

自适应光学控制系统对 Kolmogorov 湍流 补偿的修正有效带宽*

郭友明¹⁾²⁾³⁾ 马晓燮¹⁾²⁾ 饶长辉^{1)2)†}

1) (中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

2) (中国科学院自适应光学重点实验室, 成都 610209)

3) (中国科学院大学, 北京 100049)

(2013 年 1 月 6 日收到; 2013 年 1 月 24 日收到修改稿)

基于时间功率谱反演生成的 Kolmogorov 湍流时间序列, 模拟分析了自适应光学控制系统跟踪回路与高阶误差校正回路在有限误差 -3 dB 带宽、有时间延迟情况下的闭环校正残余误差, 得出了系统的跟踪残余方差、高阶残余方差与误差 -3 dB 带宽的数值拟合结果, 修正了系统有效带宽的表达式, 使其能更精确地估计校正残余方差。

关键词: Kolmogorov 湍流, Tyler 频率, Greenwood 频率, 有效带宽

PACS: 42.68.Wt, 95.75.Qr, 07.05.Tp

DOI: 10.7498/aps.62.134207

1 引言

自适应光学 (adaptive optics, AO) 系统能够实时测量并且校正受到大气湍流扰动的光学相位波前, 提高成像质量, 在天文观测领域具有广泛应用^[1,2]. 典型的 AO 系统通常由波前传感器、波前校正器、波前控制器三部分构成^[3], 而其控制系统可分为校正整体倾斜的跟踪回路和校正高阶像差的高阶误差校正回路. 无论是跟踪回路还是高阶误差校正回路, 目前最常用的控制方法均为基于比例积分的闭环控制^[4,5]. 该方法对大气扰动的低频部分抑制能力好, 计算量小, 且无稳态误差. 在设计和分析 AO 系统时, 常常需要提出某个衡量系统时域校正能力的指标, 以此来指导硬件和软件的设计. 误差 -3 dB 带宽是衡量 AO 系统对大气湍流补偿能力的一个重要指标, 其值越大, 对大气湍流的补偿效果越好^[6]. 然而, 实际的 AO 系统由于时间延迟的存在, 误差 -3 dB 带宽很难得到提高, 并且往往以大大提高成本为代价. 因此, 实际设计误差

-3 dB 带宽时, 并非越大越好. 寻找大气湍流补偿残余方差与控制带宽较为精确的量化关系对 AO 系统硬件及软件的设计至关重要. Tyler^[7] 曾根据 Kolmogorov 湍流的特性, 提出了 Tyler 频率的概念, 为了积分过程的简化, 其假设等效横向风速与望远镜主镜口径之比远小于系统闭环带宽, 并只给出了系统无时间延迟、闭环带宽足够大的理想跟踪回路中, 跟踪残余方差与闭环带宽的关系. 然而, 一方面虽然理想跟踪回路的误差 -3 dB 带宽与闭环带宽相等, 但两者却有不同物理意义: 闭环带宽只能决定闭环残余中噪声引入的多少, 而误差 -3 dB 带宽才决定了系统对大气湍流等扰动的抑制能力^[5], 只是当无时间延迟时二者相等, 但对于存在时间延迟的实际跟踪回路, 二者往往存在着 3 倍左右的关系^[5]. Tyler 结论中跟踪残余方差与闭环带宽的关系实质上应为跟踪残余方差与误差 -3 dB 带宽的关系, 本文以后的论述中将采用这一更具有普适性的结论作为 Tyler 理论对实际跟踪回路的跟踪误差分析结果. 另一方面, 由于实际的跟踪回路中误差 -3 dB 带宽有限, 同时也不可避免地存在着

* 国家自然科学基金联合基金 (批准号: 11178004) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: chrao@ioe.ac.cn

约 1—2 倍采样周期的等效时延. 例如, 对于云南天文台 1.2 m 望远镜 AO 系统^[2], 其误差 -3 dB 带宽小于 44 Hz, 而一般等效横向风速在 10—20 m/s 左右, 等效横向风速与望远镜主镜口径之比与跟踪回路的误差 -3 dB 带宽比较接近. 因此, Tyler 在文献^[7]中的近似条件在实际跟踪回路中往往并不成立, 直接运用 Tyler 公式估计跟踪残余方差误差较大. Greenwood^[8]提出了著名的 Greenwood 频率, 并建立了波前残余方差与闭环带宽的 -5/3 次方的关系式, 同样, 该闭环带宽实际也应为误差 -3 dB 带宽, 并且将该关系式直接使用在具有 2—3 倍采样周期等效时延的实际高阶误差校正回路会产生较大的误差. Fried^[9]和 Karr^[10]只分析了 AO 系统高阶误差校正回路的时间延迟影响, 并没有分析波前残余方差与误差 -3 dB 带宽的关系. 李新阳^[5]分析了有延迟 AO 系统的控制性能, 并将推导出的系统开环带宽、误差带宽与误差 -3 dB 带宽统称为有效带宽. 然而, 他并没有分析 AO 系统对 Kolmogorov 湍流的补偿残余方差与有效带宽之间的关系. 针对目前国际上尚未有适用于实际系统的带宽与大气湍流补偿残余方差的关系, 本文基于一种利用时间功率谱 (power spectral density, PSD) 反演法生成的 Kolmogorov 湍流时间序列信号, 模拟了基于比例积分控制器的跟踪回路和高阶误差校正回路对各自扰动信号的补偿过程. 经过数据拟合, 分别得出了更加精确的跟踪残余方差、高阶残余方差与修正有效带宽的关系式. 它们是对 Tyler 和 Greenwood 提出的理想跟踪回路和高阶误差校正回路控制残余方差与闭环带宽的关系做出的修正, 使其适用于实际跟踪回路和高阶误差校正回路. 通过利用修正有效带宽对典型强、中、弱 Kolmogorov 湍流补偿后残余方差估计的数值仿真发现, 修正有效带宽能够更加精确地估计 AO 系统对 Kolmogorov 湍流的补偿能力.

2 Kolmogorov 湍流时间特性及自适应光学系统的校正残余方差

根据 Tyler 的分析^[7], Kolmogorov 湍流整体倾

斜单边 PSD $F_T(f)$ 在低频段满足 -2/3 次方关系, 在高频段满足 -11/3 次方关系

$$F_T(f) = \begin{cases} 3.216 \sec(\zeta) v_{-1/3} f^{-2/3}, & f \leq f_0, \\ 0.044 \sec(\zeta) D^{-3} v_{8/3} f^{-11/3}, & f > f_0, \end{cases} \quad (\text{rad}^2/\text{Hz}), \quad (1)$$

其中, ζ 为天顶角; D 为观测系统的口径; $v_n = \int C_n^2(h) v(h)^n dh$, $C_n^2(h)$ 为折射率结构常数, $v(h)$ 为风速模型. 若折射率结构函数 $C_n^2(h)$ 、横向风速 v 与高度无关, 则交界频率 $f_0 = 0.239 v/D$.

未补偿的单轴整体倾斜方差 σ_T^2 为其 PSD 在频率上的积分

$$\sigma_T^2 = \int_0^\infty \frac{1}{2} F_T(f) df = 0.170 (\lambda/D)^2 (D/r_0)^{5/3}. \quad (2)$$

值得一提的是, 本文以后提到的倾斜方差均指单轴整体倾斜方差. (2) 式中 r_0 为大气相干长度

$$r_0 = [0.423 \sec(\zeta) k_c^2 \int_0^L C_n^2(z) dz]^{-3/5}, \quad (3)$$

其中, $k_c = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为观测波长. Tyler 提出在无时间延迟、闭环带宽等于误差 -3 dB 带宽的理想跟踪回路中, 单轴整体倾斜残余方差 σ_{Tres}^2 满足

$$\sigma_{\text{Tres}}^2(f_{\text{Te3dB}}) = (f_T/f_{\text{Te3dB}})^2 (\lambda/D)^2, \quad (4)$$

其中, f_{Te3dB} 为跟踪回路的误差 -3 dB 带宽, 定义为使系统跟踪回路误差函数的频率响应 $E_T(j2\pi f_{\text{Te3dB}})$ 满足如下条件的频率:

$$|E_T(j2\pi f_{\text{Te3dB}})|^2 = 1/2, \quad (5)$$

f_T 为 Tyler 频率, 满足

$$f_T = 0.331 D^{-1/6} \lambda^{-1} \sec^{1/2}(\zeta) v_2^{1/2}, \quad (6)$$

(4) 式的物理意义为当理想跟踪回路的误差 -3 dB 带宽等于 Tyler 频率时, 单轴整体倾斜补偿残余方差等于衍射极限角的平方.

根据 Greenwood^[8]的分析, 去掉整体倾斜部分的 Kolmogorov 湍流的 PSD 为

$$F_D(f) = \begin{cases} 0.132 \sec(\zeta) k_c^2 D^4 \mu_0^{12/5} v_{5/3}^{-7/5} f^{4/3} & f \leq 0.705 D^{-1} \mu_0^{-3/5} v_{5/3}^{3/5}, \\ 0.0326 \sec(\zeta) k_c^2 v_{5/3} f^{-8/3}, & f > 0.705 D^{-1} \mu_0^{-3/5} v_{5/3}^{3/5}, \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\mu_n = \int C_n^2(h)h^n dh$. 未补偿的去掉整体倾斜后波前的方差为其 PSD 在频率上的积分

$$\sigma_D^2 = \int_0^\infty F_D(f) df = 0.141(D/r_0)^{5/3}. \quad (8)$$

Greenwood 提出在无时间延迟、闭环带宽等于误差 -3 dB 带宽的理想高阶误差校正回路中, 波前残余方差 σ_{Dres}^2 满足

$$\sigma_{Dres}^2 = (f_G/f_{De3dB})^{5/3}, \quad (9)$$

其中, f_{De3dB} 为高阶误差校正回路的误差 -3 dB 带宽, 定义为使系统高阶误差校正回路的误差函数 $E_D(j2\pi f_{De3dB})$ 的频率响应满足如下条件的频率:

$$|E_D(j2\pi f_{De3dB})|^2 = 1/2, \quad (10)$$

f_G 为格林伍德频率, 满足

$$f_G = [0.1024k_c^2 \sec(\zeta) v_{5/3}]^{3/5}. \quad (11)$$

(9) 式的物理意义为当理想高阶误差校正回路的误差 -3 dB 带宽等于 Greenwood 频率时, 高阶补偿残余方差等于 1 rad^2 .

由于系统的开环带宽、误差带宽与误差 -3 dB 带宽可互相推导 [5], 因此为方便说明, 本文仅使用误差 -3 dB 带宽作为有效带宽. 经文献 [5] 分析, 基于比例积分控制器的 AO 系统高阶误差校正回路的有效带宽 f_{De3dB} 满足

$$f_{De3dB} \approx K_D / [2\pi \sqrt{2 - (1 - K_D \tau_D)^2}], \quad (12)$$

其中, K_D 和 τ_D 分别为高阶误差校正回路开环传递函数总增益与等效时延.

跟踪回路的有效带宽 f_{Te3dB} 满足

$$f_{Te3dB} \approx K_T / [2\pi \sqrt{2 - (1 - K_T \tau_T)^2}], \quad (13)$$

其中, K_T 和 τ_T 分别为跟踪回路开环传递函数总增益与等效时延.

3 大气湍流的时序仿真

由于长度为 N 、采样间隔为 T_s 的信号的 PSD 的幅值 $|F(f)|$ 与幅值谱 $|R(f)|$ 满足如下关系 [11]:

$$|F(f)| = |R(f)|^2 / (NT_s). \quad (14)$$

因此, 可根据 (1), (7) 和 (14) 式, 分别得出大气湍流整体倾斜和高阶误差信号的幅值谱. 由于信号的随机性体现在信号的相位上, 在得出的幅值谱的基础上给信号赋予在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机相位就

可以得到满足给定 PSD 的随机信号的频谱, 再经过傅里叶逆变换就可以得出对应的时域随机信号 [12].

假定望远镜的主口径为 1.76 m; 观测波长为 500 nm; 天顶角为 0° ; 波前探测器/跟踪探测器的采样频率为 5000 Hz; 等效时间延迟为 0.4 ms (2 个采样周期); 模拟的单层 Kolmogorov 湍流折射率结构常数和横向风速在传输路径上相等, 传输路径长度为 3000 m. 在表 1 的各相干长度与等效横向风速条件下, 仿真出的长度为 250000 帧的倾斜信号与高阶误差信号的 PSD 对应如图 1 到图 4 所示. 其中, 图 1 和图 2 的理论 PSD 曲线由 (1) 式中 $F_T(f)$ 的一半 (单轴) 计算得到; 图 3 和图 4 的理论 PSD 曲线由 (7) 式中 $F_D(f)$ 计算得到.

通过图 1 至图 4 的理论和数值仿真比较结果可知, 前文所述的 PSD 反演法得到的随机序列的 PSD 与 Kolmogorov 湍流 PSD 符合得很好. 表 1 所示的开环仿真方差与 (2) 式和 (8) 式估计的理论方差也很接近. 由此可知, 利用时间 PSD 反演法生成的倾斜和高阶误差信号能准确模拟 Kolmogorov 湍流的时间特性.

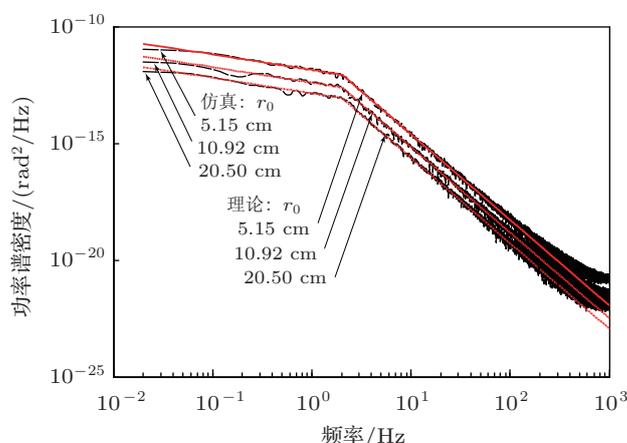


图 1 整体倾斜信号 PSD 曲线 ($V = 15 \text{ m/s}$)

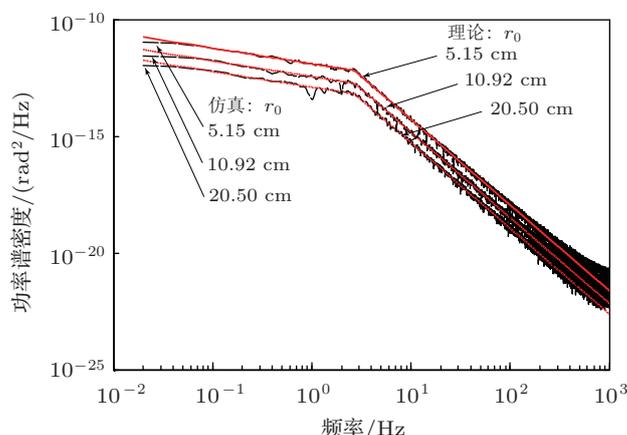


图 2 整体倾斜信号 PSD 曲线 ($V = 20 \text{ m/s}$)

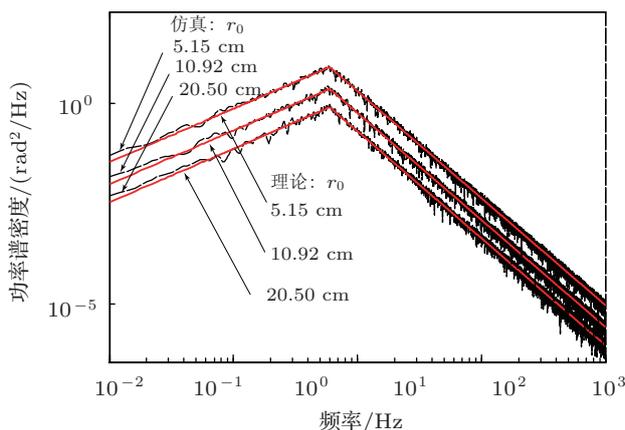


图3 高阶误差信号 PSD 曲线 ($V = 15 \text{ m/s}$)

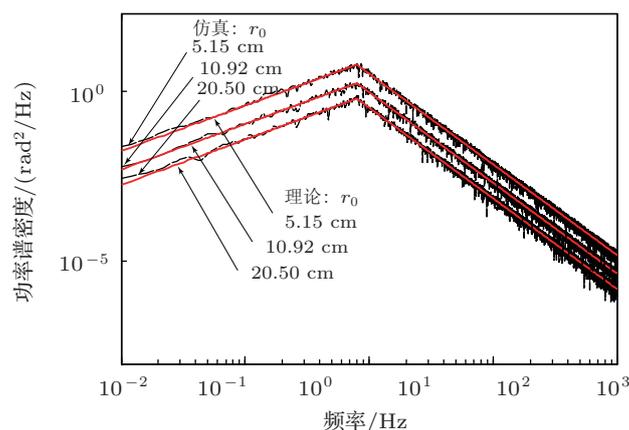


图4 高阶误差信号 PSD 曲线 ($V = 20 \text{ m/s}$)

表1 Kolmogorov 湍流仿真条件及开环误差理论与仿真比较

相干长度/cm	等效横向风速 $V/(m/s)$	整体倾斜理论方差/ 10^{-13} rad^2	整体倾斜仿真方差/ 10^{-13} rad^2	高阶误差理论方差/ rad^2	高阶误差仿真方差/ rad^2
20.50	15	4.9378	4.5780	5.0744	5.1085
20.50	20	4.9378	4.6952	5.0744	5.1082
10.92	15	14.108	13.080	14.4983	14.5958
10.92	20	14.108	13.415	14.4983	14.5984
5.15	15	49.378	45.780	50.7442	51.0854
5.15	20	49.378	46.952	50.7442	51.0818

4 自适应光学控制系统的修正有效带宽

利用第三节的倾斜信号与高阶误差信号生成方法, 生成了满足表 1 条件的倾斜信号和相位信号各 20 组. 用统计方法分析了基于比例积分控制器的跟踪回路与高阶误差校正回路对大气湍流补偿残余方差与误差 -3 dB 带宽的关系, 其中跟踪回路与高阶误差校正回路的等效时延均设定为基于 CCD 探测器所具有的 2 个采样周期 [5]. 定义估计误差系数 β_T 与 β_D 分别为

$$\beta_T(f_{Te3dB}) = \frac{\sigma_{TSimul}^2(f_{Te3dB})}{\sigma_{Tres}^2(f_{Te3dB})}, \quad (15)$$

$$\beta_D(f_{De3dB}) = \frac{\sigma_{DSimul}^2(f_{De3dB})}{\sigma_{Dres}^2(f_{De3dB})}, \quad (16)$$

其中, σ_{TSimul}^2 为数值仿真得到的平均跟踪残余方差; σ_{Tres}^2 为利用 (4) 式估计的跟踪残余方差; σ_{DSimul}^2 为数值仿真得到的平均高阶残余方差; σ_{Dres}^2 为利用 (9) 式估计的高阶残余方差.

β_T 与 f_{Te3dB} 的关系如图 5 所示, 利用直线拟合以上数据得到如下结果:

$$\beta_{TFit}(f_{T3dB}) \approx 0.77566 - 0.00109f_{Te3dB}, \quad (17)$$

β_D 与 f_{De3dB} 的关系如图 6 所示, 利用直线拟合以上数据得到如下结果:

$$\beta_{DFit}(f_{D3dB}) \approx 0.47797 + 0.00055f_{De3dB}. \quad (18)$$

根据 (4), (15) 和 (17) 式, 若定义跟踪回路的修正有效带宽为

$$f_{Teffective} \approx \frac{f_{Te3dB}}{\sqrt{(0.77566 - 0.00109f_{Te3dB})}}, \quad (19)$$

则使用修正有效带宽估计的跟踪残余方差为

$$\begin{aligned} &\sigma_{Tres_Modified}^2(f_{Teffective}) \\ &\approx (f_T/f_{Teffective})^2(\lambda/D)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

根据 (9), (16) 和 (18) 式, 若定义高阶误差校正回路的修正有效带宽为

$$f_{Deffective} \approx \frac{f_{De3dB}}{(0.47797 + 0.00055f_{De3dB})^{3/5}}, \quad (21)$$

则使用修正有效带宽估计的高阶残余方差为

$$\sigma_{\text{Dres_Modified}}^2(f_{\text{Deffective}}) \approx (f_G/f_{\text{Deffective}})^{5/3}. \quad (22)$$

5 自适应光学系统校正残余误差仿真

为检验修正有效带宽对 Kolmogorov 湍流补偿残余方差估计的准确性, 选取相干长度分别为 6.3 cm, 10.9 cm 和 17.6 cm, 等效横向风速分别为 12 m/s 和 17 m/s 等典型强、中、弱湍流观测条件, 继续利用 PSD 反演法得到对应的整体倾斜信号及高阶扰动信号. 利用这些信号仿真得出基于比例积分控制器的 AO 系统对 Kolmogorov 湍流的校正残余方差, 每种大气条件重复 5 次, 取平均值. 结果如图 7 至图 10 所示, 其中, 图 7 和图 8 中的虚线对应 Tyler 理论即 (4) 式的估计结果, 实线对应 (20) 式的估计结果; 图 9 和图 10 中的虚线对应 Greenwood 理论即 (9) 式的估计结果, 实线对应 (22) 式的估计结果. 可以发现, 基于跟踪回路修正有效带宽估计出的跟踪残余方差准确性高于根据 Tyler 理论估计的结果; 基于高阶误差校正回路修正有效带宽估计出的高阶残余方差准确性高于根据 Greenwood 理论估计的结果. 因此, 本文得出的修正有效带宽更适合于实际的 AO 系统的设计与分析.

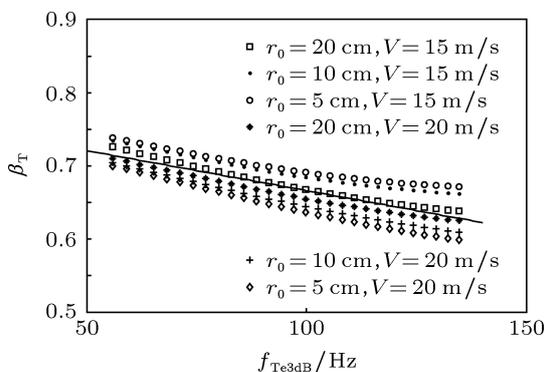


图 5 各条件湍流下 β_T 与 f_{Te3dB} 的关系及拟合结果

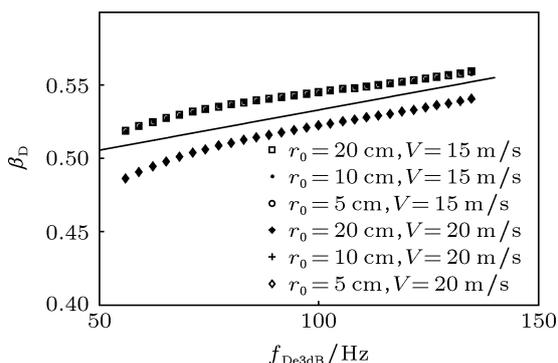


图 6 各条件湍流下 β_D 与 f_{De3dB} 的关系及拟合结果

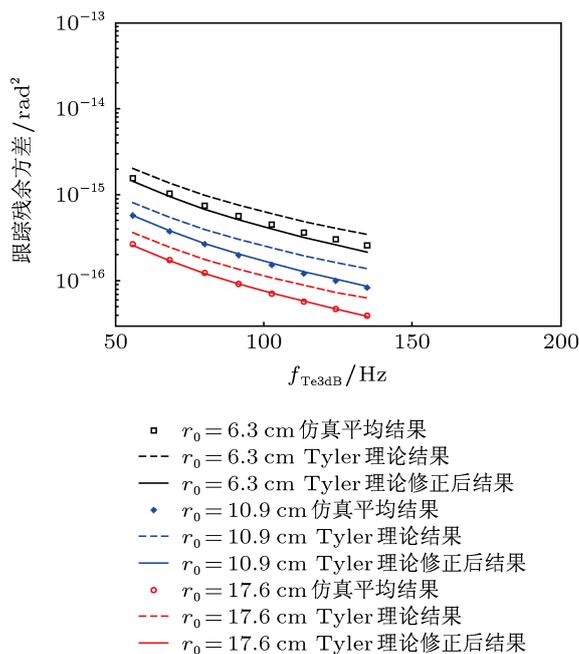


图 7 仿真跟踪残余方差与估计跟踪残余方差比较 ($V = 12$ m/s)

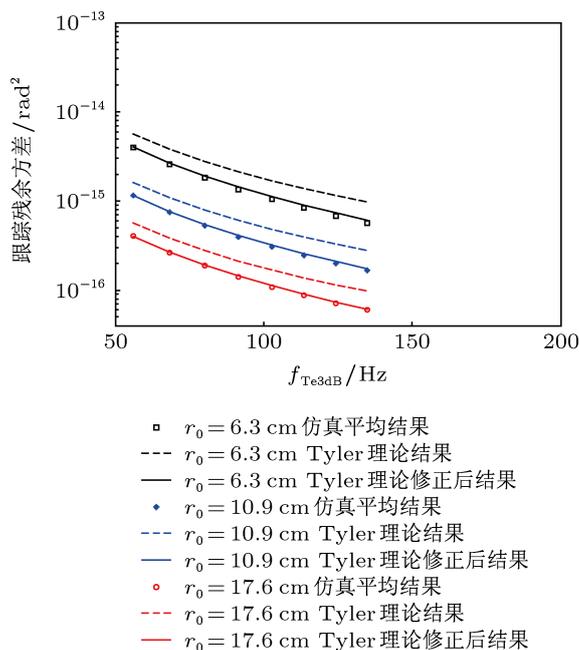


图 8 仿真跟踪残余方差与估计跟踪残余方差比较 ($V = 17$ m/s)

6 结论

本文使用 PSD 反演法生成了符合 Kolmogorov 湍流时间 PSD 的倾斜信号与高阶误差信号, 并利用这些信号模拟了基于比例积分控制器的跟踪回路和高阶误差校正回路对湍流的校正残余方差. 针对实际的 AO 系统具有有限误差 -3 dB 带宽和时

间延迟, 闭环带宽不等于误差 -3 dB 带宽的特点, 通过数值模拟和拟合分析, 对 Tyler 提出的跟踪残余方差与闭环带宽的关系以及 Greenwood 提出的相位残余方差与闭环带宽的关系进行了修正, 得

出了修正有效带宽的表达式. 数值仿真表明, 利用修正有效带宽可以更加精确地估计 AO 系统对 Kolmogorov 湍流的闭环补偿残余方差. 本文的结果对 AO 系统的设计和分析具有指导意义.

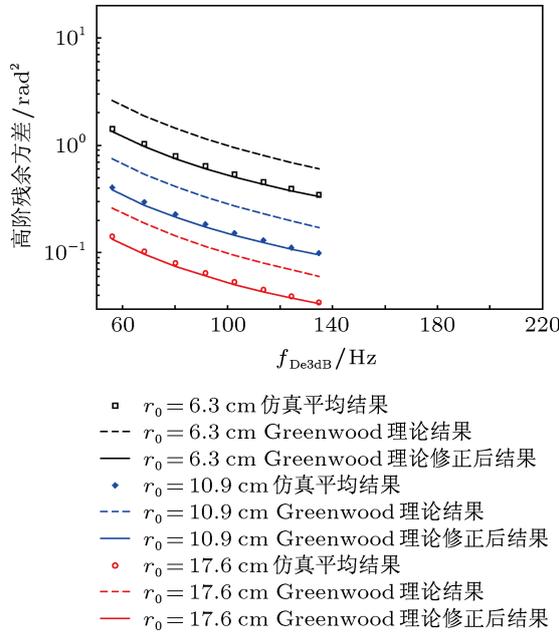


图9 仿真高阶残余方差与估计高阶残余方差比较 ($V = 12$ m/s)

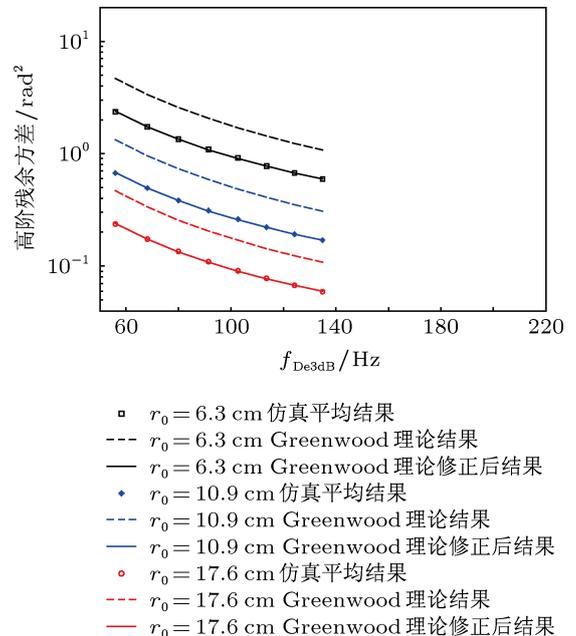


图10 仿真高阶残余方差与估计高阶残余方差比较 ($V = 17$ m/s)

[1] Li C H, Xian H, Jiang W H, Rao C H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4289 (in Chinese) [李超宏, 鲜浩, 姜文汉, 饶长辉 2007 物理学报 **56** 4289]
 [2] Tang G M, Rao C H, Sheng F, Zhang X J, Jiang W H 2002 *Proc. SPIE* **4926** 14
 [3] Ning Y, Yu H, Zhou H, Rao C H, Jiang W H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4717 (in Chinese) [宁禹, 余浩, 周虹, 饶长辉, 姜文汉 2009 物理学报 **58** 4717]
 [4] Kulcsar C, Raynaud H F, Petit C, Conan J M, Lesegno P V 2006 *Opt. Express* **14** 7464
 [5] Li X Y, Jiang W H 1997 *Acta. Phto. Sin.* **17** 1697 (in Chinese) [李新阳, 姜文汉 1997 光学学报 **17** 1697]
 [6] Rao C H, Sheng F, Jiang W H 2000 *Acta. Phto. Sin.* **20** 68 (in Chinese)

[饶长辉, 沈锋, 姜文汉 2000 光学学报 **20** 68]
 [7] Tyler G A 1994 *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 358
 [8] Greenwood D P 1977 *J. Opt. Soc. Am. A* **67** 390
 [9] Fried D L 1990 *J. Opt. Soc. Am. A* **7** 1224
 [10] Karr T J 1991 *Appl. Opt.* **30** 363
 [11] Wang G X, He Z 2008 *Control System Design* (Beijing: Tsinghua University Press) p65 (in Chinese) [王广雄, 何朕 2008 控制系统设计 (北京: 清华大学出版社) 第 65 页]
 [12] Sun K, Rong T P 2002 *J. Huazhong Univ. of Sci. & Tech. (Nature Science Edit ion)* **30** 55 (in Chinese) [孙恺, 容太平 2002 华中科技大学学报 **30** 55]

Modified effective bandwidths of adaptive optical control systems for compensation in Kolmogorov turbulence*

Guo You-Ming¹⁾²⁾³⁾ Ma Xiao-Yu¹⁾²⁾ Rao Chang-Hui^{1)2)†}

1) (*Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China*)

2) (*The Key laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China*)

3) (*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

(Received 6 January 2013; revised manuscript received 24 January 2013)

Abstract

Based on the time serial signal generated by power spectrum density inversion, the closed-loop compensation residual variances of tracking loop and high-order error correction loop with finite error rejection -3 dB bandwidth and time delay are simulated. The data fitting results of relationships between residual variances and corresponding error rejection -3 dB bandwidths are obtained. The system effective bandwidths are modified so as to make the estimate of residual variances more precise.

Keywords: Kolmogorov turbulence, Tyler frequency, Greenwood frequency, effective bandwidth

PACS: 42.68.Wt, 95.75.Qr, 07.05.Tp

DOI: 10.7498/aps.62.134207

* Project supported by the Joint Funds of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11178004).

† Corresponding author. E-mail: chrao@ioe.ac.cn