

## X 射线脉冲星自主导航的观测方程\*

周庆勇<sup>†</sup> 姬剑锋 任红飞

(地理信息工程国家重点实验室, 西安 710054)

(西安测绘研究所, 西安 710054)

(2012 年 11 月 15 日收到; 2013 年 3 月 11 日收到修改稿)

在分析脉冲时间相位模型 (pulse timing model) 的意义和研究已有观测方程结论的基础上, 对脉冲到达时间 (TOA) 所含各种效应进行了解析, 推导建立了一阶后牛顿近似下光子到达时间转换方程, 与一些作者的结果进行比较讨论; 同时推导出航天器在三种类型轨道下质心坐标时与航天器原时转换公式. 通过程序实现了推导的观测方程对 X 射线脉冲星空间观测数据处理的功能, 并利用 RXTE 卫星观测数据进行验算, 搜索出正确的脉冲星周期, 折叠出准确的脉冲轮廓, 验证了本文观测方程的正确性, 并与 Heasoft 软件计算结果进行对比分析, 最后分析了脉冲星位置误差与行星历表误差对数据处理的影响.

**关键词:** 太阳系质心, 时间相位模型, Crab 脉冲星, 引力时延

**PACS:** 97.60.Gb, 07.05.kf

**DOI:** 10.7498/aps.62.139701

## 1 引言

X 射线脉冲星, 特别是毫秒脉冲星, 其辐射流量密度强且自转频率极其稳定, 被誉为宇宙中的“灯塔”<sup>[1]</sup>. 若航天器能够同时记录来自多颗不同方向的 X 射线脉冲星辐射的光子, 可实现航天器自主导航, 因而 X 射线脉冲星自主导航受到国际上极大的关注, 美国国防部于 2004 年 8 月开始实施了“基于 X 射线源的自主导航定位计划 (XNAV)”, 其他航天强国如德国等也相继提出了类似的计划<sup>[2]</sup>.

观测方程是脉冲星观测数据处理的理论基础. 基于 X 射线脉冲星的航天器自主导航中, 观测方程的精度直接决定了航天器自主导航能力, 也影响着脉冲星星表参数的精化<sup>[3]</sup>. 为了实现高精度的脉冲星导航, 需要对脉冲星观测数据中所含的各种效应做出合理的解析, 建立恰当的高精度观测方程<sup>[4]</sup>.

观测方程的精度伴随着理论发展和观测精度提高而提高. 早期天文研究学者主要从事于脉冲星信号的计时分析, 主要研究集中于对地基望远镜记录信号的到达时刻进行改正得到高精度的观测

量<sup>[1]</sup>. 随着观测设备的升级、信号处理技术的发展, 广义相对论效应成为必需考虑的因素, 建立相对论框架下观测方程是对观测数据进行高精度处理的前提. 国外学者为了处理地基射电望远镜和空间天文卫星的观测数据, 分析了脉冲星信号传播过程中各种效应, 推导建立实用观测方程的表达式, 并完成了相应的数据处理软件<sup>[5-9]</sup>. 为了实现高精度的脉冲星导航, Sheikh 推导了包括高阶相对论效应的观测方程, 并与其他观测方程进行比较分析<sup>[10]</sup>. 同时, 我国学者对脉冲星导航的观测方程做了大量研究<sup>[11]</sup>, 在对脉冲星观测数据进行解析分析同时<sup>[4]</sup>, 推导了高阶的脉冲星信号到达时间转换方程<sup>[2,3,12]</sup>, 并研究了脉冲星观测中高阶相对论效应<sup>[13]</sup>. 此外, 大多数毫秒脉冲星属于脉冲双星系统, 脉冲双星系统中脉冲星的观测方程由于使用不同的轨道动力学理论对脉冲星轨道建模并考虑了伴星的相对论效应影响而复杂<sup>[14]</sup>, 本文不讨论. 当前国内大多数研究学者使用的观测方程主要参考了 Sheikh 推导的公式, 并开展了地面仿真系统研制等研究<sup>[15,16]</sup>, 然而 Sheikh 公式的正确性受到置疑<sup>[4,12]</sup>; 同时不同的观测方程精度各异, 有些难于满足高精度脉冲星

\* 国家自然科学基金 (批准号: 41004013, 41174025, 41204020) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: zljzy1986@163.com

导航需要. 本文在分析已有研究结论基础上, 详细推导适用于脉冲星导航的 1 PN 度规形式下观测方程, 编制观测数据的处理软件, 对 RXTE 卫星的观测数据进行验算, 并与 Heasoft 软件计算结果进行比较, 验证观测方程的正确性.

## 2 X 射线脉冲星导航的观测方程

X 射线脉冲星自主导航的基本原理是将航天器接收到的 X 射线光子到达时间 (TOA) 转换到脉冲计时模型 (pulse timing model) 定义的原点处, 并与该脉冲计时模型的预报值组成差分方程. 与卫星导航定位原理相似, 同时观测四颗脉冲星, 即可解算航天器的位置与钟差. 可见, 观测数据的处理是脉冲星导航的基础, 主要研究内容包括三个方面: 脉冲计时模型、光子到达时间转换、质心坐标时与航天器原时的转换.

### 2.1 脉冲计时模型

X 射线脉冲星可以用来实现航天器自主导航, 根本前提是脉冲星具有极其稳定的自转频率, 并且以很高的精度进行预报. 由于脉冲星非常稳定的固有规律, 脉冲星自转机制可以建模. 模型常常描述为一段时间内所有光子累积的相位, 整个相位  $\Phi(t)$  可以表示为脉冲周期的小数部分  $\phi(t)$  和整数倍  $N(t)$ ,

$$\Phi(t) = \phi(t) + N(t). \quad (1)$$

基于每个脉冲星的自转频率, 脉冲计时模型可表示为

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \Phi(t_0) + f \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \dot{f} \cdot (t - t_0)^2 \\ & + \frac{1}{6} \ddot{f} \cdot (t - t_0)^3 + O(f), \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式反映了脉冲星的自转规律, 也称为脉冲星自旋方程或脉冲星自转变慢规律. 观测时间  $t$  为脉冲信号到达航天器的坐标时,  $t_0$  为模型参数的参考历元,  $\Phi(t_0)$  为初始相位. 高阶自转频率导数常常被用来描述一些极其稳定的脉冲星, 对于双星系统中脉冲星的自转运动规律应该使用包括脉冲星轨道周期参数的脉冲计时模型描述. 脉冲计时模型的意义在于能够以很高的精度对脉冲到达时间进行预报, 在脉冲星导航中, 脉冲计时模型的精度直接影响着导航定位结果.

