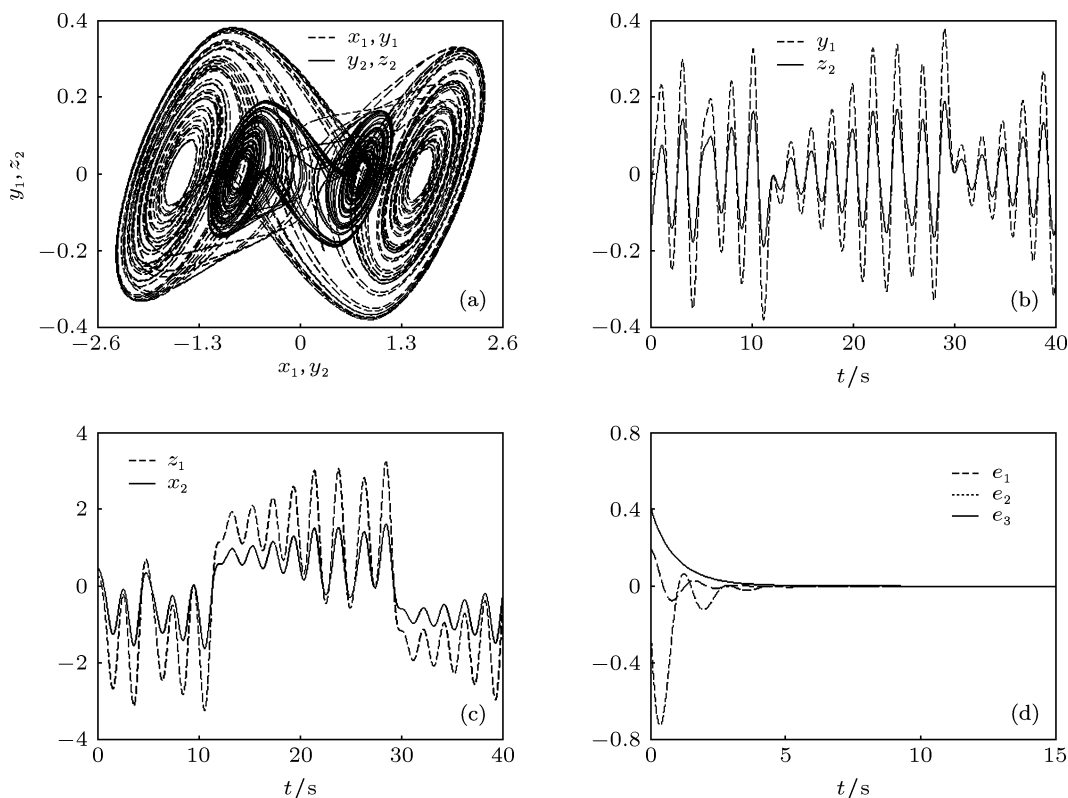


图2 分数阶 Chua's 系统错位投影仿真图 (a) x_1-y_1 和 y_2-z_2 相平面; (b) y_1 和 z_2 时序; (c) z_1 和 x_2 时序; (d) 误差响应曲线

4 错位投影同步的电路实现

利用 Multisim 电路软件, 实现以上分数阶 Chua's 系统的同步电路设计与模拟, 从而验证数值仿真的有效性. 首先, 需要给出分数阶系统的等效电路模块. 在以往文献中, 分数阶次数 q 精确到小数点后两位的等效电路模块很少. 这里根据文献 [17] 的算法, 计算出逼近误差为 1dB 的等效表达式, 以 $1/s^{0.98}$ 为例:

$$1/s^{0.98} = \frac{1.2974(s+1125)}{(s+1423)(s+0.01125)}, \quad (9)$$

接着, 利用文献 [18] 设计的分数阶等效串并联 RC 模块电路单元, 给出 (9) 式中 $1/s^q$ 展开式的复频域等效电路, 如图 3 所示. 端口 A 与 B 之间的传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1} + \frac{R_2}{sR_2C_2 + 1} = \frac{1}{C_0} \times \frac{\left(\frac{C_0}{C_1} + \frac{C_0}{C_2}\right) \left[s + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) / (C_1 + C_2)\right]}{(s + 1/R_1C_1)(s + 1/R_2C_2)}, \quad (10)$$

