

周期参数扰动的 T 混沌系统同宿轨道分析*

惠小健 王震[†] 孙卫

(西京学院基础部, 西安 710123)

(2012 年 11 月 2 日收到; 2013 年 3 月 13 日收到修改稿)

针对一类周期参数扰动的 T 混沌系统, 通过变换将系统转化为具有广义 Hamilton 结构的周期参数扰动的慢变系统, 运用 Melnikov 方法对系统的同宿轨道进行了分析计算, 并给出了系统的同宿轨道参数分支条件. 同时, 通过数值实验, 对周期参数扰动控制策略及同宿轨道进行了仿真, 验证了文中理论分析的正确性.

关键词: Hamilton 系统, Melnikov 方法, 同宿轨道, 周期参数扰动

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.130507

1 引言

混沌是存在于自然界中的一种普遍运动形式, 是在确定性系统中产生的不规则运动. 近年来的大量研究工作表明, 混沌与工程技术联系越来越密切, 它在力学, 电子等领域都具有广泛的应用前景^[1-4]. 又由于混沌运动具有初值敏感性混沌控制成了混沌应用的关键环节. 到目前为止, 国内外的科学工作者基于不同的策略提出了大量的混沌控制方法, 如反馈控制、脉冲控制、自适应控制, 无源化控制等^[5-7]. 文献[8]通过外加一个基于系统变量的反馈控制项对 Duffing 振子, 上田振子, 布鲁塞尔振子等进行控制, 并通过 Melnikov 方法对控制机理进行了分析. 文献[9, 10]通过参数扰动对 Lorenz 系统, 扩散 Lorenz 系统进行了控制, 并从理论上证明了参数扰动方法的可行性. 文献[11]提出了一种施加多个凹槽滤波器反馈控制混沌系统的方法, 并用 Melnikov 方法进行理论分析, 给出了合适的反馈控制器的参数. 文献[12]基于同宿分岔和异宿分岔, 由 Melnikov 理论推导了具有同宿轨道、异宿轨道的双势阱 Duffing 振子在谐和激励与有界噪声摄动下的混沌运动的必要条件及出现

分形边界的充分条件. 又由于混沌系统在一些工程领域非常重要, 因此有目的的构造简单混沌系统来产生或强化混沌现象已经成为一个关键性的课题. 1994 年, Sprott^[13]通过计算机仿真给出了只包含一个到两个非线性项的且少于七项的混沌系统. 2008 年 Yang 和 Chen^[14]给出了混沌系统代数结构的分类条件, 发现 Lorenz 系统满足 $a_{11}a_{22} > 0$, Chen 系统, Lü 系统满足 $a_{11}a_{22} < 0$, 一个自然的问题是否有过渡混沌系统满足 $a_{11}a_{22} = 0$. 2010 年, 作者^[15]构造了一个满足 $a_{11}a_{22} = 0$ 且含有六项的混沌系统. 本文在文献[15]的基础上继续对此类 T 混沌系统^[16](文献[16]的发表时间早于文献[15], 故以 T 混沌系统命名)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(y-x), \\ \frac{dy}{dt} &= cx - axz, \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy \end{aligned} \quad (1)$$

(a, b, c 为实数 $a \neq 0$) 进行了参数扰动控制分析, 并通过广义 Hamilton 系统扰动理论, 运用 Melnikov 方法对同宿轨道进行了分析, 给出了分支参数条件, 并运用 matlab, maple 软件进行了仿真验证.

* 国家自然科学基金(批准号: 10971164)、陕西省自然科学基金(批准号: 2011EJ001)、陕西省教育厅科研计划项目(批准号: 12JK1077, 12JK1073)和西京学院科研基金项目(批准号: XJ120107, XJ120108, XJ120232)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: williamwangz@126.com

2 周期参数扰动系统

令 $x = \tilde{x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{a}}\tilde{y}$, $z = \frac{1}{a}(c - \tilde{z})$, 则系统 (1) 可变为

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= -a\tilde{x} + \sqrt{a}\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= \sqrt{a}\tilde{x}\tilde{z}, \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} &= b(c - \tilde{z}) - \sqrt{a}\tilde{x}\tilde{y}. \end{aligned} \quad (2)$$

