

## 海洋表面波的 3-4-5 波共振守恒理论\*

黄虎†

(上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海市力学在能源工程中的应用重点实验室, 上海 200072)

(2013 年 1 月 4 日收到; 2013 年 1 月 18 日收到修改稿)

面对海洋表面完整的两大波要素——张力波和重力波, 构建出一个确定、丰富、基本的有限水深海洋表面波的“3-4-5 波共振守恒理论”. 与以往经典、现代的多种结果相比, 充分保证了该理论的“精确性、对称性、完备性”, 为后继、普适的海洋波湍流统计理论提供了一个必备基础.

**关键词:** 海洋表面波, Hamilton 描述, 3-4-5 波共振, 波湍流

**PACS:** 92.10.Hm, 47.10.Df, 47.35.Bb, 47.35.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.139201

## 1 引言

波之气象万千, 惟在海洋表面上可得到波澜壮阔的宣泄. 一派万顷碧波一路滚滚而来, 就免不了发生相互“追逐、穿越、融合”. 那已流传了几个世纪, 无论是在远洋深海域, 还是在近海浅水处, 时不时地突然在刹那间“拔海而起”的轩然大波, 或诡异波<sup>[1,2]</sup>, 道不清, 说不明, 又究竟蕴藏着怎样的“波-波相互作用”法则?

可以推断, 波之共振属性, 必隐秘其中, 必牵动众多“高高低低、长长短短”波列的联合“暴涨暴落”. 而目前海洋表面波之相互作用理论<sup>[3-9]</sup>所包含的最大波之数目为 5(惯常为 4), 又几乎把与表面重力波不可分割、共存于一个整体中的表面张立波<sup>[10-12]</sup>排斥在外. 究其因, 只为“简便起见”. 若不然, “太繁杂矣”.

繁杂, 当不可避免. 但历经一番数千项运算、推演的“繁不胜繁”的阵痛后, 必将是“删繁就简三秋树, 领异标新二月花”. 即谓: 删除大多数的“非共振”波-波相互作用项, 以此得出众多“删除条件”; 剩余的, 就只能是寥寥无几的“共振”波-波相互作用项, 以此就显现出一个新型“波-波共振理论枝干”, 甚是“亭亭玉立”了.

何以“删繁就简?” 继而又“领异标新?” 既然, 面对的是海洋表面波, 那就一切“操作”受制于水动力学表面波的控制方程组吗? 否! 这个波动, 那种波动, 理应“万变不离其宗”——拥有某种对称性——经相应的变换后拥有不变的刻画相应物理实在的结构. 循此自然路径, 一改传统水波动力学控制的局面——发现了一个海洋表面波实在结构——Hamilton 表面波正则方程<sup>[5]</sup>:

$$i \frac{\partial a(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \frac{\delta H(a, a^*)}{\delta a^*}, \quad (1)$$

其中,  $H(a, a^*)$  即为表征水波系统能量的 Hamilton 函数,  $a^*$  是复变量  $a$  之共轭,  $\mathbf{k}$  是波数矢量,  $\delta$  代表泛函导数. 并且,

$$a(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{g}{2\omega(\mathbf{k})}} \hat{\zeta}(\mathbf{k}, t) + i \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2g}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t).$$

在这里,  $\omega(\mathbf{k})$  为角频率, 色散关系为

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \left(1 + \frac{\gamma|\mathbf{k}|^2}{\rho g}\right) g|\mathbf{k}| \tanh(|\mathbf{k}|h).$$

并且, 自由表面位移  $\zeta(x, y, t)$  和自由表面速度势  $\psi(x, y, t)$  为两个 Hamilton 正则变量, 其 Fourier 变换依次为  $\hat{\zeta}(\mathbf{k}, t)$  和  $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$ . 另外,  $\rho$ ,  $g$  和  $\gamma$  分别表示海水密度、重力加速度和表面张力系数,  $h$  代表常水深.