其中 C_0 为单位参数, 令 $C_0 = 1\mu F$, $F(s) = 1/s^{0.98}$ 和 $F(s) = H(s) \cdot C_0$. 将 (9) 式与 (10) 式进行比较, 得到 $1/s^{0.98}$ 的单元电路中元器件的参数值为: $R_1 = 91.1873 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 190.933 \Omega$, $C_1 = 0.97532 \mu F$, $C_2 = 3.68059 \mu F$.

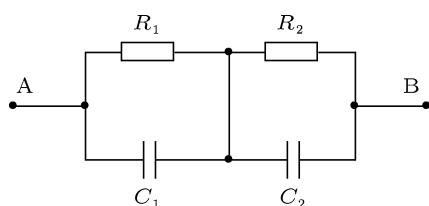


图3 实现 $1/s^q$ 的单元电路 ($q=0.98$)

根据分数阶 Chua's 系统的同步思想以及图 3 的等效模块, 进行电路设计. 投影同步电路如图 4 所示. 电路中分数阶模块的电阻电容值为: $R_{ai} = 91.1873 \text{ M}\Omega$, $R_{bi} = 190.933 \Omega$, $C_{ai} = 0.97532 \mu F$, $C_{bi} = 3.68059 \mu F$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 其余电阻值都在电路上表示. 所有运放 U_i , ($i = 1, \dots, 20$) 型号选用 TL082. 利用运放的限幅功能, 运放

U_1, U_{15} 与相连的电阻一起, 实现了分数阶 Chua's 系统的非线性分段函数部分, 这样取代了经典蔡氏电路的电感模块电路, 便于实际电路的调节, 具有很好的实用价值. 其余运放都是实现正常的放大作用. 实验结果如图 5 所示, 图中显示的是对应状态向量的同步时序图, 以及同步状态向量之间的关系图. 可见, 两个分数阶 Chua's 系统错位同步的对应向量, 都能够按照相应的比例因子 0.5 达到了同步状态. 电路实验模拟结果与数值仿真结果完全符合.

5 在保密通信中的应用

混沌同步的实现, 解决了混沌保密通信技术的难点问题, 使得混沌保密通信成为可能. 尤其是, 分数阶的混沌系统同步应用到保密通信中, 具有更强的抗破译能力, 因而在保密通信等领域具有更广泛的应用前景. 这里将分数阶 Chua's 混沌系统的错位投影同步应用于保密通信中. 利用如图 6 所示的改进混沌掩盖保密通信方案 [19], 实现信号的保密传输. 将 (1) 式的驱动系统作为发送器, (3) 式的受控响应系统作为接收器, 利用混沌序列 x_1 和 y_2 的错位投影同步, 实现对有用信号的加密传输. 当实现错位投影同步时, 同步误差衰减并趋于零, 有 $e_1 = y_2 - \alpha x_1 \rightarrow 0$. 此时, 接收器的恢复信号为 $s'(t)$, 即

$$s'(t) = m(t) - y_2/\alpha = x_1 + s(t) - y_2/\alpha \rightarrow s(t), \quad (11)$$

上式表明同步发生时, 发送器发送的信息信号能够不失真地被接收器恢复.

设需要传输的有用信号是一组周期为 1、幅值为 1 的正弦信号, 即 $p(t) = \sin(2\pi t)$, 匹配系数 $k = 2$. 正弦信号与混沌序列混叠后的信号为 $m'(t) = x_1(t) + k \sin(2\pi t)$. 利用以上的同步控制方案, 实现两个分数阶 Chua's 系统的错位投影同步并进行信号加密与解密. 仿真结果如图 7 所示. 可以看出, 传送的正弦信号通过混沌序列的隐藏后, 在混叠信号中已经完全看不出原有的有用信号, 该方法有效地完成了信号的传输加密, 并且在接收端不失真地恢复了, 说明了分数阶 Chua's 系统错位投影同步方案的有效性.