为了便于控制系统 (2), 运用周期参数扰动控制方法 [17,18], 将参数 c 变为 $c_0 + c_1 \sin \omega t$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= -a\tilde{x} + \sqrt{a}\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= \sqrt{a}\tilde{x}\tilde{z}, \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} &= b(c_0 + c_1 \sin \omega t - \tilde{z}) - \sqrt{a}\tilde{x}\tilde{y}. \end{aligned} \quad (3)$$

显然当 $c_1 = 0$ 时, 系统 (3) 即为系统 (2). 为了便于分析系统 (3), 令 $\tilde{x} = \frac{\hat{x}}{\varepsilon}$, $\tilde{y} = \frac{\hat{y}}{\varepsilon^2}$, $\tilde{z} = \frac{\hat{z}}{\varepsilon^2}$, $t = \varepsilon\tau$, $\omega = \frac{\omega_1}{\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{bc_0}}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{d\tau} &= \sqrt{a}\hat{y} - \varepsilon a\hat{x}, & \frac{d\hat{y}}{d\tau} &= \sqrt{a}\hat{x}\hat{z}, \\ \frac{d\hat{z}}{d\tau} &= -\sqrt{a}\hat{x}\hat{y} + \varepsilon \left(1 + \frac{c_1}{c_0} \sin \omega_1 \tau - b\hat{z} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

记 $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$, $\hat{z} = z$, $\tau = t$, 且导数用符号 “.”, 则系统 (4) 可变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{a}y - \varepsilon ax, & \dot{y} &= \sqrt{a}xz, \\ \dot{z} &= -\sqrt{a}xy + \varepsilon \left(1 + \frac{c_1}{c_0} \sin \omega_1 t - bz \right). \end{aligned} \quad (5)$$

显然当 $\varepsilon = 0$, 未扰系统 (5) $_{\varepsilon=0}$ 为广义 Hamilton 系统

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{a}z & \sqrt{a}y \\ \sqrt{a}z & 0 & 0 \\ -\sqrt{a}y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= J \cdot \nabla H, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 Hamilton 函数为 $H(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + z = A$, Casimir 函数为 $C(x, y, z) = a(y^2 + z^2) = aB^2$, 且在平衡点 $(0, 0, B)$ 处存在 “8 形” 同宿轨道, 在三维空间中, 该同宿轨道在柱面 $y^2 + z^2 = B^2$ 上.

为了寻找系统 (5) 的同宿轨道分支参数条件, 根据 Hamilton 系统理论 [19], 令

$$\begin{aligned} x &= x, & y &= (B + \rho) \sin(\theta - \pi), \\ z &= (B + \rho) \cos(\theta - \pi), \end{aligned}$$

且 $B > 0$, $\left| \frac{\rho}{B} \right| \ll 1$, 则系统 (5) 可变化为具有一个慢变量 ρ 的扰动摆系统 [20]

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \sqrt{ax} + \varepsilon \left(\frac{1}{B + \rho} \left(\sin \theta + \frac{c_1}{c_0} \sin \omega_1 t \sin \theta \right) \right. \\ &\quad \left. + b \cos \theta \sin \theta \right), \\ \dot{x} &= -\sqrt{a}(B + \rho) \sin \theta - \varepsilon ax, \\ \dot{\rho} &= -\varepsilon \left(\cos \theta + \frac{c_1}{c_0} \sin \omega_1 t \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + b(B + \rho) \cos^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (7)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 (7) 退化为 θ - x 平面上的单摆系统, 其 Hamilton 函数为

$$\tilde{H}(\theta, x, \rho) = \sqrt{a} \left(\frac{1}{2}x^2 - (B + \rho) \cos \theta \right) = \sqrt{a}A.$$