\* 国家自然科学基金(批准号: 11172157)、上海市浦江人才计划(批准号: 12PJD001)、海洋工程国家重点实验室开放课题(批准号: 0903)和上海高校创新团队建设项目资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hhuang@shu.edu.cn

## 2 共振守恒

现在, 面对弱非线性波的“3-4-5 波相互作用”, 可对  $H$  实施满足“自然对称性”的积分幂级数五阶展开 (包含 9 项和 8 个系数), 并且相应地作亦满足“自然对称性”的积分幂级数四阶展开<sup>[8]</sup> (包含 13 项和 12 个系数) 之正则变换  $a = a(b, b^*)$ , 以此得到 1 个变换后的 Hamilton 函数  $\tilde{H}$  展开及其不变的 (1) 式之结构形式.

然后, 引进目前已获得证明的“表面张立波-重力波”之 1 个“3 波共振条件”<sup>[13]</sup> 和“表面重力波”之 1 个“4 波共振条件”<sup>[3,4]</sup>、2 个“5 波共振条件”<sup>[14]</sup>, 就可得到 4 个“共振条件”和“8 个非共振条件”, 以此确定上述正则变换的 12 个系数, 得以消除展开中所含有的 5 个非共振项, 最终获取下列“海洋表面张立波-重力波之 3-4-5 波共振”的展开及其正则方程:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \int \omega_0 b_0^* b_0 \, d\mathbf{k}_0 \\ & + \int \tilde{U}_{0,1,2}^{(1)} (b_0^* b_1 b_2 + b_0 b_1^* b_2^*) \delta_{0-1-2} \, d\mathbf{k}_{012} \\ & + \frac{1}{2} \int \tilde{V}_{0,1,2,3}^{(2)} b_0^* b_1^* b_2 b_3 \delta_{0+1-2-3} \, d\mathbf{k}_{0123} \\ & + \frac{1}{2} \int \tilde{W}_{0,1,2,3,4}^{(2)} (b_0^* b_1^* b_2 b_3 b_4 \\ & + b_0 b_1 b_2^* b_3^* b_4^*) \delta_{0+1-2-3-4} \, d\mathbf{k}_{01234}, \quad (2) \\ i \frac{\partial b_0}{\partial t} = & \omega_0 b_0 + \int [\tilde{U}_{0,1,2}^{(1)} b_1 b_2 \delta_{0-1-2} \\ & + 2\tilde{U}_{2,1,0}^{(1)} b_1^* b_2 \delta_{0+1-2}] \, d\mathbf{k}_{12} \\ & + \int \tilde{V}_{0,1,2,3}^{(2)} b_1^* b_2 b_3 \delta_{0+1-2-3} \, d\mathbf{k}_{123} \\ & + \int \left[ \tilde{W}_{0,1,2,3,4}^{(2)} b_1^* b_2 b_3 b_4 \delta_{0+1-2-3-4} \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \tilde{W}_{4,3,2,1,0}^{(2)} b_1^* b_2^* b_3 b_4 \delta_{0+1+2-3-4} \right] \\ & \times \, d\mathbf{k}_{1234}, \quad (3) \end{aligned}$$

其中, 各个因变量和系数的下标  $j$  代指自变量  $\mathbf{k}_j$ , 而下标 0 即谓  $\mathbf{k}$ . 例如,  $b_j = b(\mathbf{k}_j, t)$ ,  $\tilde{U}_{0,1,2}^{(n)} = \tilde{U}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ ,  $\delta_{0-1-2}$  表示 Dirac 函数  $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ . 另外,  $d\mathbf{k}_{012} = d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2$ , 各个积分号表示在整个  $\mathbf{k}$  平面从“ $-\infty$ ”到“ $+\infty$ ”的相应多重积分. 上述  $H$  和  $\tilde{H}$  的 16 个“积分幂级数展开”系数, 以及正则变换的 12 个“共振和非共振”系数, 所占篇幅甚众, 将另文详尽给出.

在方程 (2), (3) 的右端, 第一项表示两个恒等波的“自我共振作用”, 第二、三、四项则依次代表

相互作用的“3 波共振”、“4 波共振”、“5 波共振”. 它们合为一处, 则凸显出目前最富有内涵的“3-4-5 波相互作用”的高度聚焦共振效应. 方程 (3), 显著、必要地扩展了堪称水波发展史里程碑、确定性刻画、纯表面重力波之 4 波共振的 Zakharov 方程<sup>[5]</sup> 及其后续、典型的 Zakharov 型方程<sup>[6-9]</sup>.

如果一味地从水动力学表面波的控制方程组出发, 即使前方有那“两个正则变量”作牵引而得到与 (3) 式相似的方程<sup>[6,7]</sup>, 就必然也会发现: 该方程已“无对称性”可言, 直接导致水波系统的能量不守恒, 也即: 没有将水波系统“组装”成一个能量守恒的 Hamilton 结构. 如果拟想上述“水动力学过程”不至于“半途而废”, 可将前述相应的“对称共振条件”引入进来, 以成“正果”<sup>[15]</sup>.

自然地,  $H$  及其  $\tilde{H}$  所代表的能量守恒. 那么, 它们所蕴含的另外两大基本量——波动量、波作用量, 又当之若何? 在此, 可将其统一地表述为  $I = \int r_0 b_0 b_0^* \, d\mathbf{k}_0$ . 若  $r_0 = \mathbf{k}_0$ , 则  $I$  代表波动量; 若  $r_0 = 1$ , 则  $I$  代表波作用量. 从而, 由 (3) 式, 可得

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial I}{\partial t} = & 2 \int (r_0 - r_1 - r_2) \\ & \times \tilde{U}_{0,1,2}^{(1)} (b_0^* b_1 b_2 - b_0 b_1^* b_2^*) \delta_{0-1-2} \, d\mathbf{k}_{012} \\ & + \int (r_0 + r_1 - r_2 - r_3) \\ & \times \tilde{V}_{0,1,2,3}^{(2)} b_0^* b_1^* b_2 b_3 \delta_{0+1-2-3} \, d\mathbf{k}_{0123} \\ & + \int (r_0 + r_1 - r_2 - r_3 - r_4) \\ & \times \tilde{W}_{0,1,2,3,4}^{(2)} (b_0^* b_1^* b_2 b_3 b_4 - b_0 b_1 b_2^* b_3^* b_4^*) \\ & \times \delta_{0+1-2-3-4} \, d\mathbf{k}_{01234}. \quad (4) \end{aligned}$$

从而, 依据 3 波、4 波、5 波各自的共振条件可知: 3-4-5 波共振的波动量守恒; 4 波共振的波动量、波作用量均守恒, 而对于 3-5 波共振, 仅波动量守恒, 波作用量并不守恒.

如果欲要追求更多波以至无穷多波共振的波动量、波作用量的守恒态势, 就必须首先给出“更多波以至无穷多波的共振条件”. 这, 从何而来呢? 只能从海洋表面波特定的色散关系之凸性上和数学归纳法论证上而来.

## 3 结论

为逐步地破解地球海洋表面上时常乍现、可给近海工业、航运造成严重破坏的超常大振幅波——诡异波现象, 本文纳入了海洋表面完整的“张

立波-重力波”效应,涵盖了目前所论及的“3-4-5波”相互作用,将“对称性决定相互作用”的普适法则<sup>[16]</sup>充分、自然地运用于可反映海洋表面波实在结构的Hamilton函数构造及其正则方程中去,最终建立了目前最为富有的一个“海洋表面之3-4-5波Zakharov型方程共振守恒理论”。未来,可进一步将“非平整海底、海流”的效应,即要把海洋最为普遍、基本的“波-流-海底相互作用”动力机