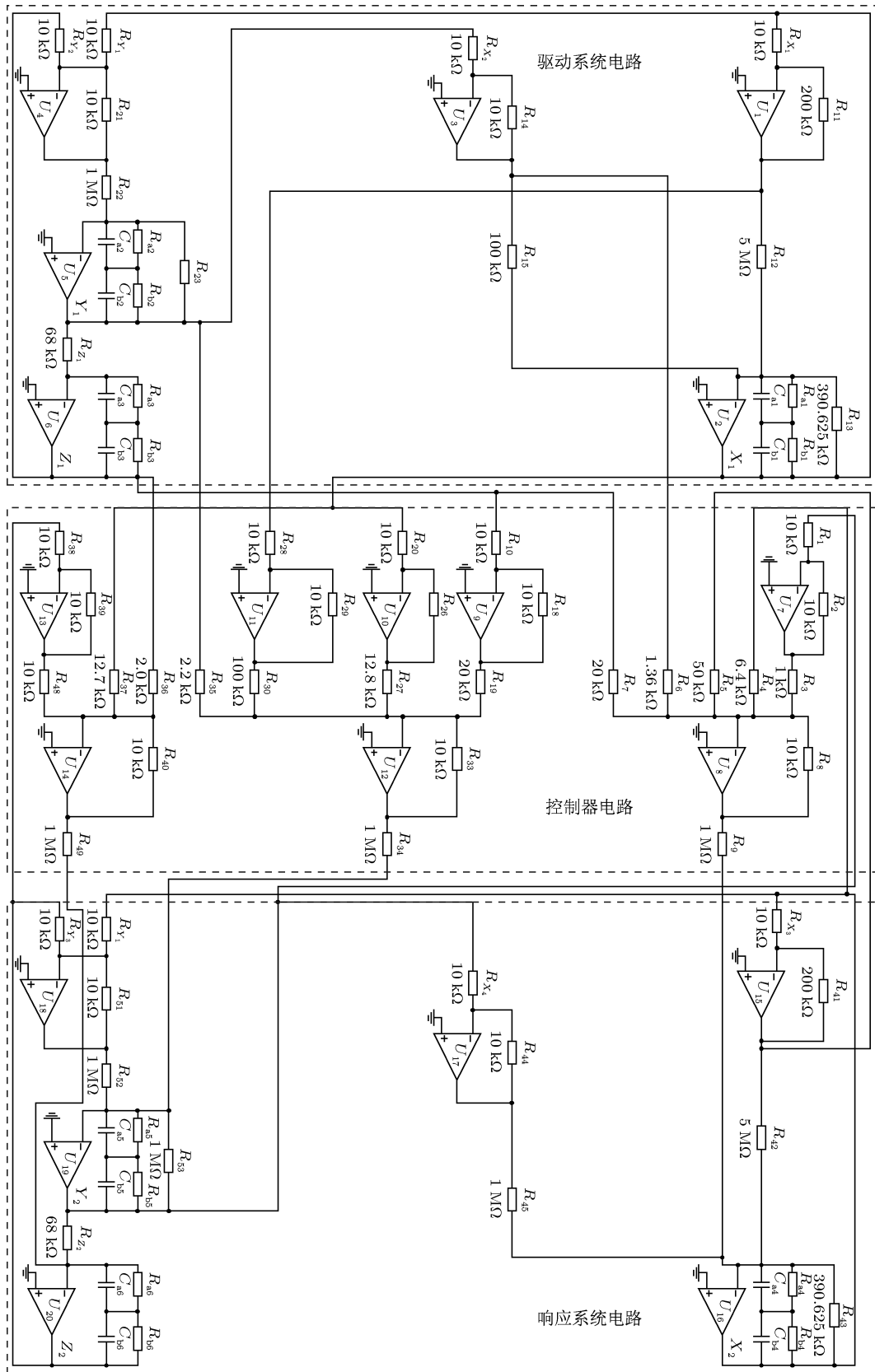


图4 分数阶 Chua's 系统错位投影同步电路

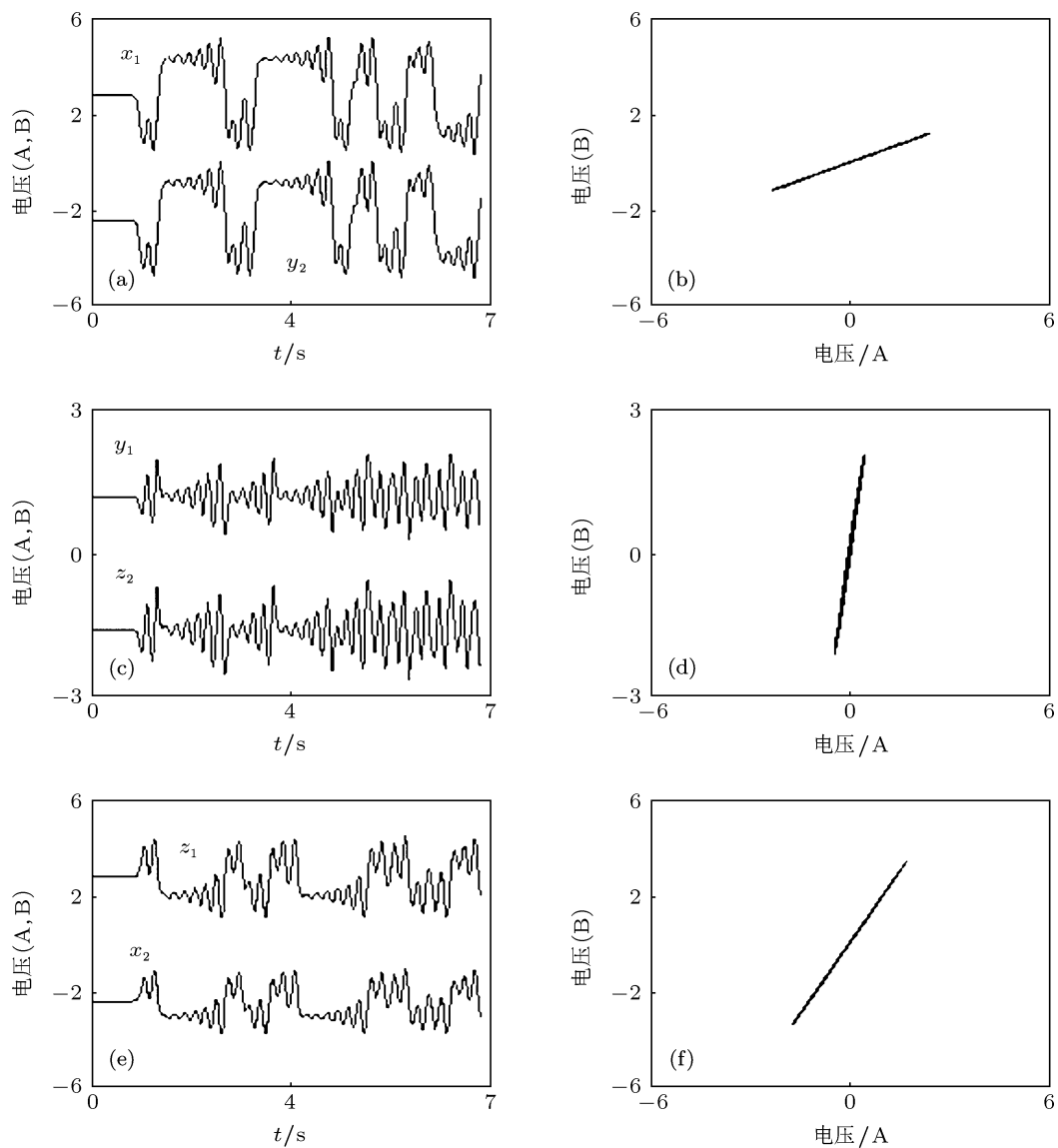


图5 电路仿真实验 (a) x_1 和 y_2 时序; (b) x_1 - y_2 相平面; (c) y_1 和 z_2 时序; (d) y_1 - z_2 相平面; (e) z_1 和 x_2 时序; (f) z_1 - x_2 相平面