容易得知, 当 $A = (B + \rho)$ 时, 未扰系统 (7) $_{\varepsilon=0}$ 存在两条连接 $(-\pi, 0)$ 和 $(\pi, 0)$ 的异宿轨道, 并构成异宿环, 此异宿环对应于原系统 (5) 的柱面 $y^2 + z^2 = B^2$ 上的 “8 形” 同宿轨道, 因此寻找系统 (5) 的同宿轨道分支参数即转寻为系统 (7) 的异宿环分支参数. 由于在柱面 $y^2 + z^2 = B^2$ 上, 未扰系统 (7) $_{\varepsilon=0}$ 的两鞍点 $(-\pi, 0)$ 和 $(\pi, 0)$ 对应为同一点, 即未扰系统 (5) $_{\varepsilon=0}$ 的平衡点 $(0, 0, B)$ 处, 故我们仍称未扰系统 (7) $_{\varepsilon=0}$ 的异宿环为同宿于鞍点 $(\theta, x, \rho) = (\pi, 0, \rho)$ 的同宿轨道 $\{\Gamma_{\pm}\}$,

$$\begin{aligned} \theta_h(t) &= \pm 2 \arctan(\sinh(\sqrt{a(B + \rho)}t)), \\ x_h(t) &= \pm 2\sqrt{(B + \rho)} \operatorname{sech}(\sqrt{a(B + \rho)}t). \end{aligned} \quad (8)$$

3 Melnikov 同宿轨道分析

对于慢变系统, 根据文献 [20, 21], 定义 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -a\sqrt{ax}_h^2 + \sqrt{a} \sin^2 \theta_h \right. \\ &\quad \left. + b\sqrt{a}(B + \rho) \cos \theta_h \sin^2 \theta_h \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{a} \frac{c_1}{c_0} \sin \omega_1 t_0 \sin^2 \theta_h \cos \omega_1 t \} dt \\
 & = -a\sqrt{a}N_1 + \sqrt{a}N_2 + b\sqrt{a}(B+\rho)N_3 \\
 & + \sqrt{a} \frac{c_1}{c_0} \sin \omega_1 t_0 N_4, \tag{9}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_h^2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} 4(B+\rho) \operatorname{sech}^2(\sqrt{a(B+\rho)}t) dt \\
 &= 8\sqrt{\frac{B+\rho}{a}}, \\
 N_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \theta_h dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 \sinh^2(\sqrt{a(B+\rho)}t)}{[1 + \sinh^2(\sqrt{a(B+\rho)}t)]^2} dt \\
 &= \frac{8}{3\sqrt{a(B+\rho)}}, \\
 N_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \theta_h \cos \theta_h dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 \sinh^2(\sqrt{a(B+\rho)}t)}{[1 + \sinh^2(\sqrt{a(B+\rho)}t)]^2} \\
 &\quad \times \frac{1 - \sinh^2(\sqrt{a(B+\rho)}t)}{1 + \sinh^2(\sqrt{a(B+\rho)}t)} dt \\
 &= \frac{-8}{15\sqrt{a(B+\rho)}}, \\
 N_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \theta_h \cos \omega_1 t dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 \sinh^2(\sqrt{a(B+\rho)}t)}{[1 + \sinh^2(\sqrt{a(B+\rho)}t)]^2} \cos \omega_1 t dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{\sqrt{a(B+\rho)}} \\
 & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh^2 u}{\cosh^4 u} \cos \frac{\omega_1 u}{\sqrt{a(B+\rho)}} du \\
 &= \frac{4\omega_1 \pi}{a(B+\rho) \sinh \frac{\omega_1 \pi}{2\sqrt{a(B+\rho)}}} \\
 & \times \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega_1^2}{6a(B+\rho)} \right).
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 M_0 &= -a\sqrt{a}N_1 + \sqrt{a}N_2 + b\sqrt{a}(B+\rho)N_3 \\
 & + \sqrt{a} \frac{c_1}{c_0} \sin \omega_1 t_0 N_4 \\
 &= -8a\sqrt{B+\rho} + \frac{8}{3\sqrt{B+\rho}} - \frac{8b\sqrt{B+\rho}}{15} \\
 & + \frac{c_1}{c_0} \sin \omega_1 t_0 \frac{4\omega_1 \pi}{\sqrt{a(B+\rho)} \sinh \frac{\omega_1 \pi}{2\sqrt{a(B+\rho)}}} \\
 & \times \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega_1^2}{6a(B+\rho)} \right). \tag{10}
 \end{aligned}$$

定理1 若 $b = 5 - 15a$ 时, 则在柱面 $y^2 + z^2 = 1$ 上, 未扰系统 (7) $_{\varepsilon=0}$ 的同宿于鞍点 $(\theta, x, \rho) = (\pi, 0, \rho)$ 的同宿轨道 $\{\Gamma_{\pm}\}$ 的附近, 系统 (5) 存在两同宿轨道.