理<sup>[11,17,18]</sup>纳入进来,以充分地从中彰显“一个海洋共振”的极大丰富多样性。最终,再推进到更为一般、实际的统计性描述、类同Boltzmann方程的Hasselmann型方程<sup>[4,19,20]</sup>中去。这将一举构筑海洋波湍流的新型框架理论体系,为具有极大普适性、可适用于所有物理领域(量子力学,天体力学…)的波湍流横向学科<sup>[20-23]</sup>又添加一个实实在在的范例。

- [1] Grue J, Trulsen K 2006 *Waves in Geophysical Fluids* (Berlin: Springer)
- [2] Dysthe K, Krogstad H E 2008 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40** 287
- [3] Phillips O M 1960 *J. Fluid Mech.* **9** 193
- [4] Hasselmann K 1962 *J. Fluid Mech.* **12** 481
- [5] Zakharov V E 1968 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9** 86
- [6] Yuen H C, Lake B M 1982 *Adv. Appl. Mech.* **22** 67
- [7] Stiassnime M, Shemer L 1984 *J. Fluid Mech.* **143** 47
- [8] Krasitskii V P 1994 *J. Fluid Mech.* **272** 1
- [9] Janssen P A E M 2004 *The Interaction of Ocean Waves and Wind* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [10] Dias F, Christian K 1999 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31** 301
- [11] Huang H 2009 *Dynamics of Surface Waves in Coastal Waters* (Beijing and Berlin: Higher Education Press and Springer)
- [12] Huang H, Xia Y B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044702 (in Chinese) [黄虎, 夏应波 2011 物理学报 **60** 044702]
- [13] McGoldrick L F 1965 *J. Fluid Mech.* **21** 305
- [14] McLean J W 1982 *J. Fluid Mech.* **114** 331
- [15] Mei C C, Stiassnime M, Yue D K P 2005 *Theory and Applications of Ocean Surface Waves* (Singapore: World Scientific)
- [16] Yang C N 1998 *Chen Ning Yang's Collection* (in Chinese) [杨振宁 1998 杨振宁文集 (上海: 华东师范大学出版社)]
- [17] Peregrine D H 1976 *Adv. Appl. Mech.* **16** 10
- [18] Chen Y Y, Hsu H C, Chang H K 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 034702 (in Chinese) [陈阳益, 许弘菡, 张宪国 2012 物理学报 **61** 034702]
- [19] Zakharov V 1999 *Eur. J. Mech. B/Fluids* **18** 327
- [20] Zakharov V E, L'vov V S, Falkovich G 1992 *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence* (Berlin: Springer)
- [21] Nazarenko S 2011 *Wave Turbulence* (Berlin: Springer)
- [22] Newell A C, Rumpf B 2011 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43** 59
- [23] Newell A C, Rumpf B, Zakharov V E 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 194502

# A theory of 3-4-5-wave resonance and conservation for ocean surface waves\*

Huang Hu<sup>†</sup>

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering, Shanghai University, Shanghai  
200072, China)

(Received 4 January 2013; revised manuscript received 18 January 2013)

## Abstract

With respect to the whole of two elemental waves in ocean surface, capillary and gravity waves, a deterministic, rich and fundamental theory of 3-4-5-wave resonance and conservation for ocean surface waves in a finite depth is developed, which presents fully the preciseness, symmetry and completeness as compared with a variety of the classical, modern results, and provides an indispensable basis for the succeeding and universal statistical theory of ocean wave turbulence.

**Keywords:** ocean surface waves, Hamiltonian description, 3-4-5-wave resonance, wave turbulence

**PACS:** 92.10.Hm, 47.10.Df, 47.35.Bb, 47.35.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.139201

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11172157), the Shanghai Pujiang Program, China (Grant No. 12PJD001), the State Key Laboratory of Ocean Engineering (Shanghai Jiao Tong University) of China (Grant No. 0903), and the Shanghai Program for Innovative Research Team in Universities, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: hhuang@shu.edu.cn