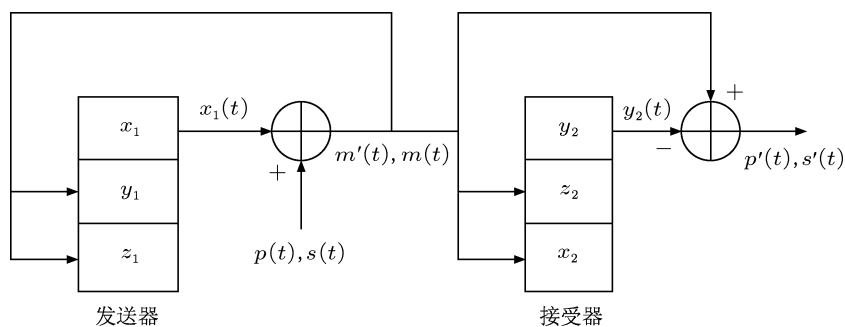


图6 改进混沌掩盖保密通信方案

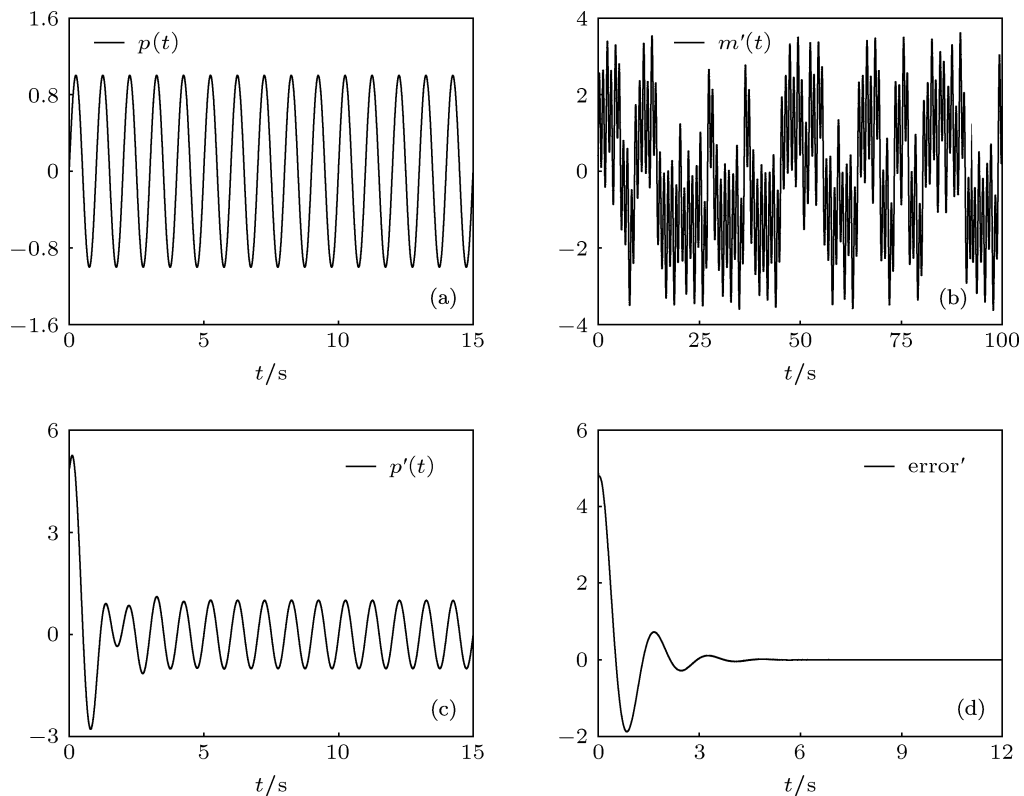


图7 正弦信号仿真结果 (a) 传输的有用信号 $p(t)$; (b) 传输的混叠信号 $m'(t)$; (c) 接收端恢复的有用信号 $p'(t)$; (d) 恢复信号与传送信号的误差信号 $\text{error}' = p(t) - p'(t)$