为了建立高精度的脉冲计时模型, 必须定义精确处理光子到达时间 (TOA) 的分析模型, 接下来的观测可以使用相同的方法精确地测量和处理每个光子的 TOA. 同时为了减弱分析方法的复杂性, 对脉冲星观测量的处理应该选择在一个相对脉冲星框架稳定的无旋的惯性参考架中. 对于太阳系内的观测事件, 基本的参考框架为太阳系质心坐标框架, 其原点为太阳系质心 (SSB), 参考时间尺度为 TCB. 脉冲星计时数据的处理同样在太阳系质心参考框架中, 脉冲计时模型的原点也定义在 SSB 处, 故需将光子到达航天器的时间转换至 SSB 处. 根据引力理论, 还需将航天器记录的原时转换成质心坐标时. 下面我们重点讨论高精度光子到达时间的转换和航天器原时与质心坐标时的变换.

### 2.2 光子到达时间转换

X 射线脉冲星用于航天器自主导航, 需要考虑脉冲星信号到达航天器和 SSB 处之间的几何效应和相对论效应的影响, 建立脉冲光子到达时间转换方程. 根据广义相对论理论, 电磁信号在时空中传播的世界线为零测地线, 其时空间隔为零,

$$\begin{aligned} ds^2 = & -c^2 d\tau^2 = g_{00} c^2 dt^2 + 2 \sum_{j=1}^3 g_{0j} c dt dx^j \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

对于低速近似平直空间的太阳引力场, IAU 在第 24 届决议中推荐使用后牛顿度规描述<sup>[2,17]</sup>, 该度规满足线性叠加原理

$$\begin{aligned} g_{00} = & -1 + \frac{2U}{c^2} - \frac{2U^2}{c^4}, \\ g_{0i} = & -\frac{4}{c^3} U^i, \\ g_{ij} = & \delta_{ij} \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $U, U^i$  分别是太阳系引力场的标势和矢势. 忽略太阳系天体非均质球体和自转影响的情况下<sup>[12]</sup>,  $U = \sum_{i=1}^p \frac{GM_i}{r_i}$ . 同时由于矢势的影响较小, 在此忽略不计<sup>[12]</sup>.

假定太阳系外引力场在几十年内不会发生变化, 仅考虑太阳系以内大天体的一阶后牛顿效应, 1 阶后牛顿度规形式下 X 射线光子的时空间隔为

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = - \left( 1 - \frac{2U}{c^2} \right) c^2 dt^2$$

$$+ \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0. \quad (5)$$

将上式按级数展开至一阶项, 可得

$$cdt = (1 + 2U/c^2) \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (6)$$

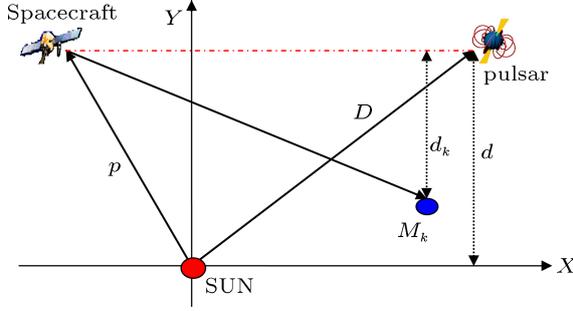


图1 脉冲星信号空间传播示意图

对 (6) 式沿着脉冲星光子传播路径积分, 可建立脉冲星信号辐射时刻与到达时间的关系. 脉冲星光子空间传播路径如图 1 所示, 为了研究问题的方便, 建立如此一个坐标系: 以太阳系质心、脉冲星和飞行器三点确定的  $XY$  平面, 原点位于太阳质心,  $X$  轴平行于脉冲星光子的传播方向,  $Y$  轴垂直于  $X$  轴,  $Z$  轴按右手定则确定.

忽略太阳以外其他天体的引力弯曲效应, 在太阳系的引力场中, 类光测地线的方程如下 [7]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \frac{GM_S}{c^2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1/2}, \quad (7)$$

式中  $GM_S$  为太阳引力常数,  $c$  为真空中光速. 考虑初始条件: 当  $x = D_x$ ,  $y = d$  且  $dy/dx = 0$ .  $D_x$  为  $D$  在  $X$  轴上的分量,  $D$  是  $D$  的标量,  $D$  是太阳质心至脉冲星的位置矢量,  $d$  为太阳质心至光子传播路径的距离. 光子传播路径的一阶近似摄动解为 [7]

$$y = d + 2 \frac{GM_S}{c^2} \times \left[ D - (x^2 + d^2)^{1/2} + (x - D_x) \frac{D_x}{D} \right]. \quad (8)$$

对上式进行微分,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2GM}{dc^2} \left[ \frac{D_x}{D} - \frac{x}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \right]. \quad (9)$$

对 (6) 式沿着光子传播路径进行积分, 由于脉冲星光子的传播路径在  $XY$  平面内, 故  $z = 0$ , 并考虑  $dy/dx$  的关系, 可得

$$c \int_{t_{SC}}^{t_P} dt = \int_{P_x}^{D_x} \left( 1 + \frac{2GM_S}{(x^2 + y^2)^{1/2} \cdot c^2} \right.$$

$$\left. + \sum_{k \neq S} \frac{2GM_k}{((x - x_k)^2 + d_k^2)^{1/2} \cdot c^2} + \frac{2G^2 M_S^2}{d^2 c^4} \left[ \frac{D_x}{D} - \frac{x}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \right]^2 \right) dx, \quad (10)$$

式中,  $GM_k$  为太阳系天体  $M_k$  的引力常数,  $x_k$  是天体  $M_k$  距离太阳质心距离的  $X$  轴方向分量、 $d_k$  是天体  $M_k$  距离光子传播路径的距离. 由图 1 可知,  $\sqrt{(x_{SC} - x_k)^2 + d_k^2} = p_k$  为航天器相对于天体  $M_k$  的位置,  $|x_{SC} - x_k| = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_k$ ,  $\mathbf{n}$  为脉冲星的单位位置矢量.

对 (10) 式中各项分别积分, 可得脉冲星光子的传播时间

$$c(t_P - t_{SC}) = |D - p| - 2 \sum_{k=1}^S \frac{GM_k}{c^2} \ln \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_k + p_k}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_k + D_k} \right) + \frac{2G^2 M_S^2}{d^2 c^4} \left[ \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}}{D} \right)^2 \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{p}) + 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) \left( \frac{p}{D} - 1 \right) + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{p}) - d \cdot \left( \arctan \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}}{d} \right) - \arctan \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{d} \right) \right) \right], \quad (11)$$

式中  $t_P$  为脉冲星光子辐射时刻,  $t_{SC}$  为脉冲星光子到达时刻,  $\mathbf{p}$  是航天器在光子到达时刻相对于太阳系质心的位置矢量,  $\mathbf{D}_k$  为天体  $M_k$  相对于脉冲星的位置矢量,  $p$ ,  $D_k$  是相应矢量的标量. (11) 式给出脉冲星光子辐射的坐标时与航天器接收脉冲星光子的坐标时关系, 最后一项为太阳引力弯曲, 其影响小于 1 ns, 忽略不计 [3]. SSB 是太阳系内引力中心, 忽略脉冲星本征坐标框架与太阳系坐标框架的变换, 并假定太阳系外引力场在长期时间内保持不变, 脉冲星光子到达 SSB 处的传播时间为脉冲星光子的真空传播时间与太阳系内天体的引力时延之和, 为了使引力时延的对数项无量纲化, 对数项内除以 1 天文单位 (AU), 由此可得

$$c(t_P - t_{SSB}) = D - 2 \sum_{k=1}^S \frac{GM_k}{c^2} \ln \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_k + D_k}{AU} \right), \quad (12)$$

式中,  $t_{SSB}$  为脉冲星光子到达 SSB 的时间.

忽略太阳的引力弯曲影响, 将 (11) 式与 (12) 式求差可得航天器处到达时间 (TOA) 与 SSB 处 TOA 的转换方程

$$c(t_{SSB} - t_{SC}) = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})$$

$$-2 \sum_{k=1}^S \frac{GM_k}{c^2} \ln \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_k + p_k}{AU} \right), \quad (13)$$

式中  $|\mathbf{D} - \mathbf{p}| - D \approx -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})$ . 观测序列  $t_{SC}$  转换为太阳系质心到达时间  $t_{SSB}$  只需考虑脉冲星光子在两者之间的传播效应, 包括几何效应和相对论效应. 实际上, 无论是地面射电观测还是航天器自主导航中观测数据的处理, 都是从观测序列中扣除所包含的可描述部分, 然后从残差序列中寻找规律, 构建变化模型, 解算模型参数<sup>[4]</sup>, 故导航用观测方程和地面射电观测用观测方程在本质上是一样的.

下面推导了脉冲星自行  $\mathbf{V}$  对到达时间转换的影响,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{V} \cdot \Delta t$ ,  $\mathbf{D}_0$  是脉冲星的初始位置,  $\Delta t$  为脉冲星观测历元与初始历元之差. 可得

$$\begin{aligned} c(t_{SSB} - t_{SC}) = & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) + \frac{1}{2D_0} |\mathbf{n} \times \mathbf{p}|^2 \\ & - \frac{1}{D_0} [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})] \Delta t \\ & - 2 \sum_{k=1}^S \frac{GM_k}{c^2} \ln \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_k + p_k}{AU} \right). \quad (14) \end{aligned}$$

很多研究学者推导了脉冲星到达时间转换公式<sup>[1-12]</sup>, 公式与 (14) 式基本相同, 主要差距集中于公式中最后一项 Shapiro 时延项. 其中 Sheikh 论文中公式存在较大争议<sup>[1]</sup>, 忽略周年视差、太阳系的引力弯曲和脉冲星自行的影响, 并将 Sheikh 公式转换成本文的符号系统, 其公式为<sup>[1,10]</sup>

$$c(t_{SSB} - t_{SC}) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - 2 \sum_{k=1}^S \frac{GM_k}{c^2} \ln \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_k + p_k}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_k + b_k} \right), \quad (15)$$

式中  $\mathbf{b}_k$  为 SSB 距离太阳系内天体  $M_k$  的位置矢量,  $b_k$  为其标量. 由于  $\mathbf{p}_k = \mathbf{b}_k + \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}$  为航天器相对于 SSB 处的位置矢量,  $r$  为相应的标量. Sheikh 进一步推导得到<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned} c(t_{SSB} - t_{SC}) \\ = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - 2 \sum_{k=1}^S \frac{GM_k}{c^2} \ln \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + r}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_k + b_k} + 1 \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Sheikh 由 (15) 式推导 (16) 式时, 错误地认为  $p_k = b_k + r$ , 实际上,  $b_k + r > p_k$ . Sheikh 在后来的文章中纠正了该公式, 并采用 (15) 式<sup>[10]</sup>. 对比 (13) 式和 (15) 式, 两者主要的差距在于 SSB 处的引力时延. SSB 是太阳系内所有质量中心, 即引力中心, 而由 (15) 式得到的 SSB 处到达时间包含 SSB 的引力时延影响, 同时 SSB 经常处于太阳内部, SSB 处的引力时延是一个不可观测量<sup>[4]</sup>. 正如前面讨论, 脉

冲计时模型是建立在真空 SSB 处, X 射线到达时间转换方程不应该是较差的概念, 而是考虑脉冲星光子到达地球比到 SSB 处多受到几何和相对论效应, 并建立相应模型, 进行扣除即可. 实际上, 无论是处理地面射电观测数据的 Tempo2 软件还是处理空间 X 射线观测卫星 RXTE 观测数据的 Heasoft 软件都是这样的过程.