证明 由 (10) 式知, 当 $c_1 = 0$ 或者 $\frac{\omega_1^2}{a(B+\rho)} = 2$, 则由 $M_0 = 0$, 有 $B + \rho = \frac{5}{15a+b}$, 当 $\rho = 0$ 时, $B = \frac{5}{15a+b}$, 由于 $M_0(B) = 0$, $\frac{\partial M_0}{\partial B} \Big|_{B=\frac{5}{15a+b}} \neq 0$, 故两同宿轨横截相交; 当 $c_1 \neq 0$ 且 $\frac{\omega_1^2}{a(B+\rho)} \neq 2$, 则两同宿轨的横截条件为

$$\left| \frac{\left[4 - \left(12a + \frac{4}{5}b \right) (B+\rho) \right] c_0 \sqrt{a(B+\rho)} \sinh \frac{\omega_1 \pi}{2\sqrt{a(B+\rho)}}}{c_1 \omega_1 \pi \left(2 - \frac{\omega_1^2}{a(B+\rho)} \right)} \right| < 1.$$

取 $\rho = 0, B = 1$ 时, 令 $M_0 = 0$, 则可得同宿轨道参数分支值 $b = 5 - 15a$.

4 数值仿真

为了论证上述理论, 我们给出数值仿真. 取系

统 (1) 中参数 $a = 2, b = 1, c = 9$, 可以看到系统在该组参数下为混沌系统 (见图 1).

在保持参数 $a = 2, b = 1$ 不变的情形下, 图 2 给出了系统 (3) 在参数 $c_0 = 1, \omega = 1$ 下, 随着参数 c_1 变化的 Lyapunov 指数谱, 从中可以看到, 经过参数扰动后, 系统 (3) 在不同参数下运动状态不同, 当参

数 $c_1 = 1$, 其相图见图 3(a), 由其 Poincare 截面 (见图 3(b)) 可以看到系统 (3) 为混沌系统, 当 $c_1 = 2$ 时, 其相图见图 3(c), 由其 Poincare 截面 (见图 3(d)) 可以看到系统 (3) 出现周期 3 的周期运动, 当 $c_1 = 2.436$, 其相图见图 3(e), 其相应的 LE 图见图 3(f), 从中可以看到有两个零 LE, 两个负 LE. 显然当取合适的参数 c_1 时, 系统 (1) 经过周期参数扰动控制后会达到稳定状态.

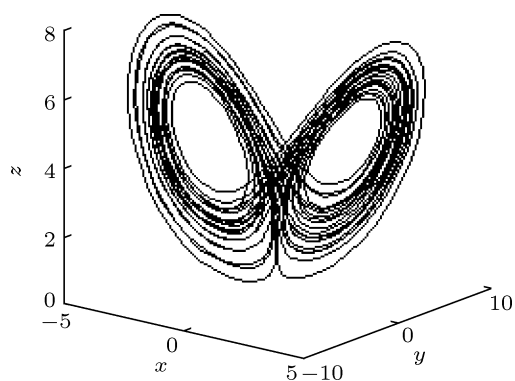


图 1 系统 (1) 在参数 $a = 2, b = 1, c = 9$ 下的混沌吸引子

为了继续探究周期参数扰动系统 (3) 的动力学行为, 取 $a = 0.2$, 图 4 给出未扰系统 (5) $_{\epsilon=0}$ 在三维空间及在相应平面上的投影“8形”同宿轨道. 根据定理 1, 取 $B = 1, a = 0.2$, 则 $b = 2$, 则可作出未扰系

统 (5) $_{\epsilon=0}$ 的同宿轨道, 即为抛物柱面 $\frac{1}{2}x^2 + z = 1$ 与圆柱面 $y^2 + z^2 = 1$ 的交线 (见图 5).

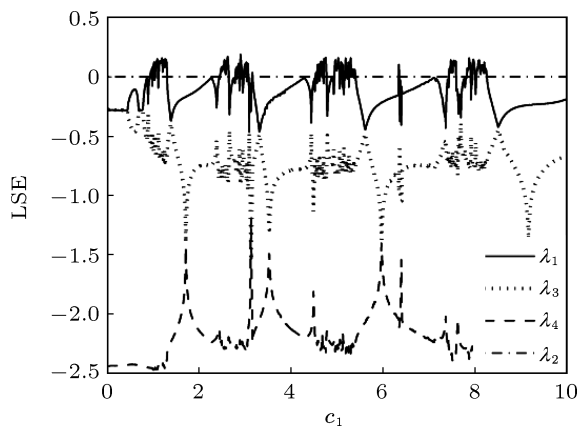


图 2 系统 (3) 在参数 $a = 2, b = 1, c_0 = 1, \omega = 1$ 下的 Lyapunov 指数谱

当系统 (5) 变为慢变系统 (7) 时, 相应的空间柱面上的同宿轨道退化为平面 $\theta-x$ 平面内的异宿轨道, 在保持上述参数的不变的情形下, 图 6 给出了未扰系统 (7) $_{\epsilon=0}$ 在退化 $\theta-x$ 平面内的异宿轨道, 另取参数 $\epsilon = 10^{-5}$, 图 7 作出了系统 (7) 的三维空间异宿轨道及在 $\theta-x$ 平面内的投影, 从投影图形可以看到, 当 ϵ 在零的附近取值, 系统 (7) 在定理 1 所给参数分支条件下存在三维空间异宿轨道, 即对应系统 (5) 的同宿轨道.

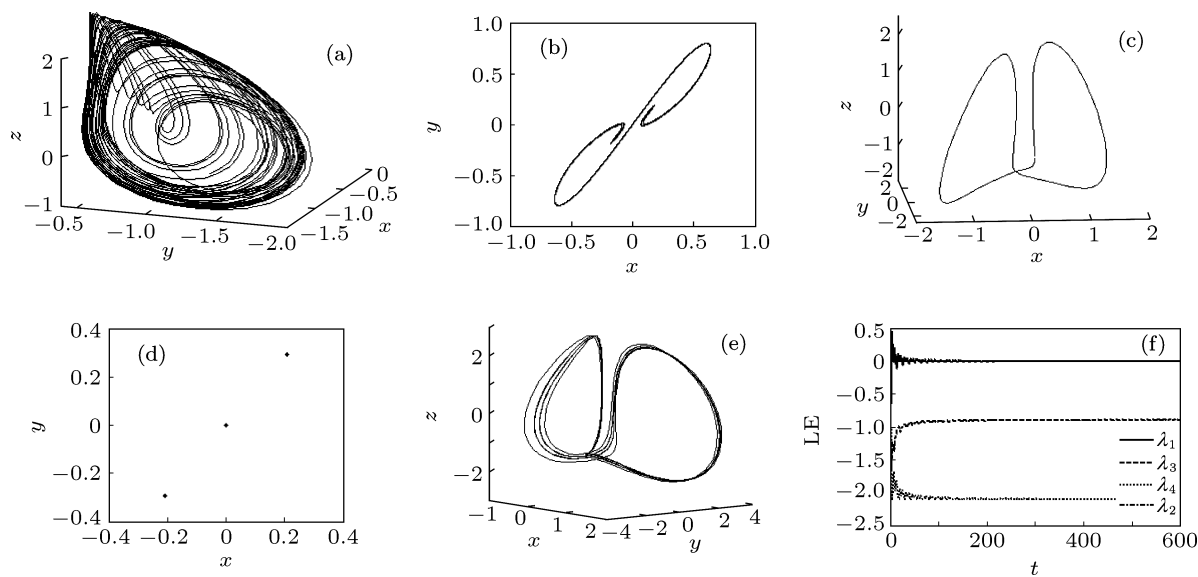


图 3 系统 (3) 在不同参数 c_1 下的相图 (a), (c), (e), Poincare 截面图 (b), (d) 和 LE 图 (f) (a), (b) $c_1 = 1$; (c), (d) $c_1 = 2$; (e), (f) $c_1 = 2.436$

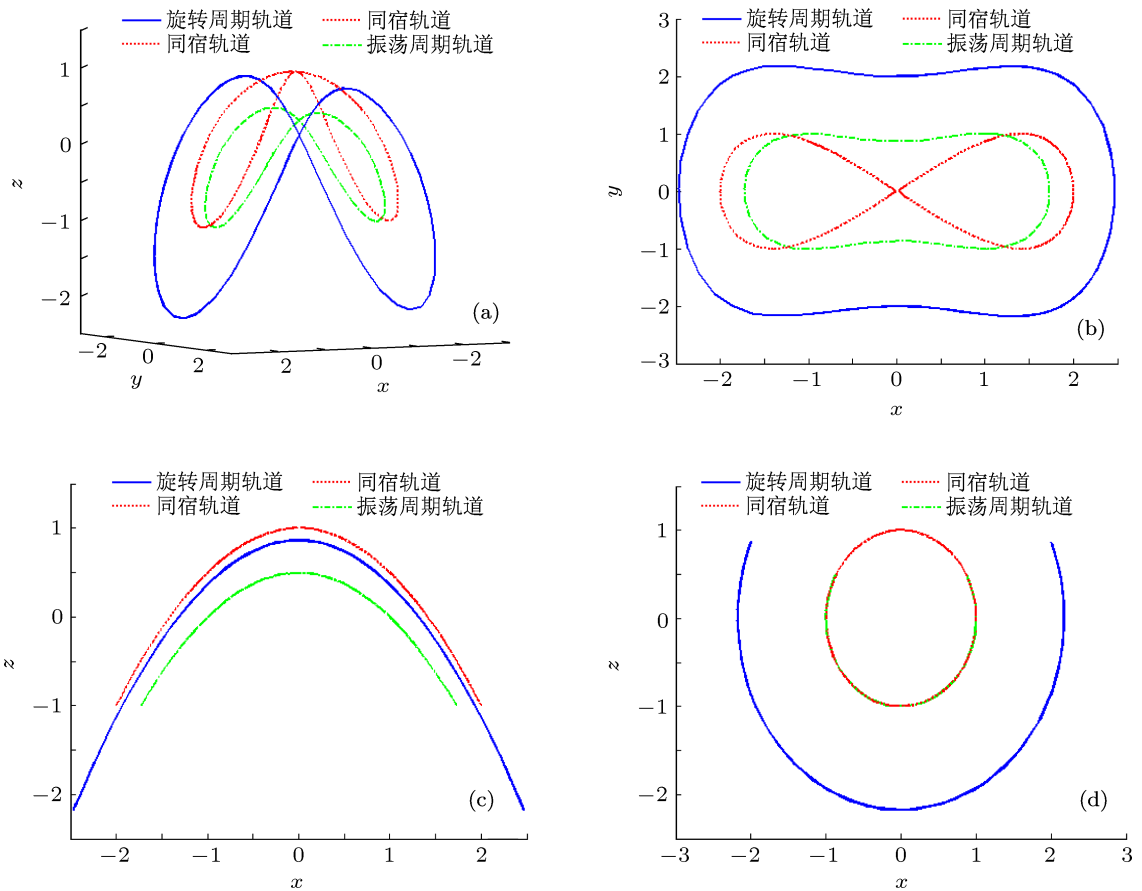


图4 未扰系统 (5) $\epsilon=0$ 三维空间中的同宿轨道及在各坐标面上的投影 (a) 同宿轨道; (b) x-y 平面; (c) x-z 平面; (d) y-z 平面

