

## 基于 S 变换的脉冲星辐射脉冲信号检测\*

王璐<sup>†</sup> 许录平 张华 罗楠

(西安电子科技大学电子工程学院, 西安 710071)

(2013 年 1 月 30 日收到; 2013 年 3 月 6 日收到修改稿)

为了提高脉冲星辐射脉冲信号的检测速度和在低信噪比下的检测效果, 提出了一种基于 S 变换的脉冲星辐射脉冲信号检测算法. 文中证明了高斯白噪声 S 变换域功率谱服从自由度为 2 的卡方分布, 基于此对累积信号 S 变换域功率谱进行阈值处理, 累加阈值处理后的时频功率谱作为统计量进行检测. 此外阈值处理后的功率谱也可用来测量脉冲星信号的时间延迟. 仿真实验验证了本文算法的有效性, 其检测性能优于同类的基于高斯分布模型的检测算法, 同时还可以在一定程度下给出脉冲星信号的时间延迟值.

**关键词:** 脉冲星, 卡方分布, S 变换域检测, 时延测量

**PACS:** 97.60.Gb, 98.70.Qy, 96.60.tk

**DOI:** 10.7498/aps.62.139702

## 1 引言

脉冲星是一种高速自转的中子星, 具有极其稳定的脉冲辐射周期, 其辐射信号覆盖了射电、红外、可见光、紫外、X 射线及  $\gamma$  射线<sup>[1]</sup>. 近年来, 基于脉冲星的航天器定时、定位、定姿已成为天文导航领域的重要研究课题<sup>[2-4]</sup>, 由于脉冲星距离地球约 3000—55000 光年, 同时受到宇宙空间背景噪声的干扰, 在太阳系接收到的许多脉冲星辐射信号都湮没于噪声之中<sup>[5]</sup>. 因此, 脉冲星信号检测算法的研究对于脉冲星导航后续的研究具有极其重要的意义.

目前脉冲星信号检测普遍采用的方法为基于 FFT 的频域周期检测法<sup>[5]</sup>, 该方法直接对未累积的观测数据做检测, 算法的计算量大、并不能提供航天器空间导航定位系统的脉冲星实时搜索<sup>[6]</sup>; 同时该方法仅在高斯白噪声的前提下适用, 对于光子强度微弱的未累积观测序列, 其背景泊松噪声并不能近似为高斯白噪声, 当信噪比 (signal to noise ratio, SNR) 较低时, 该方法容易出现由谐波分量引起的误检测<sup>[7,8]</sup>. 此外还有基于 Bayesian 估计的时域脉

冲星信号检测算法<sup>[8]</sup>, 该时域算法也是对未累积的观测数据做检测, 它需要脉冲星信号的周期、占空比和流量强度等先验知识, 并且对流量强度的要求比较高.

相对于微弱的观测信号, 累积脉冲轮廓的数据量小、信噪比高、所含的泊松噪声可以近似为高斯白噪声. 因此本文将对脉冲星累积脉冲轮廓做检测, 该检测对应的零假设和备择假设为

$$H_0: x(m) = u(m), m = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

$$H_1: x(m) = s(m) + u(m), m = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2)$$

式中,  $x(m)$  为累积的观测序列,  $s(m)$  为脉冲星累积轮廓,  $u(m)$  是零均值、方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声,  $s(m)$  和  $u(m)$  互不相关.

S 变换<sup>[9]</sup>是近年来人们研究非平稳信号时频分布的一个重要工具, 它是对短时傅里叶变换和小波变换的一种组合和扩展, 具有计算简单和表达直观的优点. 本文将 S 变换应用于脉冲星累积脉冲轮廓的检测中, 文中通过理论分析和实验仿真验证了高斯白噪声 S 变换域时频功率谱服从自由度为 2 的卡方分布. 基于此提出了一种基于 S 变换的脉冲星辐射脉冲信号检测方法, 讨论了其在信号时延测

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61172138) 和中国科学院精密导航定位与定时技术重点实验室开放基金 (准批号: 2012PNTT02) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: wanglu\_xidian@163.com

量中的应用, 并通过实验验证了该方法的检测性能.