6 结论

本文研究了分数阶 Chua's 系统的非线性动力学行为, 并构造合适的控制器, 实现了两个分数阶 Chua's 系统的错位投影同步, 对应状态向量按照比例同步, 误差曲线衰减快. 设计了分数阶的单元模块电路, 利用 Multisim 软件实现了分数阶 Chua's

系统错位投影同步的无感模块化电路. 此外, 将错位投影同步方案应用到保密通信中, 通信方案达到预期的效果, 这表明该系统错位投影同步的有效性和可行性, 为进一步研究高维分数阶混沌系统的控制、同步与应用打下了坚实的基础, 为混沌系统在保密通信和工程实际中的应用提供了新的路径.

- [1] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Align* (New York: Academic)
- [2] Ivo P 2011 *Fractional-order Nonlinear System: Modeling, Analysis and Simulation* (Beijing: Higher Education Press)
- [3] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [4] Lu J G 2006 *Physica A* **359** 107
- [5] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [6] Yu Y G, Li H X, Wang S 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **42** 1181
- [7] Min F H, Yu Y, Ge C J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1456 (in Chinese) [闵富红, 余杨, 葛曹君 2009 物理学报 **58** 1456]
- [8] Zhou P, Kuang F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6851 (in Chinese) [周平, 邝菲 2010 物理学报 **59** 6851]
- [9] Huang L L, Ma N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160510 (in Chinese) [黄丽莲, 马楠 2012 物理学报 **61** 160510]
- [10] Ma T D, Jiang W B, Fu J, Chai Y, Chen L P, Xue F Z 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160506 (in Chinese) [马铁东, 江伟波, 浮洁, 柴毅, 陈立平, 薛方正 2012 物理学报 **61** 160506]
- [11] Min F H, Wang E R 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7657 (in Chinese) [闵富红, 王恩荣 2010 物理学报 **59** 7657]
- [12] Wang Z, Huang X, Li N, Song X N 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050506
- [13] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T 1986 *IEEE Trans. Circuits Systems* **33** 1072
- [14] Li J F, Li N, Cai L, Zhang B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7500 (in Chinese) [李建芬, 李农, 蔡理, 张斌 2008 物理学报 **57** 7500]
- [15] Ji Y, Bi Q S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080510
- [16] Hartley T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans. Circuits Systems* **42** 485
- [17] Charef A, Sun H H, Tsao Y Y, Onaral B 1992 *IEEE Trans. Aut. Contr* **37** 1465
- [18] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055]
- [19] Milanovic V, Zaghloul M E 1996 *Electronic Letters* **32** 11

Non-inductive modular circuit of dislocated synchronization of fractional-order Chua's system and its application*

Shao Shu-Yi Min Fu-Hong[†] Ma Mei-Ling Wang En-Rong

(School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

(Received 22 January 2013; revised manuscript received 11 March 2013)

Abstract

In this paper, from the stability theory of fractional-order chaotic system, a kind of dislocated projective synchronization for fractional-order Chua's system is successfully completed through a nonlinear controller. Meanwhile, the fractional-order unit circuit is designed, according to the series-parallel structure of resistor-capacitor and the approximate linear transfer function expression for the complex frequency domain. Thus, non-inductive modular circuit of dislocated projective synchronization of fractional-order Chua's system is realized. The circuit simulation results prove the feasibility of the scheme. Furthermore, the method can be applied in secure communication through the improved chaotic masking. The information signal can be concealed and recovered. Numerical simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: fractional-order Chua's system, dislocated synchronization, non-inductive modular circuit, secure communication

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.130504

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51075275), the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, State Education Ministry of China (Grant No. [2012]1707), and the Six Categories of Summit Talents of Jiangsu Province of China.

[†] Corresponding author. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn