

# 超声波作用下泡群的共振声响应\*

胡静 林书玉<sup>†</sup> 王成会 李锦

(陕西师范大学应用声学研究所, 西安 710062)

(2013年3月3日收到; 2013年3月14日收到修改稿)

从球状泡群气泡动力学方程出发, 考虑泡群间次级声辐射的影响, 得到了声场中两泡群共同存在时气泡振动的动力学方程, 并以此为基础探讨声波驱动下双泡群振动系统的共振响应特征. 由于泡群间气泡间的相互作用, 系统存在低频共振和高频共振现象, 两不同共振频率的数值与泡群内气泡的本征频率相关. 泡群内气泡的本征频率又受到初始半径、泡群大小和泡群内气泡数量的影响. 气泡自由振动和驱动声波的耦合激起泡群内气泡的受迫振动, 气泡初始半径、气泡数密度和驱动声波频率等都会影响泡群内气泡的振动幅值和初相位.

**关键词:** 气泡群, 共振, 声响应, 超声空化

**PACS:** 43.25.+y, 43.35.+d

**DOI:** 10.7498/aps.62.134303

## 1 引言

超声波换能器连接变幅杆能够在液体中激发较高强度的声波, 从而引起较为剧烈的空化效应, 能够达到粉碎细胞、增强物质传输和化学反应等效果. 随着强超声波从变幅杆辐射面发出, 大量的气泡也出现在辐射面附近, 并在强声波的作用下在液体中扩散形成局部振荡的泡群<sup>[1-3]</sup>. 声场中气泡除受源声场影响之外, 气泡本身的运动也可能在声场中引起次级声辐射并影响邻近气泡的运动和液体内的声场分布<sup>[4-8]</sup>. 气泡间的相互作用影响彼此的振动形态和声场内气泡的分布状态.

自空化现象被发现以来, 气泡动力学的研究逐步从单气泡动力学过渡到双泡和多泡动力学<sup>[9-13]</sup>, 人们为探索气泡在声波作用下的动力学特征以及对声能量利用效率的影响做出了大量的有效的工作<sup>[14-18]</sup>, 但空化机理仍然处在探索之中. 多泡系统内声波的传播特性, 气泡的动力学特性, 气泡的耦合运动特征等仍有待进一步研究. 本文将在球状泡群耦合动力学方程的基础上, 引入不同泡群间气泡相互作用的影响, 建立泡群耦合振动动力学方程,

并以此为基础研究一定强度超声波作用下不同泡群内气泡的共振声响应特征.

## 2 基本方程

### 2.1 泡群内气泡的动力学方程

液体中超声波作用下的振动气泡将在介质中形成次级声辐射, 其在介质中产生的附加压力为<sup>[14]</sup>

$$p_{\text{ad}} = \frac{\rho}{r} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}), \quad (1)$$

式中  $R$  为振动气泡的瞬时半径,  $r$  为介质中点到气泡中心的距离,  $\rho$  为介质密度. 多泡系统中气泡的运动将受到周围气泡的次级声辐射影响, 因此, 有相互作用的气泡间将形成耦合振动系统. 在单气泡动力学方程的基础上引入相互作用项后可得到描述多泡系统内气泡运动的动力学方程<sup>[11]</sup>. 在我们的模型中将考虑两相互作用的气泡群的共振声响应, 其动力学方程可表示为

$$\left(1 - \frac{\dot{a}_j}{c} + M_j\right) a_j \ddot{a}_j + \left(\frac{3}{2} - \frac{\dot{a}_j}{2c} + 2M_j\right) \dot{a}_j^2$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 11174192, 11204168, 61102094)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: GK201004003)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: sxsdxs@snnu.edu.cn

$$= \left(1 + \frac{\dot{a}_j}{c}\right) \frac{p_{jb}}{\rho} + \frac{a_j}{\rho c} \frac{dp_{jb}}{dt} - \frac{p_{jint}}{\rho}, \quad (2)$$

式中  $a_j$  表示第  $j$  ( $j=1,2$ ) 个泡群中气泡的瞬时半径,  $M_j = \frac{N_j a_j}{r_{jclust}} \left(1 - \frac{r_j^2}{3r_{jclust}^2}\right)$ ,  $c$  为液体中的声速,  $r_j$  为该运动气泡在气泡总数  $N_j$ 、半径为  $r_{jclust}$  的泡群内的相对位置<sup>[11]</sup>; 压力  $p_{jb}$  可表示为

$$p_{jb} = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_{j0}}\right) \left(\frac{a_{j0}}{a}\right)^{3\kappa} - \frac{2\sigma}{a_j} - \frac{4\eta\dot{a}_j}{a_j} - p_0 - p_a \sin \omega t, \quad (j=1,2), \quad (3)$$

式中  $p_0$  为流体静压力,  $\sigma$  和  $\eta$  分别为液体的表面张力系数和黏度系数;  $a_{j0}$  为气泡环境半径,  $\kappa$  为气体多方指数;  $p_a$  和  $\omega = 2\pi f$  分别为驱动声波压力和频率. 从方程 (2) 可以看出, 气泡在泡群中的位置不同, 其运动不同, 对于较小泡群而言, 这种差别非常小, 几乎可以忽略, 因此, 我们将用处于泡群中心的振动气泡代表整个泡群内气泡的运动. 若两个泡群中心距离为  $L$  且有  $L \gg a_j$ , 则与不同泡群内气泡相互作用有关的附加压力可近似表示为

$$\frac{p_{jint}}{\rho} = \frac{N_{3-j}}{L} \frac{d}{dt} (a_{3-j}^2 \dot{a}_{3-j}). \quad (4)$$

## 2.2 系统共振频率

假定所有气泡均在外声场的驱动下做小振幅振动. 令

$$a_j = a_{j0}(1 + x_j), \quad (j=1,2), \quad (5)$$

式中  $x_j$  为无量纲气泡  $j$  泡壁的振动位移且有  $x_j \ll 1$ . (5) 式代入 (2) 式, 约去  $x_j$  的高阶小量后有

$$\ddot{x}_j + \omega_j \ddot{x}_{3-j} + b_j \dot{x}_j + \omega_j^2 x_j = -p_{ja} \sin \omega t, \quad (6)$$

式中各参量的表达式为

$$\omega_j = \frac{N_{3-j} a_{(3-j)0}^3}{L m_j},$$

$$b_j = \frac{a_{j0}}{\rho c m_j} \left(3\kappa p_0 + (3\kappa - 1) \frac{2\sigma}{a_{j0}}\right) + \frac{4\eta}{\rho m_j},$$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{1}{\rho m_j} \left(3\kappa p_0 + (3\kappa - 1) \frac{2\sigma}{a_{j0}}\right)},$$

$$p_{ja} = \frac{p_a}{\rho m_j},$$

$$m_j = \left(1 + \frac{N_j a_{j0}}{r_{jclust}}\right) \frac{N_j a_{j0}^3}{r_{jclust}} + \frac{4\eta a_{j0}}{\rho c}.$$

忽略系统振动阻尼的影响, 其线性共振频率  $\omega_0$  满足特征方程

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega_1^2 & \omega_1 \omega_0^2 \\ \omega_2 \omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

由此可得系统共振频率为

$$(\omega_0)_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_1 \omega_2}}{2(1 - \omega_1 \omega_2)}}, \quad (8)$$

故当驱动声波频率等于 (8) 式中的  $(\omega_0)_1$  或  $(\omega_0)_2$ , 体系将处于共振状态.

## 2.3 气泡的声响应

在外部声场  $-p_{ja} \sin \omega t$  的驱动下, 两泡群中心处气泡的稳态受迫振动方程为

$$x_j = x_{ja} \sin(\omega t + \alpha_j), \quad (9)$$

式中  $x_{ja}$  和  $\alpha_j$  为气泡的振动幅值和初相位. 将 (9) 式代入 (6) 式, 忽略含  $b_j$  的三次方以上的项后, 得

$$x_{1a} = \frac{|p_{1a}(\omega^2 - \omega_2^2) - p_{2a}\omega^2\omega_1|}{\sqrt{\omega^2[b_2^2(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + b_1^2(\omega^2 - \omega_2^2)^2 + 2b_1b_2\omega^4\omega_1\omega_2] + [(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) - \omega^4\omega_1\omega_2]^2}}, \quad (10)$$

$$x_{2a} = \frac{|p_{2a}(\omega^2 - \omega_1^2) - p_{1a}\omega^2\omega_2|}{\sqrt{\omega^2[b_2^2(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + b_1^2(\omega^2 - \omega_2^2)^2 + 2b_1b_2\omega^4\omega_1\omega_2] + [(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) - \omega^4\omega_1\omega_2]^2}}, \quad (11)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\omega b_2 p_{1a}}{p_{2a}\omega^2\omega_1 - p_{1a}(\omega^2 - \omega_2^2)} - \frac{\omega b_2(\omega^2 - \omega_1^2) + \omega b_1(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^4\omega_1\omega_2 - (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (12)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\omega b_1 p_{2a}}{p_{1a} \omega^2 \omega_2 - p_{2a} (\omega^2 - \omega_1^2)} - \frac{\omega b_2 (\omega^2 - \omega_1^2) + \omega b_1 (\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^4 \omega_1 \omega_2 - (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}. \quad (13)$$

(10)–(13) 式表明两泡群内气泡的径向振动位移和初相位均受到泡群内以及泡群间的气泡相互作用影响.

### 3 数值分析

一般情况下, 较高强度的超声波作用于液体将在液体内部激起泡群内气泡的耦合振动, 不同泡群所包含的气泡的平衡半径不同, 甚至处在同一泡群内的不同气泡的平衡半径也会有所不同. 气泡同时受到泡群内和泡群外的气泡的次级声辐射的影响, 决定其声响应状态的影响因素繁多. 在下面的数值计算中, 我们将考察包含气泡平衡半径、泡群内气泡含量, 泡群间距离、声驱动频率和幅值等对气泡振动状态的影响. 取驱动声压的声压幅值为  $1.3 \times 10^5$  Pa, 频率为 26 kHz, 液体密度  $\rho = 998$  kg/m<sup>3</sup>, 液体粘滞系数  $\eta = 0.001$  Pa·s, 液体的表面张力为  $\sigma = 0.0725$  N/m, 泡内气体多方指数  $\kappa = 1.4$ , 两个泡群中心距离  $L = 1$  mm.

当  $N_1 = N_2 = 100$ ,  $r_{1\text{clust}} = 0.5$  mm,  $r_{2\text{clust}} = 0.3$  mm,  $a_{10} = 5$   $\mu\text{m}$  时, 泡群 2 内气泡初始半径对系统共振频率的影响如图 1 所示. 系统的共振频率决定于两气泡群内气泡各自的本征频率. 由于气泡群 1 内的气泡初始半径保持不变, 故  $\omega_1$  保持恒定; 随  $a_{20}$  的增加,  $\omega_2$  减小. 当  $a_{20} = 2.775$   $\mu\text{m}$  时, 两泡群内中心位置处气泡的本征频率相等, 即  $\omega_1 = \omega_2$ . 当  $a_{20} < 2.775$   $\mu\text{m}$  时,  $\omega_2 > \omega_1$ , 系统共振频率的高频成分  $(\omega_0)_1$  的变化趋势接近于  $\omega_2$ ; 但当  $a_{20} > 2.775$   $\mu\text{m}$  时,  $\omega_2 < \omega_1$ , 系统共振频率的低频成分  $(\omega_0)_2$  的变化趋势接近于  $\omega_2$ ; 在  $a_{20} = 2.775$   $\mu\text{m}$  附近, 系统共振频率的低频成分和高频成分之间的差值变小, 但不为零, 即由于气泡间的相互作用, 系统共振频率的低频成分和高频成分客观存在, 从而导致系统的共振响应频带变宽. 图 2 给出了当  $a_{10} = a_{20} = 5$   $\mu\text{m}$  时 (其他参数同图 1), 泡群 1 内气泡初数量  $N_1$  对系统共振频率的影响. 当  $N_1 = 385$  时, 两泡群内中心位置处气泡的本征频率相等, 即  $\omega_1 = \omega_2$ ; 随着  $N_1$  的增加,  $\omega_1$  减小, 表明泡群内的气泡数密度越大, 气泡的本征频率越低.

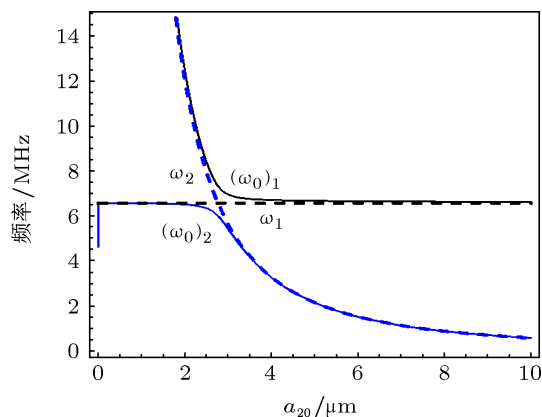


图 1 气泡初始半径对系统共振频率的影响 ( $a_{10} = 5$   $\mu\text{m}$ )

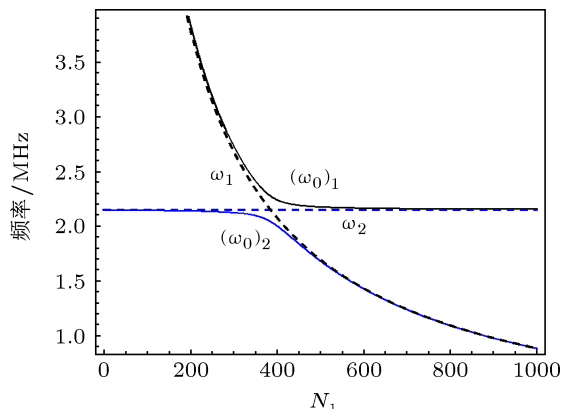


图 2 气泡数对系统共振频率的影响 ( $a_{10} = a_{20} = 5$   $\mu\text{m}$ )

当  $N_1 = N_2 = 100$ ,  $r_{1\text{clust}} = 0.5$  mm,  $r_{2\text{clust}} = 0.3$  mm,  $a_{10} = 5$   $\mu\text{m}$  时, 泡群 2 内气泡初始半径对系统内振动气泡的声响应幅值和初相位的影响如图 3 所示. 当  $a_{20} < 19$   $\mu\text{m}$  时, 随着气泡初始半径的增加, 两泡群内气泡的受迫振动幅值均增加; 但当  $a_{20}$  从左侧趋近于 19  $\mu\text{m}$  时, 泡群 1 和 2 内中心处的气泡均接近共振状态, 而当  $a_{20}$  从右侧稍偏离 19  $\mu\text{m}$  时, 泡群 1 内中心处的气泡振动受到抑制, 其振幅趋近于零; 在  $a_{20} > 19$   $\mu\text{m}$  的范围内, 泡群 1 内中心处的气泡振动幅值又逐渐增加并趋于一稳定值 0.05. 在整个  $a_{20}$  取值范围内, 气泡振动的初相位的变化规律可总结为: 在  $a_{20} < 19$   $\mu\text{m}$  和  $a_{20} > 19$   $\mu\text{m}$  内的非共振区内, 气泡的振动初相位为零和  $-\pi$ , 而在  $a_{20} = 19$   $\mu\text{m}$  的邻域内, 当气泡都共振时, 其初相位趋近于  $-\pi/2$ ; 当泡群 1 内中心处气泡的振动被抑制时, 其初相位从第三象限趋近于  $-\pi$  并在此微小

范围内有起伏变化,而在气泡的振动幅值回升的微小区域内,其初相位又趋近于  $-\pi/2$  并逐步过渡到零;在泡群 2 内中心处气泡的振动从共振到一般响应的过渡区内,其初相位从  $-\pi/2$  逐步趋近于  $-\pi$ . 气泡受迫振动的初相位的变化决定了驱动声波对振动气泡的作用特征,若二者相位差为  $-\pi/2$ ,驱动声波和气泡振动速度几乎同相位,始终对气泡做正功,气泡处于共振状态.

当  $N_2 = 100$ ,  $r_{1\text{clust}} = 0.5 \text{ mm}$ ,  $r_{2\text{clust}} = 0.3 \text{ mm}$ ,  $a_{10} = 5 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $a_{20} = 3 \text{ }\mu\text{m}$  时,泡群 1 内气泡数量  $N_1$  对系统内振动气泡的声响应幅值和初相位的影响如图 4 所示. 当泡群 1 内气泡数量  $N_1$  接近 5500 时,其中心处气泡处于共振状态,在此共振区内,当气泡数落在泡群 1 内气泡共振峰左侧时,二者几乎同时共振,而在共振峰右侧极小区域内泡群 2 的振动受到较强的抑制. 振动相位的变化和图 3 观察到的变化特征相同. 因此,无论是泡群内气泡数量变化还是气泡初始半径变化,都将影响系统的共振响应

状态,而在共振区内某泡群的微小变化将可能导致邻近区域内的泡群振动受到抑制.

图 5 和图 6 给出了气泡初始半径分别为  $a_{10} = 5 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $a_{20} = 3 \text{ }\mu\text{m}$  和  $a_{10} = a_{20} = 5 \text{ }\mu\text{m}$  两种情况下驱动声波频率对气泡振动幅值和初相位的影响(其他参数同图 1). 在 0—5 MHz 的频率范围内,泡群 1 和 2 内气泡均出现两个共振峰且共振峰出现的位置相同,表明二者同时达到共振状态. 比较图 5 和图 6,两共振峰之间所夹的频率范围不同,两泡群内气泡的初始半径均为  $5 \text{ }\mu\text{m}$  时,共振峰之间频率间隔较大;在较低共振频率(约为 350 kHz)处,泡群 1 内气泡振动幅值低于泡群 2 内气泡振动幅值,表明泡群 1 内气泡振动受到一定程度的抑制;在较低共振频率(约为 1.05 MHz)处,泡群 1 内气泡振动幅值高于泡群 2 内气泡振动幅值,这表明泡群 2 内气泡振动受到一定程度的抑制. 不同共振峰处响应幅值不同的原因在于系统共振频率和两泡群各自的本征频率之间的耦合程度有关.

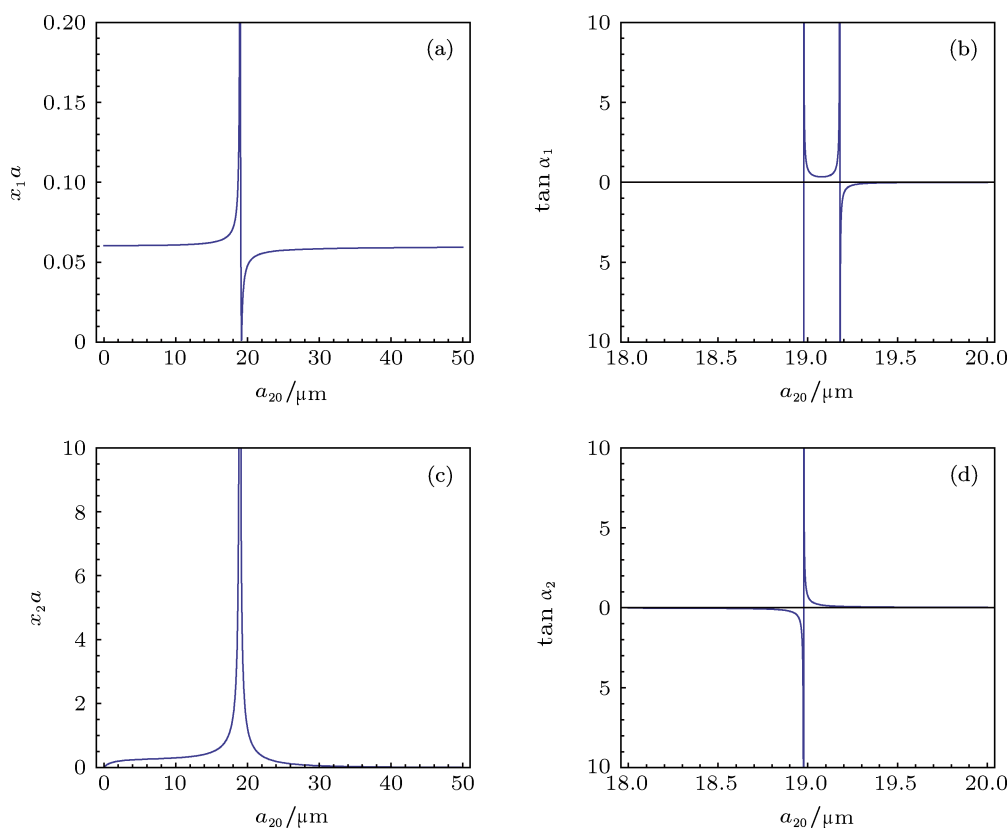


图 3 气泡初始半径对气泡振动幅值和相位的影响 ( $a_{10} = 5 \text{ }\mu\text{m}$ ) (a) 泡群 1 气泡振幅; (b) 泡群 1 气泡相位; (c) 泡群 2 气泡振幅; (d) 泡群 2 气泡相位

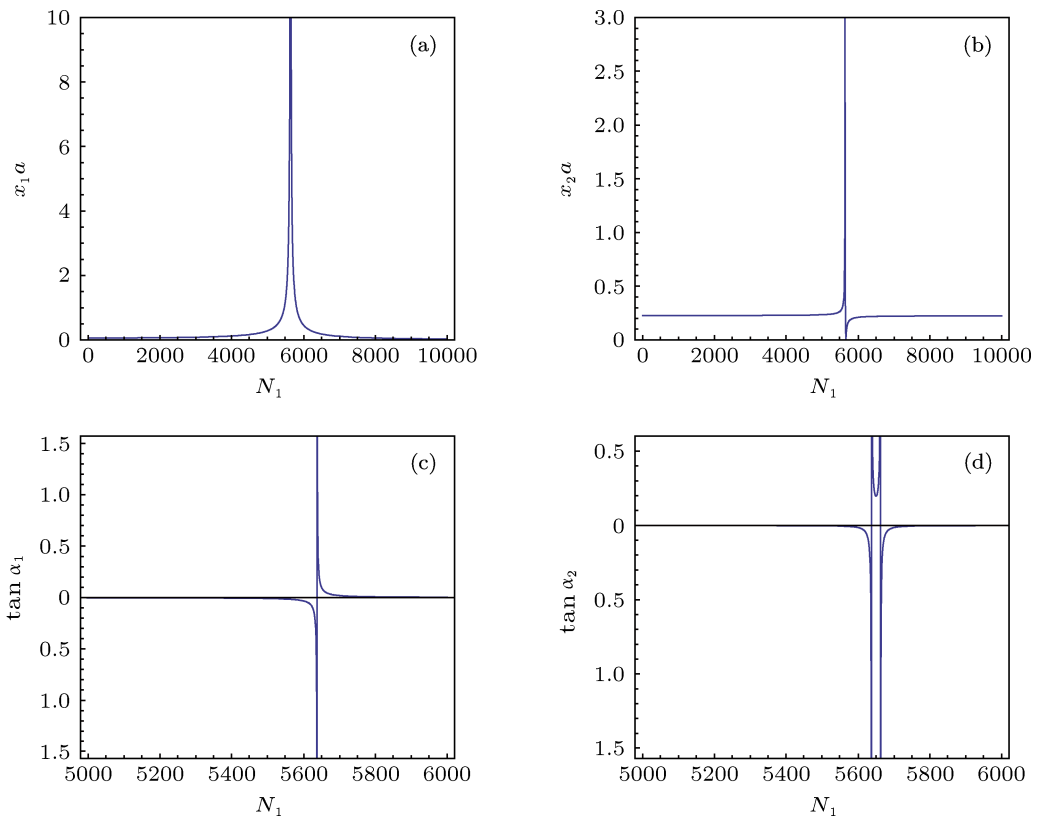


图4 气泡数量对气泡振动幅值和初相位的影响 ( $a_{10} = 5 \mu\text{m}$ ,  $a_{20} = 3 \mu\text{m}$ ) (a) 泡群1 气泡振幅; (b) 泡群2 气泡振幅; (c) 泡群1 气泡相位; (d) 泡群2 气泡相位

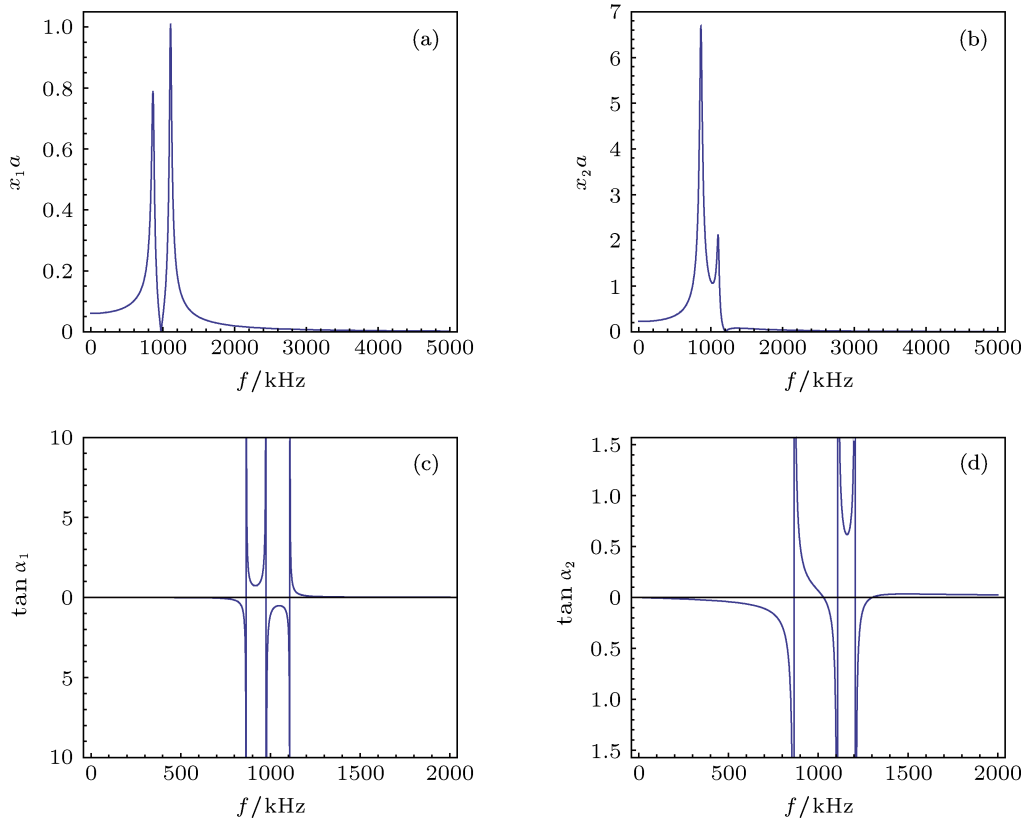


图5 驱动声波频率对气泡振动幅值和初相位的影响 ( $a_{10} = 5 \mu\text{m}$ ,  $a_{20} = 3 \mu\text{m}$ ) (a) 泡群1 气泡振幅; (b) 泡群2 气泡振幅; (c) 泡群1 气泡相位; (d) 泡群2 气泡相位

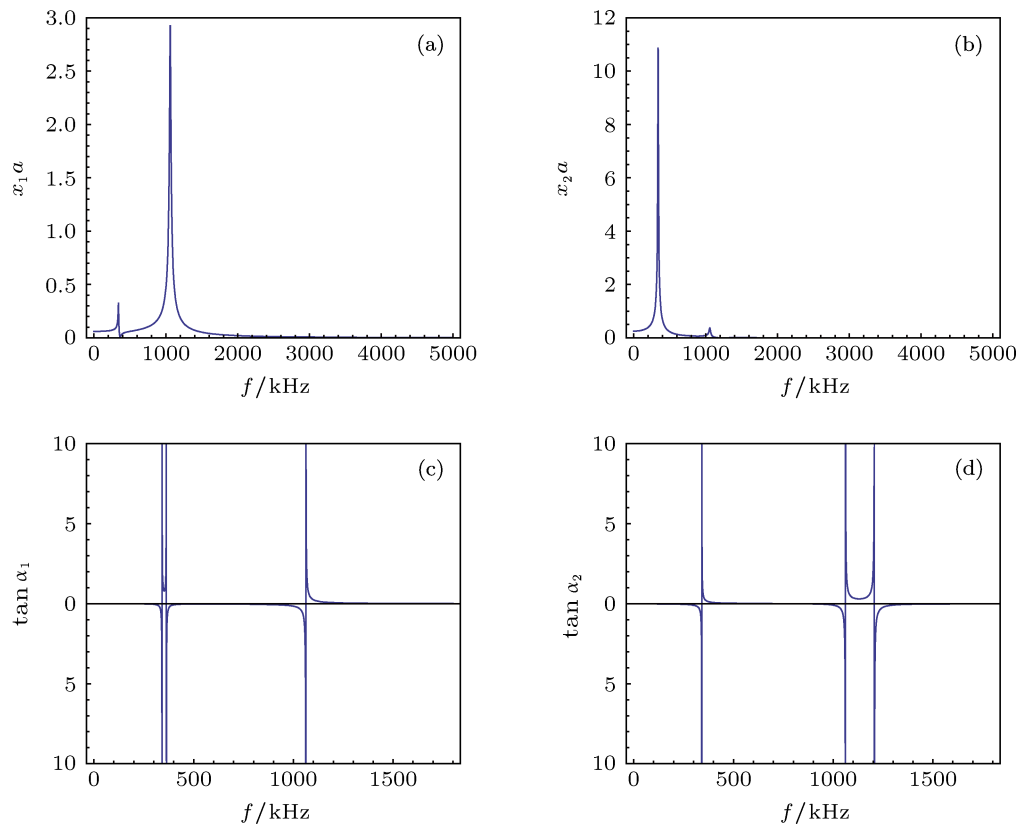


图6 驱动声波频率对气泡振动幅值和初相位的影响 ( $a_{10} = a_{20} = 5 \mu\text{m}$ ) (a) 泡群1 气泡振幅; (b) 泡群2 气泡振幅; (c) 泡群1 气泡相位; (d) 泡群2 气泡相位

## 4 结论

从球状泡群气泡动力学方程出发, 考虑泡群间次级声辐射的影响, 得到了声场中两泡群共同存在时气泡振动的动力学方程, 并以此为基础分析声波驱动下双泡群振动系统的共振响应特征. 系统的共振频率受到两泡群本征频率和二者间的相互作用因子 ( $\omega_1$  和  $\omega_2$ ) 的影响. 泡群内气泡的本征频率又受到初始半径、泡群大小和泡群内气泡数量的影响. 气泡自由振动和驱动声波的耦合激起泡群

内气泡的受迫振动, 其振动幅值和初相位受到气泡初始半径、气泡数密度和驱动声波频率等多种因素影响.

声波作用下的泡群运动可在液体中引起很多复杂的物理化学效应, 多泡空化区域为高强度超声能量液体应用提供反应场所, 多泡声致发光、声化学反应和超声提取等都与多泡环境下气泡的动力学行为密切相关, 因此, 本文的研究结论将对高强度超声波的高效应用具有较强的指导意义.

- [1] Yasui K, Iida Y, Tuziuti T, Kozuka T, Towata A 2008 *Phys. Rev. E* **77** 016609
- [2] Kanthale P M, Gogate P R, Pandit A B, Wilhelm A M 2003 *Ultrason. Sonochem.* **10** 181
- [3] Brothie A, Grieser F, Ashokkumar M 2009 *Phys. Rev. L* **102** 084302
- [4] Wang C H, Lin S Y 2011 *Chin. J. Acous.* **31** 122
- [5] Birkin P R, Offin D G, Vian C J B, Leighton T G, Maksimov A O 2011 *J. Acoust. Soc. Am.* **130** 3297
- [6] Ida M, Naoe T, Futakawa M 2007 *Phys. Rev. E* **75** 046304
- [7] Van der Kroon I, Quinto-Su P A, Li F, Ohl C 2010 *Phys. Rev. E* **82** 066311
- [8] Brujan E A, Ikeda T, Yoshinaka K, Matsumoto Y 2011 *Ultrason. Sonochem.* **18** 59
- [9] An Y 2012 *Phys. Rev. E* **85** 016305
- [10] Toyman I, Silbergleit A, Simanovski D, Palanker D 2010 *Phys. Rev. E* **82** 046313
- [11] An Y 2011 *Phys. Rev. E* **84** 066313
- [12] Cai M, Zhao S, Liang H 2010 *Desalination* **263** 133
- [13] Yasui K, Towata A, Tuziuti T, Kozuka T, Kato K 2011 *J. Acoust. Soc. Am.* **130** 3233
- [14] Sadighi-Bonabi R, Rezaee N, Ebrahimi H, Mirheydari M 2010 *Phys. Rev. E* **82** 016316

- [15] Rezaee N, Sadighi-Bonabi R, Mirheydari M, Ebrahimi H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 087804 114302  
[16] Ida M 2009 *Phys. Rev. E* **79** 016037 [18] Jiang L, Liu F, Chen H S, Wang J D, Chen D R 2012 *Phys. Rev. E* **85** 036312  
[17] Zhang Y L, Zheng H R, Tang M X, Zhang D 2011 *Chin. Phys. B* **20**

# Study of resonance sound response for bubble cluster in ultrasonic field\*

Hu Jing Lin Shu-Yu<sup>†</sup> Wang Ceng-Hui Li Jin

(Applied Acoustics Institute, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 3 March 2013; revised manuscript received 14 March 2013)

## Abstract

Taking into consideration the influence of bubble cluster secondary sound radiation, the dynamic equation of spherical bubble clusters is obtained for two bubble clusters co-existing in the same ultrasonic field. Based on the original dynamic equation, the resonance response characteristics of the two-bubble-cluster oscillation system in ultrasonic field are discussed. Results showed that there are two resonance frequencies in this system, that is, low resonance frequency and high resonance frequency, due to the interaction between oscillating bubbles in the bubble cluster, and the two resonance frequencies are related with the bubble's eigenfrequency. The eigenfrequency of the bubbles is related to the bubble cluster's initial radius, bubble cluster's size and the number of bubbles. The coupling between bubble free vibration and driving acoustic may arouse the bubble's forced vibration, whose amplitude and initial phase are related to the bubble initial radius, bubble number density and driving sonic frequency.

**Keywords:** bubble cluster, resonance, acoustic response, ultrasonic cavitation

**PACS:** 43.25.+y, 43.35.+d

**DOI:** 10.7498/aps.62.134303

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11174192, 11204168, 61102094), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities in China (Grant No. GK201004003).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: xsdxs@snnu.edu.cn