## 2 高斯白噪声 S 变换域的功率谱分析

### 2.1 S 变换及其性质

S 变换是由 Stockwell 等<sup>[9]</sup>提出的一种加时窗傅里叶变换方法, 连续函数  $u(t)$  的 S 变换表达式为

$$S_u(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\omega(\tau-t, f)e^{-i2\pi ft} dt, \quad (3)$$

$$\omega(\tau-t, f) = \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} e^{-(f^2(\tau-t)^2/2)}, \quad (4)$$

其中  $\omega(\tau, f)$  为高斯窗函数,  $f$  为频率,  $\tau$  和  $t$  为时间变量,  $\tau$  是高斯窗函数的中心点.

逆 S 变换可写为

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\tau, f) d\tau \right) e^{i2\pi ft} df. \quad (5)$$

离散的 S 变换和逆 S 变换为

$$S_u(m, n) = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} U(l+n) e^{-(2\pi^2 l^2/n^2)} \times e^{(i2\pi lm/N)}, n \neq 0, \quad (6)$$

$$S_u(m, 0) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} u(p),$$

$$u(p) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S_u(m, n) \right\} e^{(i2\pi mp/N)}, \quad (7)$$

式中  $m = 0, 1, \dots, N-1$  代表时间,  $n = 1, 2, \dots, N-1$  代表频率,  $U(n)$  是  $u(t)$  的离散傅里叶变换.

由 (5) 式可知, 离散形式的 S 变换可以借助 FFT 和卷积定理实现快速计算; 此外, S 变换是一个线性运算, 满足线性叠加原理<sup>[10]</sup>, 且具有无损可逆性; 这两个性质为本文的检测算法提供了良好的基础.

### 2.2 高斯白噪声 S 变换域的功率谱均值

对  $u(m)$  做 S 变换, 由 (5) 式可知其结果  $S_u$  是一个复时频矩阵, 因此  $S_u(m, n)$  由实部  $\Re\{S_u(m, n)\}$  和虚部  $\Im\{S_u(m, n)\}$  组成. 定义  $|S_u|^2$  为  $u(m)$  的 S 变换域功率谱, 记作  $P_u$ , 如下式所示:

$$P_u(m, n) = |S_u(m, n)|^2 = |\Re\{S_u(m, n)\}|^2 + |\Im\{S_u(m, n)\}|^2. \quad (8)$$

设  $x(t)$ ,  $s(t)$  和  $u(t)$  分别为 (1) 式中  $H_1$  假设里三个离散序列的连续形式, 已知白噪声  $u(t)$  的自相

关函数<sup>[11]</sup>如 (8) 式所示, 令  $|S_x(\tau, f)|^2$  和  $|S_s(\tau, f)|^2$  分别为观测信号  $x(t)$  和脉冲星累积轮廓  $s(t)$  的 S 变换域功率谱, 使用 (2), (3), (8) 式计算  $|S_x(\tau, f)|^2$  的均值, 过程如 (9) 式所示.

$$E[u(t)u^*(v)] = \sigma^2 \delta(t-v), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & E\{|S_x(\tau, f)|^2\} \\ &= E\{S_x(\tau, f)S_x^*(\tau, f)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E\{[s(t)+u(t)][s(v)+u(v)]^*\} \\ &\quad \times w(\tau-t, f)w(\tau-v, f)e^{-i2\pi f(t-v)} dt dv \\ &= |S_s(\tau, f)|^2 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-v)w(\tau-t, f)w(\tau-v, f) \\ &\quad \times e^{-i2\pi f(t-v)} dt dv \\ &= |S_s(\tau, f)|^2 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [w(\tau-t, f)]^2 dt \\ &= |S_s(\tau, f)|^2 + \frac{|f|\sigma^2}{2\sqrt{\pi}}, \end{aligned} \quad (10)$$

(8), (9) 式中的  $\delta(t)$  为 delta 函数,  $t, v$  均表示时间, ‘\*’ 表示取复共轭.

由 (9) 式的结果可知, 观测信号  $x(t)$  的 S 变换域功率谱是在信号  $s(t)$  的功率谱  $|S_s(\tau, f)|^2$  上添加一个与频率成正比的斜平面, 该斜平面为背景高斯白噪声的功率谱均值, 文中用  $P_m$  表示高斯白噪声的功率谱均值.

$P_m$  是本文检测算法的一个重要参数, 它与背景噪声的方差有关, 为了便于计算, 本文使用有限个同分布高斯白噪声 S 变换域功率谱的平均值  $P_{ave}$  来代替  $P_m$ .  $P_{ave}$  的计算公式如 (10) 式所示, 式中的  $P_{u,i}$  为第  $i$  个噪声的 S 变换域功率谱.

$$P_{ave} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K P_{u,i}. \quad (11)$$

下面对高斯白噪声 S 变换域的功率谱均值  $P_m$  和平均功率谱  $P_{ave}$  进行 Monte Carlo 仿真, 实验中各样本噪声的采样点数为 128, 且都服从  $N(0, 1)$  分布. 图 1(a) 为对应的噪声功率谱均值  $P_m$ , 它是一个光滑的斜面; 图 1(b) 为 100000 个独立同分布高斯白噪声的 S 变换域平均功率谱  $P_{ave}$ , 该结果也是一个斜平面, 虽然不及图 1(a) 光滑; 图 2(a) 中下方的实线是时间采样点为 65 处的功率谱均值, 点线为对应时间采样点的平均功率谱, 两条斜线对应点间

的差别非常微小; 综上, 高斯白噪声平均功率谱的仿真结果与 (9) 式推导的结果是一致的.

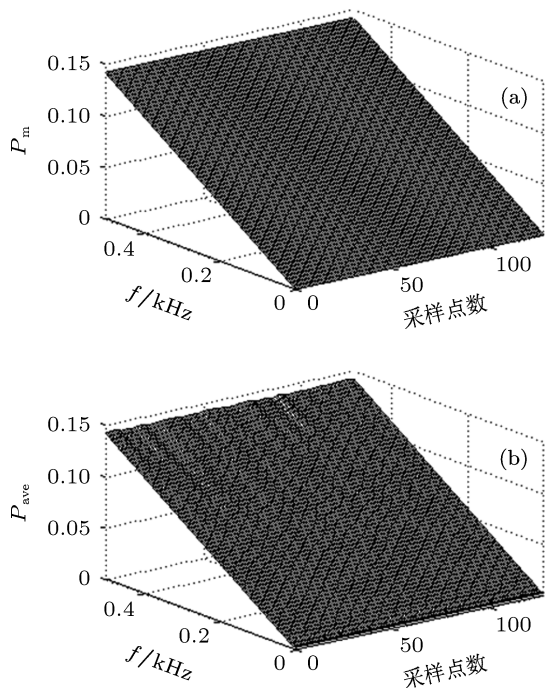


图 1 高斯白噪声 S 变换域的功率谱均值和平均功率谱 (a) 功率谱均值  $P_m$ ; (b) 平均功率谱  $P_{ave}$

### 2.3 高斯白噪声 S 变换域的局部谱特性

使用解析方法确定高斯白噪声 S 变换域功率谱的概率分布十分困难, 因此这里将通过理论分析和仿真实验来确定高斯白噪声 S 变换域功率谱的概率分布.

首先对高斯噪声 S 变换域功率谱的概率分布进行理论分析, 由文献 [9, 10, 12] 知, S 变换是一个线性变换, 对于实高斯噪声  $u(m)$ , 其 S 变换结果  $S_u$  的实、虚部也都服从高斯分布. 由于高斯分布变量的平方服从自由度为 1 的卡方分布, 因此  $u(m)$  在 S 变换域的功率谱  $P_u$  服从自由度为 2 的卡方分布 [13], 记作  $\chi_2^2$ .

下面通过 Monte Carlo 方法加以验证, 对 100000 个同分布样本高斯白噪声的 S 变换域功率谱在已知显著性水平的条件下进行显著性检验, 求出该显著性水平下的置信区间. 实验中样本噪声的采样点数为 128, 且均服从  $N(0, 1)$  分布, 显著性水平  $\alpha = 0.05$ . 令  $\theta$  矩阵为背景高斯白噪声 S 变换域功率谱的 95% 单侧置信上限, 由文献 [14, 15] 有,  $\theta$  为平均功率谱  $P_{ave}$  与一个常数  $\mu$  的乘积,  $\mu$  为功

率谱概率分布的第 95 百分位值, 是一个确定但未知的值, 需要通过实验求解.

在实验中首先计算出每个样本高斯噪声的 S 变换域功率谱, 将结果存储起来, 这里用  $\{P_{u,i}\}_{i=1}^K$  表示所有样本噪声时频功率谱矩阵的集合, 其中  $K = 100000$ ; 按照 (11a) 式将功率谱矩阵  $P_{u,i}$  与单侧置信上限矩阵  $\theta$  逐点比较大小, 求出  $P_{u,i}$  各功率谱点中大于  $\theta$  矩阵对应点的元素数目, 得到数列  $\{b_i\}_{i=1}^K$ ; 最后根据 (11b) 式求出数列  $\{b_i\}_{i=1}^K$  的总和与总时频点数  $N \times N \times K$  的比值, 记作  $b$ .

$$b_i = \text{num}\{P_{u,i}(m,n) > \theta(m,n)\} \quad (11a)$$

$$m, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^K b_i}{N \times N \times K}, \quad (11b)$$

$$\theta = \mu P_{ave}, \quad \mu \geq 0, \quad (11c)$$

$$\min f(\mu) = |g(\mu) - \alpha|, \quad (12)$$

$$\text{s.t. } \mu \geq 0.$$

实验中  $\{P_{u,i}\}_{i=1}^K$  为固定已知的, 当  $\mu \geq 0$  时, 由 11(a—c) 式可知  $b$  是  $\theta$  的减函数,  $\theta$  是  $\mu$  的增函数, 因此  $b$  是  $\mu$  的函数, 记作  $b = g(\mu)$ ,  $\mu \geq 0$ , 该函数单调递减. 基于此我们建立了以  $\mu$  为决策变量的非线性规划模型, 模型如 (12) 式所示, 其中  $\alpha$  表示置信水平, 取值为 0.05. 当  $g(\mu)$  为  $\alpha$  时,  $f(\mu)$  取得最小值零, 使用一维搜索法求解出令  $f(\mu)$  为零的  $\mu$  值, 最终解得的  $\mu$  值为 3, 实验结果如图 2 所示.

图 2(a) 中下方的实线是时间采样点为 65 处的功率谱均值理论值, 点线为对应时间采样点处 100000 个噪声功率谱的平均值, 而上方的实线和点线是置信水平为 95% 的置信上限理论值和实际值, 图中上方点线的斜率是下方点线斜率的  $\mu$  倍, 这里  $\mu$  为 3, 已知 5.9914 为  $\chi_2^2$  的 95% 置信区间上限, 定义统计量  $\frac{2P_u(m,n)}{P_{ave}(m,n)}$ , 其中  $P_{ave}(m,n)$  和  $P_u(m,n)$  分别为噪声的平均功率谱和样本噪声的 S 变换域功率谱在时间  $m$ 、频率  $n$  处的值, 该统计量的概率分布为 (13) 式, 对应的置信区间为 (14) 式.

$$\frac{2P_u(m,n)}{P_{ave}(m,n)} \Rightarrow \chi_2^2, \quad (14)$$

$$\frac{2P_u(m,n)}{P_{ave}(m,n)} \leq \chi_2^2(\alpha), \quad (15)$$

(13) 式中的 ‘ $\Rightarrow$ ’ 表示 ‘分布’, (14) 式中  $\alpha$  为显著性

水平,  $\chi_2^2(\alpha)$  为‘上  $\alpha$  分位点’, 由 (14) 式可得高斯噪声功率谱矩阵的置信区间为

$$P_u \leq \frac{1}{2} \chi_2^2(\alpha) P_{ave}. \quad (16)$$

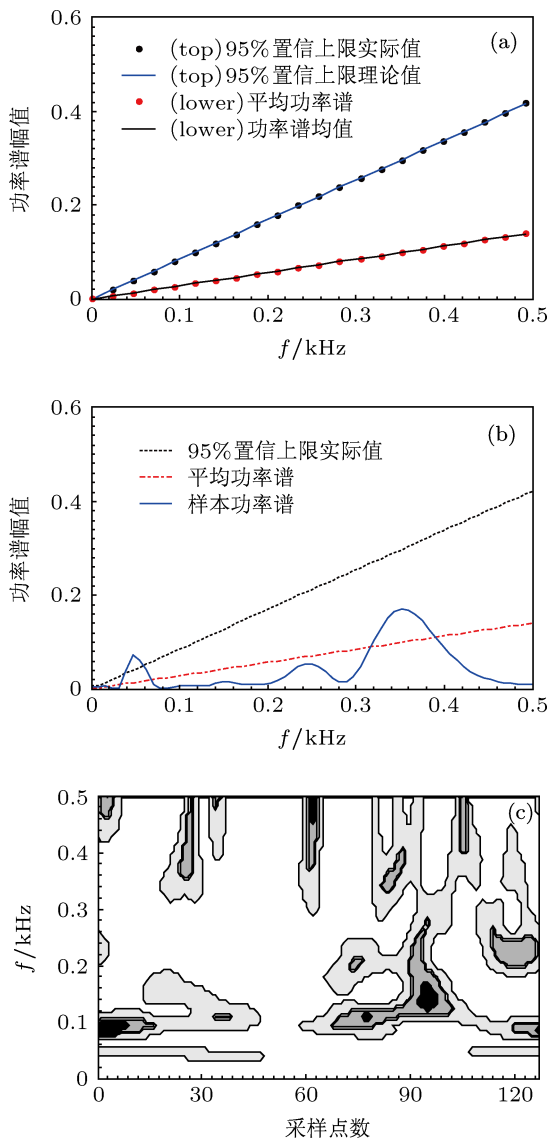


图 2 高斯白噪声 S 变换域局部功率谱的概率分布实验 (a)  $m = 65$  时理论与实际值的比较; (b)  $m = 65$  时样本功率谱、 $P_{ave}$  和  $\theta$  的关系; (c) 样本高斯白噪声功率谱等高线图

图 2(b) 中的两个虚线由上向下分别是时间采

样点为 65 处的 95%置信线和平均功率谱线, 实线是采样点 65 处的样本噪声功率谱, 该实线中只有少数频率点处的样本功率谱值高于 95%置信线. 图 2(c) 是一个样本高斯白噪声 S 变换域功率谱的等高线图, 图中有三条等高线, 其中黑色轮廓为样本噪声的功率谱中高于 95%单侧置信上限  $\theta$  的部分.

### 3 脉冲星辐射脉冲信号检测算法

下面利用本文第二节得到的高斯白噪声统计规律, 给出在 S 变换域检测脉冲星信号的方法, 算法的流程如图 3 所示: 首先计算累积序列  $x(m)$  的 S 变换域功率谱  $P_x$ ; 其次以  $\frac{1}{2} \chi_2^2(\alpha) P_{ave}$  为门限矩阵对  $P_x$  做阈值处理得到二值矩阵  $B_x$ , 利用  $B_x$  来统计目标点的能量得到检验统计量  $T_x$ ; 最后使用蒙特卡罗实验来确定恒虚警概率对应的检测门限  $\gamma$ , 将  $T_x$  与  $\gamma$  进行比较来判断信号的有无.

#### 3.1 脉冲星信号 S 变换域功率谱的阈值处理

由 (15) 式有, 在显著性水平为  $\alpha$  时, 高斯白噪声 S 变换域功率谱的拒绝域为

$$\left\{ P_u > \frac{1}{2} \chi_2^2(\alpha) P_{ave} \right\}. \quad (17)$$

令  $P_x$  为累积序列  $x(m)$  的 S 变换域功率谱, 将  $P_x$  与  $\frac{1}{2} \chi_2^2(\alpha) P_{ave}$  逐点比较大小, 当  $P_x(m, n)$  小于  $\frac{1}{2} \chi_2^2(\alpha) P_{ave}(m, n)$  时, 认为该点为高斯白噪声, 否则认为在  $(1 - \alpha)$  置信度下该点含有效信号, 按照 (17) 式将阈值处理的结果保存到二值矩阵  $B_x$  中.

$$B_x(m, n) = \begin{cases} 1, & P_x(m, n) \geq \frac{1}{2} \chi_2^2(\alpha) P_{ave}(m, n) \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (18)$$

$m, n = 0, 1, \dots, N - 1.$

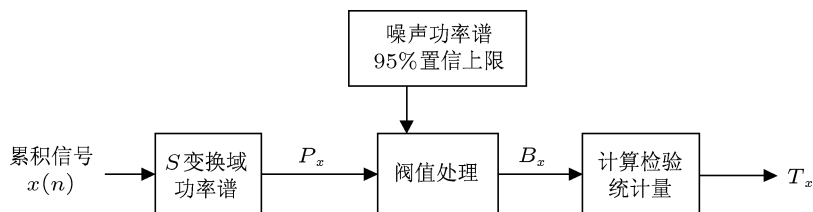


图 3 检测算法框图

使用高斯白噪声的  $(1 - \alpha)$  置信区间上限做门限可以确保只有少部分噪声功率谱通过阈值保留下来, 从而达到功率谱除噪的目的. 图 4 以脉冲星 B0403-76 为例, 演示了本文的脉冲星信号  $S$  变换域功率谱提取过程, 其中累积序列的信噪比为 2 dB, 采样点数为 256; 文中用到的脉冲星数据均来自于 ATNF EPN 数据库.

图 4(a) 为脉冲星 B0403-76 标准轮廓的  $S$  变换域功率谱灰度图, 图 4(b) 为累积序列的功率谱灰度图, 图 4(c) 是对累积序列功率谱做阈值处理后的功率谱灰度图. 由图 4(b), (c) 可知, 通过阈值处理, 累积序列中的大量噪声被滤除掉; 将图 4(a), (c) 作对比, 可知本文的阈值处理可以很好的将脉冲星信号  $S$  变换域功率谱从噪声功率谱中提取出来.

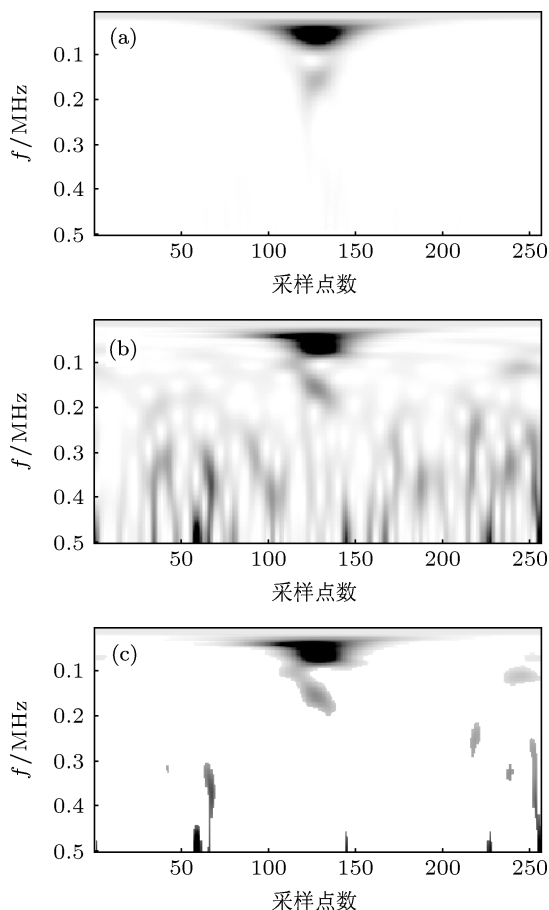


图 4 脉冲星 B0403-76 信号累积轮廓  $S$  变换域功率谱提取分析 (a) 标准轮廓的功率谱; (b) 累积序列的功率谱; (c) 阈值处理后的功率谱

### 3.2 检验统计量

作为阈值滤波的结果, 二值矩阵  $B_x$  提取了大部分脉冲星信号的功率谱, 使用该矩阵构造检测统

计量  $T_x$ , 定义式如下:

$$T_x = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} P_x(m, n) \cdot B_x(m, n), \quad (19)$$

式中检测统计量  $T_x$  是矩阵  $B_x$  中非零时频点对应能量的总和.

最后, 通过比较  $T_x$  和恒虚警概率检测门限  $\gamma$  的大小来对 (1) 式中的二元假设做判别, 判别准则为: 当  $T_x > \gamma$  时,  $H_1$  成立; 当  $T_x \leq \gamma$  时, 则  $H_0$  成立.

### 3.3 恒虚警概率检测门限

设  $H_0$  成立时,  $p(T_x|H_0)$  为检测统计量  $T_x$  的条件概率密度函数, 则虚警概率  $P_f$  与检测门限  $\gamma$  的关系式为

$$P_f = \int_{\gamma}^{+\infty} p(T_x|H_0) dT_x, \quad (20)$$

$T_x$  是经过非线性处理得到的, 使用解析方法确定  $p(T_x|H_0)$  非常困难, 因此这里应用蒙特卡罗实验确定给定虚警概率  $P_f$  对应的检测门限  $\gamma$ , 具体方法为: 使用本文检测算法计算  $N$  个同分布样本高斯噪声的检测统计量, 将这  $N$  个检测统计量从小到大排列得到递增数列  $\{E_i\}, i = 1, 2, \dots, N$ , 则虚警概率  $P_f$  对应的门限  $\gamma$  为

$$\begin{aligned} \gamma &= E_{[1/P_f]}, \\ 1/P_f &\leq N, \end{aligned} \quad (21)$$

式中  $[ \ ]$  表示取整,  $N$  的取值比较大.

对于相同的虚警概率  $P_f$ , 门限  $\gamma$  随着样本高斯噪声数量  $N$  的增大而减小, 检测概率  $P_d$  则随着  $\gamma$  的减小而增大, 反之亦然. 这里以脉冲星 B0531+21 为例, 通过分析检测概率  $P_d$  来验证数量  $N$  对本文算法检测性能的影响, 实验结果如图 5 所示.

图 5 中的各检测概率  $P_d$  是在信噪比一定的条件下, 使用不同虚警概率对应的检测门限  $\gamma$  对 200000 个含有脉冲星信号的累积序列进行检测得到的. 由图 5(a)—(d) 可知, 一方面在信噪比确定的条件下, 相同  $P_f$  对应的  $P_d$  随着  $N$  值的增加而增加; 另一方面随着信噪比的增加, 对应的  $P_d$  随  $N$  值增加的幅度则逐渐减小, 在图 5(a) 中  $P_f$  为  $10^{-5}$  时,  $N$  值依次增大对应  $P_d$  的增幅分别为 16.8%, 8% 和 10%; 而图 5(d) 中对应的增幅为 5.3%, 1.5% 和 1%. 此外,  $N$  值越大计算  $\gamma$  的运算量越大, 因此在检测效果和运算量上进行折衷, 本文实验中的  $N$  均为 300000.