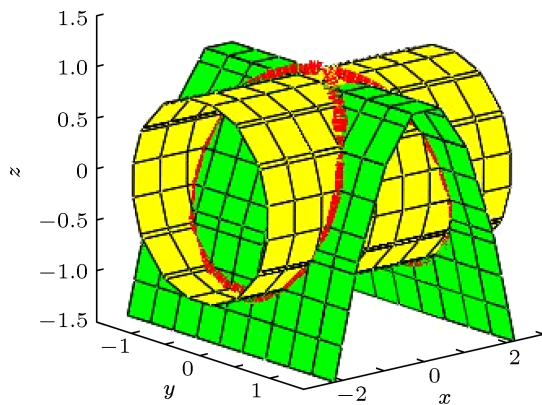


图5 未扰系统 (5) $\epsilon=0$ 的同宿轨道 (抛物柱面 $\frac{1}{2}x^2 + z = 1$ 与圆柱面 $y^2 + z^2 = 1$ 的交线)

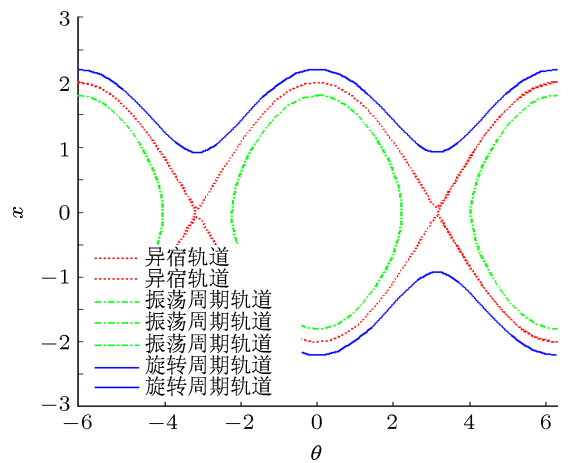


图6 未扰系统 (7) $\epsilon=0$ 在退化 θ -x 平面内的异宿轨道

5 结论

本文通过符号与数值运算, 分析和计算了周期参数扰动的 T 混沌系统的同宿轨道, 运用 Melnikov 函数解析地给出了分支参数条件, 并通过数值仿真

进行了实验, 验证了理论分析的正确性. 根据数值仿真, 可以看到周期参数扰动策略不仅可以对原混沌系统进行控制, 同时可以探究系统的同宿轨道解析式. 当然还可以继续分析该扰动系统的周期轨道等动力学行为, 限于篇幅, 此处讨论从略.

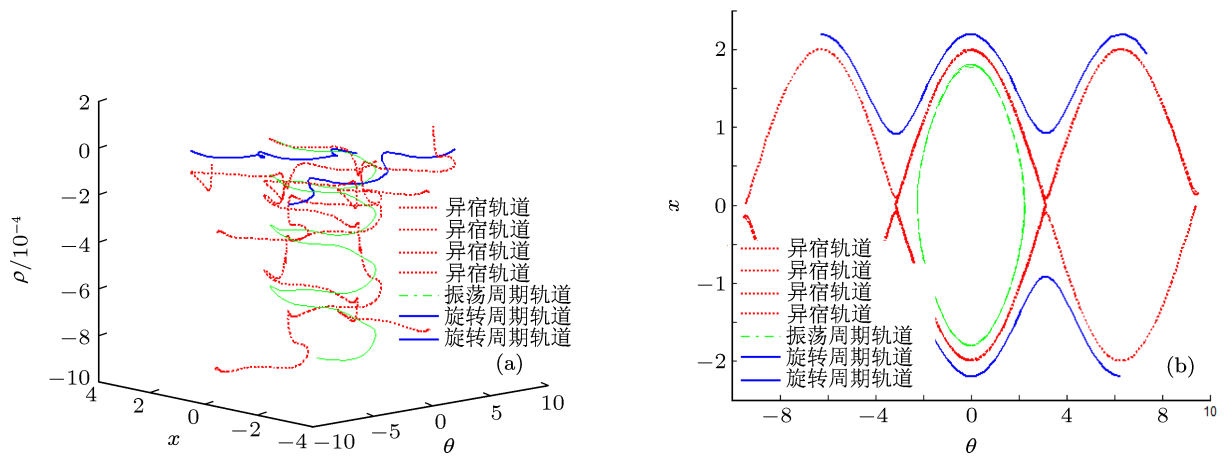


图7 系统(7)三维空间异宿轨道及在平面内的投影 (a) 异宿轨道; (b) θ - x 平面

- [1] Živković T, Rypdal K 2008 *Phys. Rev. E* **77** 037401
- [2] Lv J H, Chen G R 2006 *International Journal of bifurcation and chaos* **16** 775
- [3] Wang Z, Sun W, Wei Z C 2012 *Advanced Materials Research* **486** 204
- [4] Wang Z 2011 *Control Theory & Applications* **28** 1036 (in Chinese) [王震 2011 控制理论与应用 **28** 1036]
- [5] Ling B W K, Iu H H C, Lam H K 2008 *Control of Chaos in Nonlinear Circuits and Systems* (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd) p35
- [6] Wang Z, Li Y X, Xi X J, Lv L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010513 (in Chinese) [王震, 李永新, 惠小健, 吕雷 2011 物理学报 **60** 010513]
- [7] Wang Z, Wu Y T, Li Y X, Zou Y J 2009 *Proceedings of the 4th International Conference on Computer Science and Education* Nanning, China, July 25–28, 2009, p441
- [8] Fang Y Y, Xu Z Y, Cai C H 2001 *Journal of Wuxi University of light industry* **20** 624 (in Chinese) [方燕燕, 徐振源, 蔡朝洪 2001 无锡轻工大学学报 **20** 624]
- [9] Wei Z C, Yang Q G 2009 *Computers & Mathematics with Applications* **58** 1979
- [10] Wu Z M, Xie J Y, Fang Y Y, Xu Z Y 2007 *Chaos Solitons & Fractals* **32** 104
- [11] Min F H, Xu W B, Xu Z Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1690 (in Chinese)
- [12] Yang X L, Xu W, Sun Z K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1678 (in Chinese) [杨晓丽, 徐伟, 孙中奎 2006 物理学报 **55** 1678]
- [13] Sprott J C 1994 *Phys. Rev. E* **50** 647
- [14] Yang Q G, Chen G R 2008 *International Journal of Bifurcation and chaos* **18** 1393
- [15] Wang Z 2010 *Nonlinear Dynamics* **60** 369
- [16] Tigan G H 2005 *Scientific Bulletin of the politehnica University of Timisoara* **50** 61
- [17] Mirus K A, Sprott J C 1999 *Phys. Rev. E* **59** 5313
- [18] Mirus K A, Sprott J C 1999 *Phys. Lett. A* **254** 275
- [19] Li J B, Zhao X H, Liu Z R 2007 *Theory of generalized Hamilton system and its applications* (Beijing: Science Press) p140 (in Chinese) [李继彬, 赵晓华, 刘正荣 2007 广义哈密顿系统理论及其应用 (北京: 科学出版社) 第 140 页]
- [20] Wiggins S, Holmes P 1987 *SIAM Journal on mathematical Analysis* **18** 612
- [21] Liu Z R 2004 *Perturbation criteria for chaos* (Shanghai: Shanghai scientific and technological education publishing house) p74 (in Chinese) [刘曾荣 2004 混沌的微扰判据 (上海: 上海科技教育出版社) 第 74 页]

Homoclinic orbits analysis of T chaotic system with periodic parametric perturbation*

Xi Xiao-Jian Wang Zhen[†] Sun Wei

(Department of Foundation, Xijing University, Xi'an 710123, China)

(Received 2 November 2012; revised manuscript received 13 March 2013)

Abstract

Using Melnikov method we have analysed and calculated the homoclinic orbits of a slowly varying oscillator, derived from the T chaotic system with generalized Hamiltonian structure under periodic parametric perturbation. Also the parameter bifurcation conditions of homoclinic orbits are obtained. The simulation results demonstrate the feasibility of periodic parametric perturbation control technology, and the correctness of the discussion in this paper.

Keywords: Hamilton system, Melnikov methods, homoclinic orbits, periodic parametric perturbation

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.130507

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10971164), the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2011EJ001), the Scientific Research Program Funded by Shaanxi Provincial Education Department, China (Grant Nos. 12JK1077, 12JK1073), and the Scientific Research Foundation of Xijing University, China (Grant Nos. XJ120107, XJ120108, XJ120232).

[†] Corresponding author. E-mail: williamwangz@126.com