赵铭在文献 [4] 指出将脉冲星导航的观测量转换为质心瞬间, 目的是去除不属于脉冲星固有变化的因素, 从而可以建立脉冲相位模型, 用于脉冲星导航. 对于太阳系以外的观测事件应该使用质心瞬间, 特别是脉冲星信号的时变性研究<sup>[8]</sup>, Murry 特别指出观测事件的质心瞬间不同于光子到达质心的时间时刻<sup>[8]</sup>. 实际上, 光子的质心瞬间就是对光子到达 SSB 处的时间扣除 SSB 处引力时延之后的时间.

### 2.3 质心坐标时与航天器原时的转换

前面讨论的光子到达时间  $t$  为 BCRS 的坐标时, 而在 X 射线脉冲星自主导航中, 真实记录的光子到达时间是由航天器携带的原子钟进行计时, 即航天器的固有时间, 也称原时  $\tau$ , 需将原时转换成质心坐标时.

对于地球附近的航天器 (O), 航天器的位置和速度  $(\mathbf{r}_{OS}, \dot{\mathbf{r}}_{OS})$  为地球质心相对于 SSB 的位置和速度  $(\mathbf{r}_{ES}, \dot{\mathbf{r}}_{ES})$  与航天器相对于地球质心的位置和速度  $(\mathbf{r}_{OE}, \dot{\mathbf{r}}_{OE})$  之和,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{OS} &= \mathbf{r}_{OE} + \mathbf{r}_{ES}, \\ \mathbf{v}_{OS} &= \dot{\mathbf{r}}_{OE} + \dot{\mathbf{r}}_{ES}. \end{aligned} \quad (17)$$

同理, 航天器的引力位  $U(\mathbf{r})$  为地球的引力位  $U_E(\mathbf{r}_{OE})$  及太阳系内其他引力位  $U_S(\mathbf{r}_{OS})$  之和, 将  $U_S(\mathbf{r}_{OS})$  展开成以地球质心距离的泰勒多项式, 保留其主要的影响项, 而忽略的引力位对地球附近空间的时钟影响小于  $10^{-16}$  量级<sup>[7]</sup>.

$$U(\mathbf{r}) = U_S(\mathbf{r}_{ES}) + \nabla U_S \cdot \mathbf{r}_{OE} + U_E(\mathbf{r}_{OE}). \quad (18)$$

忽略太阳加速度的影响,  $U_S$  的变化率为  $\ddot{\mathbf{r}}_{ES}$ . 由脉冲星光子的零测地线方程可知,

$$d\tau = \left( 1 - \frac{U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) dt. \quad (19)$$

将 (17) 式和 (18) 式代入上式, 假设星载钟的开始时间为  $\tau_0$  时, 坐标时为  $t_0$ , 进一步可得

$$\tau = t - \frac{1}{c^2} \int_0^t (U_S(\mathbf{r}_{ES}) + \ddot{\mathbf{r}}_{ES} \cdot \mathbf{r}_{OE} + \dot{\mathbf{r}}_{OE} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{ES}) dt$$

$$+U_E(\mathbf{r}_{OE}) + \frac{(\dot{r}_{OE}^2 + \dot{r}_{ES}^2)}{2} \Big) dt'. \quad (20)$$

在只考虑保守力的作用下,地球绕太阳作椭圆轨道运动.忽略地球公转的高阶不均匀性,对于椭圆轨道,由能量积分方程(活力公式)可得

$$v_{ES}^2 = \mu_S \left( \frac{2}{r_{ES}} - \frac{1}{a_{ES}} \right) = 2U_S - \frac{\mu_S}{a_{ES}}, \quad (21)$$

式中,  $a_{ES}$  为地球绕太阳作椭圆运动的长半轴.同时考虑到

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{ES} \cdot \mathbf{v}_{ES}) = v_{ES}^2 - U_S(\mathbf{r}_{ES}), \quad (22)$$

故

$$U_S(\mathbf{r}_{ES}) + \frac{v_{ES}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{\mu_S}{a_{ES}} + 2 \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{ES} \cdot \mathbf{v}_{ES}). \quad (23)$$

航天器绕着地球椭圆运动,同理可得

$$U_E(\mathbf{r}_{OE}) + \frac{v_{OE}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{\mu_E}{a_{OE}} + 2 \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{OE} \cdot \mathbf{v}_{OE}), \quad (24)$$

式中  $\mu_E = GM_E$  为地球的引力常数,  $a_{OE}$  为航天器轨道的长半轴.

将 (23) 和 (24) 式代入 (20) 式并积分可得

$$\begin{aligned} \Delta\tau = & \left( 1 - \frac{3}{2c^2} \left( \frac{\mu_S}{a_{ES}} + \frac{\mu_E}{a_{OE}} \right) \right) \Delta t \\ & - \frac{1}{c^2} [(\dot{\mathbf{r}}_{ES}(t_0 + \Delta t) \cdot \mathbf{r}_{OE}(t_0 + \Delta t) \\ & + 2(\mathbf{r}_{OE}(t_0 + \Delta t) \cdot \mathbf{v}_{OE}(t_0 + \Delta t) \\ & + \mathbf{r}_{ES}(t_0 + \Delta t) \cdot \mathbf{v}_{ES}(t_0 + \Delta t))] \\ & + \frac{1}{c^2} [(\dot{\mathbf{r}}_{ES}(t_0) \cdot \mathbf{r}_{OE}(t_0) + 2(\mathbf{r}_{OE}(t_0) \cdot \mathbf{v}_{OE}(t_0) \\ & + \mathbf{r}_{ES}(t_0) \cdot \mathbf{v}_{ES}(t_0))], \quad (25) \end{aligned}$$

式中  $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ ,  $\Delta t = t - t_0$ .

(25) 式中等号右边第一项为长期项的影响,第二项为周期项影响,包括卫星轨道运动和地球绕太阳的轨道运动.在实际的工程应用中,为了避免星载时钟相对于质心坐标时的长期漂移,应对星载时钟在发射前进行频率调整.假设星载时钟的基准频率为  $f_0$ ,则在发射前应将其频率调整为

$$f = (1 - k)f_0. \quad (26)$$

如果忽略星载时钟的非线性变化,那么  $k = \frac{3}{2c^2} \left( \frac{\mu_S}{a_{ES}} + \frac{\mu_E}{a_{OE}} \right)$ . 对于 GPS 卫星轨道,采用 IERS2003 规范中的天文常数,计算可得  $k = 1.509788796367 \times 10^{-8}$ . 假设星载时钟基准频率为 10.23 MHz,那么卫星发射前,需将其基准频率值调小约 0.154451 Hz.

需要注意的是,当航天器距离地球比较远时,地球的引力作用较小,需要考虑其他星体的引力作用.当航天器进入其他星体的作用半径时,主要考虑该星体的引力作用.

大多数航天器的运行轨道是椭圆轨道,但一些卫星实现变轨等运动,可能是双曲线轨道或者是抛物线轨道<sup>[18]</sup>,推导过程与前面类似,下面直接给出公式.

对于双曲线轨道,航天器时钟与质心坐标时的转换关系为

$$\begin{aligned} \tau = & \left( 1 - \frac{3}{2c^2} \left( \frac{\mu_S}{a_{ES}} - \frac{\mu_E}{a_{OE}} \right) \right) t \\ & - \frac{1}{c^2} (\dot{\mathbf{r}}_{ES} \cdot \mathbf{r}_{OE} + 2(\mathbf{r}_{OE} \cdot \mathbf{v}_{OE} + \mathbf{r}_{ES} \cdot \mathbf{v}_{ES})). \quad (27) \end{aligned}$$

对于抛物线轨道,航天器时钟与质心坐标时的转换关系为

$$\begin{aligned} \tau = & \left( 1 - \frac{3}{2c^2} \frac{\mu_S}{a_{ES}} \right) \cdot t \\ & - \frac{1}{c^2} \left( \dot{\mathbf{r}}_{ES} \cdot \mathbf{r}_{OE} + 2\mathbf{r}_{ES} \cdot \mathbf{v}_{ES} \right. \\ & \left. - 2\sqrt{\mu_S \cdot P} \cdot \left( \tan \frac{f}{2} - \tan \frac{f_0}{2} \right) \right), \quad (28) \end{aligned}$$

式中  $P$  为抛物线轨道半通径,  $f$  为坐标时  $t$  航天器的真近点角,  $f_0$  为初始时刻的航天器的真近点角.

### 3 算例及分析

前面详细推导了 X 射线脉冲星导航的观测方程,本节将利用编制的程序实现对 RXTE 卫星观测数据的处理,搜索脉冲星周期,折叠脉冲轮廓,并与 Heasoft 软件的结果比较,以验证观测方程的正确性.

#### 3.1 算例

RXTE 卫星是迄今为止唯一在 X 射线波段探测到 X 射线源微秒量级光变的天文卫星<sup>[19]</sup>.RXTE 卫星于 1995 年 12 月 30 日升空,并在轨运行 16 年. RXTE 是一颗低轨卫星,其轨道周期约为 100 min. 为了研究致密天体及星系系统的 X 射线辐射在各种时标上的特征, RXTE 采用了大面积、高时间分辨率、覆盖范围较广的正比计数器阵列 (PCA)<sup>[18]</sup>. PCA 是 RXTE 的一个主探测器,其全部有效面积为 6500 cm<sup>2</sup>,探测能量范围 2—60 keV,时空分辨率为 1  $\mu$ s,其观测资料由 Heasoft 软件进行处理.本算例共

使用三组 RXTE 观测 Crab 脉冲星 (PSRB0531+21) 的观测数据, 观测数据的时间尺度为 TT, 时间跨度为七年, 三组观测数据的基本信息见表 1.

表 1 三组 Crab 脉冲星观测资料情况

组数	起始时间 (MJD)	结束时间 (MJD)	时间分辨率/ $\mu\text{s}$	总光子数
1	50529.4921781	50529.4994653	16	3467437
2	51530.4290718	51530.4604535	16	7036594
3	53300.7012940	53300.7109237	250	3961671

Crab 脉冲星是一颗年轻的脉冲星, 是超新星的遗迹, 其直径大约 25 km. Crab 脉冲星是一颗在既在射电波段又在 X 射线波段具有辐射的脉冲星, X 射线辐射流量密度为  $1.54 \text{ ph/cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , 且有稳定的

脉冲星周期和脉冲星轮廓, 故 Crab 脉冲星是一颗不可多得的导航用脉冲星星源. Crab 脉冲星的基本参数如表 2.

表 2 Crab 脉冲星的参数信息

赤经	赤纬	周期/s	周期导数/(s/s)	距离/kpc
05 : 34 : 31.973	22 : 00 : 52.06	0.03308471603	$4.22765 \times 10^{-13}$	0.7

\* 周期参数的参考历元为 240000.00.

利用第 2 节推导的 X 射线脉冲星导航观测方程, 编制了观测数据的处理软件, 实现了对三组 Crab 脉冲星观测数据的处理, 同时使用 Heasoft 软件同样可以得到 SSB 处光子到达时间序列, 从而折叠出脉冲星轮廓, 搜索出脉冲星周期, 见图 2, 表 3.

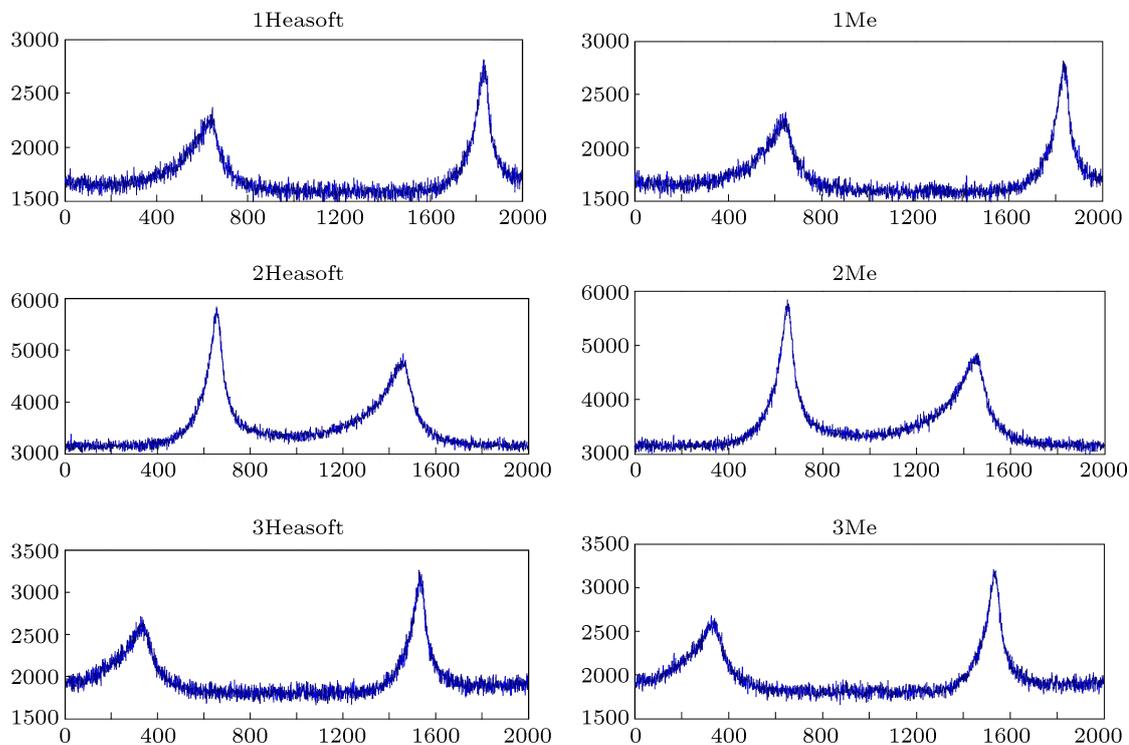


图 2 三组 Crab 脉冲星轮廓示意图

图 2 中, 左边三个图是基于 Heasoft 软件计算结果折叠出的脉冲星轮廓, 右边是基于本文算法处理得到数据折叠出的脉冲星轮廓. 每个子图的横轴表示为一个周期分成 2000 Bins, 纵轴代表每个 Bins 中的光子数. 由左右三组图对比可知, 两者脉冲星轮廓基本相同, 差距较小.

Crab 脉冲星是一颗年轻的脉冲星, Arecibo 射电望远镜对其进行长期监测研究, 从 1982 年起, 每月都发布 Crab 脉冲星的星历 [20,21]. 利用 Crab 脉冲

星星历插值得到计算时刻脉冲星自转频率, 并与基于 Heasoft 软件、本文算法计算得到的数据搜索出 Crab 脉冲星自转频率进行比较.

表 3 三种方法计算得到脉冲星自转频率

MJD	CrabEph	Heasoft	Me
50529.49	29.87902832	29.87902637	29.87902992
51530.44	29.84659275	29.84659225	29.84658947
53300.70	29.78940505	29.78940609	29.78940335

由表 3 可知, 由三种方法得到三个时刻的脉

冲星自转频率互差小于  $3 \times 10^{-6}$  Hz. 需要说明的是, Heasoft 软件解算过程中使用的太阳系行星历表是 DE200, Crab 星历中频率求解也是使用 DE200, 而本文的程序解算过程使用的太阳系行星历表为 DE405. 两者对计算结果的影响将在下面讨论.

### 3.2 分析

主要分析了本文算法计算结果与 Heasoft 计算结果的差距及可能产生原因, 并研究了脉冲星位置误差、行星历表误差对数据处理的影响.

#### 1) 与 Heasoft 软件计算结果比较分析

在第一组观测数据中选择一段约 20 s 50000 个光子到达时间序列, 使用本文算法计算得到 SSB 处到达时刻, 并与 Heasoft 软件计算结果比较, 见图 3.

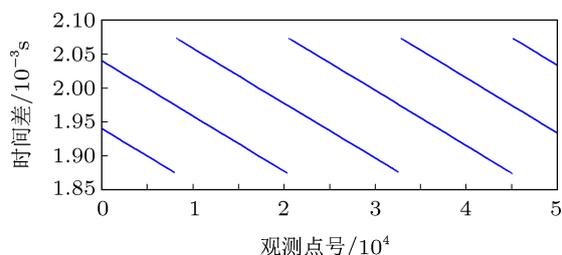


图3 本文算法与 Heasoft 计算结果的差距

由图 3 可得, 本文算法与 Heasoft 软件计算结果的差异范围为  $(1.85—2.1) \times 10^{-3}$  s, 呈一定的周期性变化, 主要原因是两者处理过程考虑的模型不同.

(a) 在引力时延方面. 本文算法考虑了太阳系内所有大天体的引力时延, 而 Heasoft 软件只考虑了太阳的引力时延. 两者计算天体引力时延使用的公式也略有差距.

本文算法使用的引力时延公式

$$\Delta t = -2 \sum_{k=1}^S \frac{GM_k}{c^3} \ln \left( \frac{p_k}{AU} (\cos \theta + 1) \right), \quad (29)$$

式中,  $\cos \theta = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{p}}_k)$ ,  $\theta$  是观测时刻脉冲星-太阳-航天器的夹角,  $\hat{\mathbf{p}}_k$  是  $\mathbf{p}_k$  的单位矢量. Heasoft 软件计算引力时延使用的公式为

$$\Delta t = -2 \frac{GM_S}{c^3} \ln((\cos \theta + 1)). \quad (30)$$

(29) 式与 (30) 计算太阳引力时延差距为  $10^{-7}$  s 量级. 由 (29) 式计算可得太阳系内所有大天体的引力时延和, 见图 4. 太阳系天体的引力时延范围约为  $(-6—12) \times 10^{-6}$  s, 呈周年性变化. 其中太阳与木星的引力时延最大, 约为  $10^{-6}$  s,  $10^{-8}$  s 量级, 而其

他天体的引力时延都小于  $10^{-8}$  s, 在脉冲星导航的观测方程中, 可只考虑太阳和木星的引力时延.

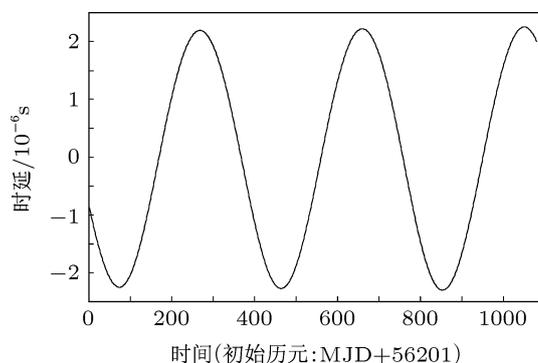


图4 太阳系天体的引力时延

(b) 行星历表方面, 本文算法使用的太阳系行星历表为 DE405, 而 Heasoft 软件使用的是 DE200. DE405 与 DE200 的坐标差异最大可达几十公里 (可见图 6), 且具有一定的系统性. 不同行星历表的差异是两者计算结果差异的主要来源, 下节将对行星历表进行分析.

(c) RXTE 卫星的轨道精度不高. 数据库提供的轨道文件是根据某些高精度的轨道值进行外推得到的, 相邻文件提供的卫星轨道差可达数百米. RXTE 卫星的轨道精度为公里级 [22], 其带来的计时误差约为 10 ms.

#### 2) 脉冲星位置误差的影响

高精度的脉冲星星表是 X 射线脉冲星导航的基础, 星表误差对脉冲星导航性能具有重要的影响. 忽略脉冲星距离、自行和太阳系天体引力时延的影响, 由 (14) 式可得脉冲星位置误差对观测数据处理的影响:

$$\mathbf{c} \cdot \Delta \mathbf{t} = d\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, \quad (31)$$

式中

$$\mathbf{n} = (\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta),$$

$$d\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\cos \delta \sin \alpha & -\sin \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha \\ 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\delta \end{bmatrix},$$

其中  $\alpha, \delta$  分别是脉冲星的位置 (赤经、赤纬). 由 (31) 式可见, 脉冲星方向误差  $d\mathbf{n}$  被航天器太阳系质心位置  $\mathbf{r}$  (主要项是地球的质心位置  $\mathbf{r}_E$ ) 所调制,  $\mathbf{r}_E$  是周年项, 所以  $d\mathbf{n}$  对观测数据处理的影响就必然是周年项. 目前, VLBI 观测脉冲星的位置精度大部分在 1 毫角秒水平, 小部分脉冲星的位置精度可

达 0.1 毫角秒. 假设 Crab 脉冲星位置误差为 1 毫角秒, 其对数据处理的影响, 如图 5 所示.

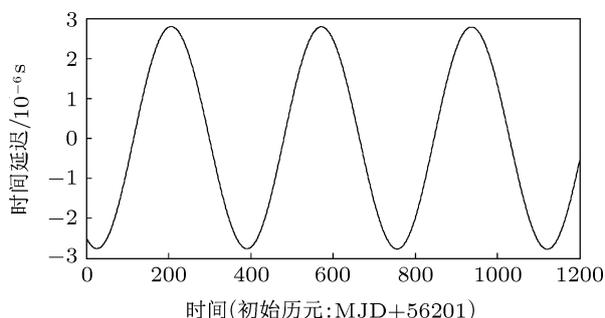


图 5 脉冲星位置误差对 TOA 时间转换的影响

由图 5 可知, 1 毫角秒的位置误差对 TOA 时间转换的影响约在  $10^{-6}$  s 水平, 并呈周年性变化. 基于现有 VLBI 基础设施的局限性和日益增长的空间大地测量要求, 国际天文年会将开展 VLBI 现代化研究, 即 VLBI2010, VLBI2010 的目标实现星源位置的观测精度可达 0.01 毫角秒. 可见, 脉冲星位置

误差对数据处理的影响降低两个数量级, 有利于导航精度提高.

### 3) 行星历表误差的影响

目前, JPL 行星星历广泛应用于大部分天文精密观测与归算. 随着人类对太阳系内部结构认识精确度的发展, 美国喷气推进实验室 (JPL) 相继发布一系列的精密行星星历. 为分析不同的行星历表对数据处理的影响, 选择 DE200, DE405, DE423 三个行星星历, 而观测目标为 Crab 脉冲星, 不同行星星历在相同历元对数据处理影响的差值见图 6.

由图 6 可知, 对于 Crab 脉冲星, DE200 与 DE405, DE423 对 TOA 时间转换结果的影响差异可达毫秒量级; DE423 与 DE405 之间的差异较小, 约在微秒量级. 相比于 DE200, 编制 DE405 用到的观测数据类型更多, 观测时间更长, 观测精度更高. 而编制 DE423 的观测数据库增加了各种深空探测器 and 行星轨道器对太阳系内外行星的观测数据等. 可见, 行星星历的精化对观测数据处理精度提高具有重要的意义.

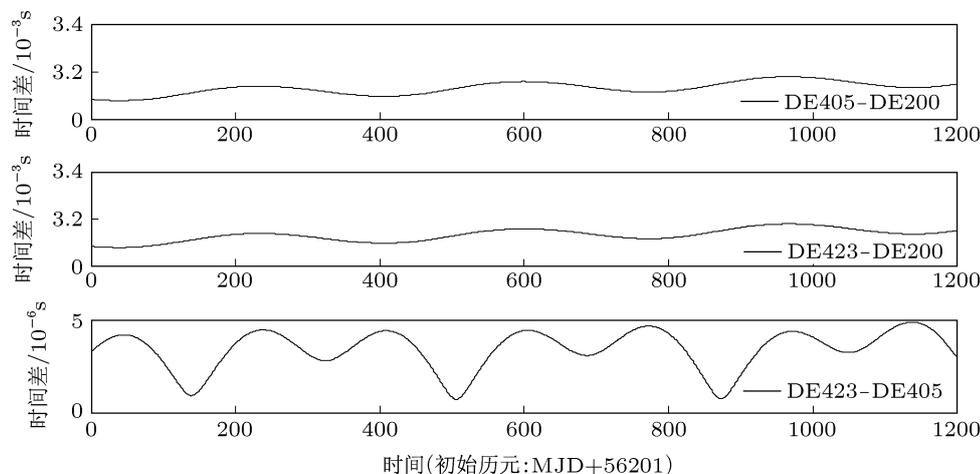


图 6 不同行星星历对 TOA 时间转换影响的比较

## 4 结论与讨论

X 射线脉冲星自主导航具有重要的理论研究和工程应用价值. 本文主要研究了 X 射线脉冲星导航的观测方程, 程序实现了对脉冲星光子到达时间序列的数据处理, 并验证观测方程的正确性, 分析了脉冲星位置误差和行星星历误差的影响, 建议对脉冲星进行长期观测以提高脉冲星位置精度, 并在数据处理中采用最新的太阳系行星历表.

X 脉冲星自主导航的观测方程主要目的是将光子到达时间转换至 SSB 处的光子到达时间, 然而 SSB 在太阳系内部并不是动力学中心, 无法通过对大天体的观测而检测出 SSB 的位置. 同时, SSB 也无对应的物理天体, 具有不可观测性, 只能通过各天体的日心位置和太阳系天体质量分布计算出来, 而天体质量的空间分布难以准确确定. 换句话说, SSB 位置精度也是脉冲星导航需要考虑的问题. 对于地球附近的航天器, 希望将脉冲时间模型的

原点定义在地球质心, 有利于减弱脉冲星位置误差的影响, 然而该问题的回答在于如此建立的脉冲计

时模型能否准确地预报和标准轮廓能否长期保持稳定.

- [1] Sheikh S I 2005 *Ph. D. Dissertation* (USA: University of Maryland)
- [2] Ren H F 2011 *Ph. D. Dissertation* (Zhengzhou: PLA information engineering university) (in Chinese) [任红飞 2011 博士学位论文 (郑州: 解放军信息工程大学)]
- [3] Ren H F, Wei Z Q, Zhai Z H, Wu F M 2012 *Acta Geodaetica et Cartographica Sin.* **41** 41 (in Chinese) [任红飞, 魏子卿, 翟振和, 吴富梅 2012 测绘学报 **41** 41]
- [4] Zhao M, Huang T Y 2009 *Science in China* (G) **39** 1671 (in Chinese) [赵铭, 黄天衣 2009 中国科学: 物理学力学天文学 **39** 1671]
- [5] Backer D C, Helling R W 1986 *Ann. Rev. Astron Astrophys* **24** 537
- [6] Lorimer D R, Kramer M 2005 *Handbook of Pulsar Astronomy* (London: Cambridge University Press)
- [7] Helling R W 1986 *The astronomical Journal* **91** 650
- [8] Murry C A 1983 *Vectorial Astrometry* (London: Tsechno House of Adam Hilger)
- [9] Edwards R T, Hobbs G B, Manchester R N 2006 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **372** 1574
- [10] Sheikh S I, Hellings R W, Matzner R A 2007 *ION 63rd Annual Meeting*, Cambridge, MA, April 23–25, 2007, P432
- [11] Shuai P, Li M, Chen Z L, Huang Z 2009 *the principle and method the X-ray pulsar-Based navigation system* (Beijing: China Astronautic Publishing House) (in Chinese) [帅平, 李明, 陈绍龙, 黄震 2009 X 射线脉冲星导航系统原理与方法 (北京: 中国宇航出版社)]
- [12] Fei B J, Sun W J, Pan G T, Ji C X 2010 *Chin. J. Space. Sci.* **30** 85 (in Chinese) [费保俊, 孙维瑾, 潘高田, 季诚响 2010 空间科学学报 **30** 85]
- [13] Liu J Q, Xu C M 1989 *Acta Astronomica Sinica* **30** 323 [刘甲求, 须重明 1989 天文学报 **30** 323]
- [14] Blanford R, Teukolsky S A 1976 *The Astrophysical Journal* **205** 580
- [15] Su Z, Xu L P, Wang T 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 119701 (in Chinese) [苏哲, 许录平, 王婷 2011 物理学报 **60** 119701]
- [16] Zhou Q Y, Ji J F, Wang T 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 019701 (in Chinese) [周庆勇, 姬剑锋, 任红飞 2013 物理学报 **60** 119701]
- [17] Dennies D M, Petit G 2004 *IERS Conventions* (2003) <http://www.iers.org/iers/publications/tn/tn32/> [2012-08-11]
- [18] Liu L, Hou X Y 2012 *The orbital mechanics of deep space probe* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) (in Chinese) [刘林, 候锡云 2012 深空探测器轨道力学 (北京: 电子工业出版社)]
- [19] Li Z B 2011 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [李志兵 2011 博士学位论文 (北京: 中国科学院研究生院)]
- [20] Lyne A G, Jordan C A, Roberts M E <http://www.jb.man.ac.uk/~pulsar/crab.html> [2012/09/31]
- [21] Lyne A G, Pritchard R S, Graham-Smith F 1993 *MNRAS* **265** 1003
- [22] Ray P S, Wood K S, Wolff M N 2002 *American Astronomical Society Meeting* 201 Dec 2002

# Timing equation in X-ray pulsar autonomous navigation<sup>\*</sup>

Zhou Qing-Yong<sup>†</sup> Ji Jian-Feng Ren Hong-Fei

(State Key Laboratory of Geo-information engineering, Xi'an 710054, China)

(Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, China)

(Received 15 November 2012; revised manuscript received 11 March 2013)

## Abstract

The timing equation is the basic theory of dealing with the observable data of pulsar. The pulse timing model is studied; the transformation equation of pulsar photon time of arrival in IPN approximation is derived, the existing transformation equations are compared and analyzed; the transformation of the proper time from the spacecraft to TCB is also obtained. The process dealing with the observable data of RXTE is achieved by software, the pulsar period is estimated and pulse profile is replicated, the validity of timing equation is approved. The result of software is compared with that of Heasoft, the reason of difference between them is analyzed. Finally, the effects of the planet ephemeris error and the pulsar ephemeris error on data processing are achieved.

**Keywords:** SSB, pulse timing model, Crab pulsar, time delay of gravity

**PACS:** 97.60.Gb, 07.05.kf

**DOI:** 10.7498/aps.62.139701

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41004013, 41174025, 41204020).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: zjlzqy1986@163.com