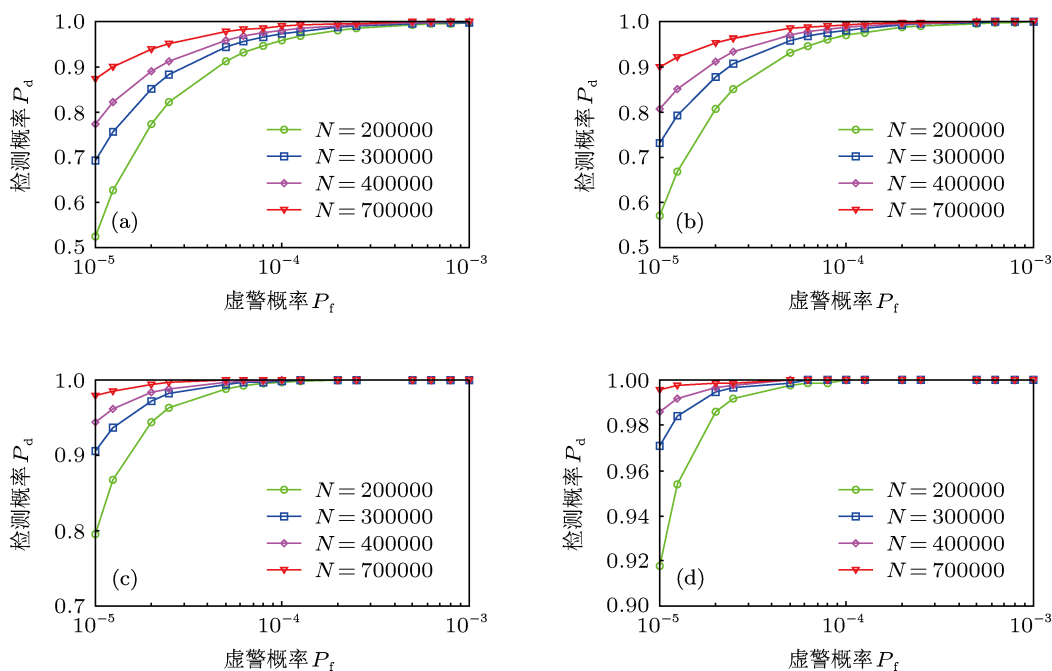


图5 不同信噪比下高斯噪声样本数量与检测概率的关系 (a) SNR = -16; (b) SNR = -12; (c) SNR = -6; (d) SNR = -4

### 3.4 基于二维相关系数的时延测量算法

设  $x(m)$  为含有脉冲星信号的累积序列, 对其  $S$  变换域功率谱  $P_x$  进行阈值处理得到时频功率谱  $P_{xf}$ (如 (21) 式所示).  $P_{xf}$  中只含有少量噪声功率谱, 与一维信号相比它可以更好地反映出信号间的相似和差异程度, 因此这里使用  $P_{xf}$  来估计  $x(m)$  的时间延迟, 提出了一种时频功率谱二维相关系数测时延的方法.

假设已知  $x(m)$  所含脉冲星信号的类型 [16],  $P_{mod}$  为该脉冲星标准轮廓的  $S$  变换域功率谱, 将  $P_{mod}$  在时间轴上平移  $i$  个单位, 结果用  $P_{mod}(m-i)$  表示, 按照 (22) 式求出功率谱矩阵  $P_{xf}$  与时移矩阵  $P_{mod}(m-i)$  的二维相关系数, 式中  $\overline{P_{mod}}$  和  $\overline{P_{xf}}$  分别为矩阵  $P_{mod}$  和  $P_{xf}$  的均值,  $R(i)$  为  $P_{mod}$  时移  $i$  个单位后与  $P_{xf}$  求得的二维相关系数,  $P_{xf}$  与  $P_{mod}(m-i)$  的相似性越强, 则  $R(i)$  的值越大, 因此  $x(m)$  的时延  $\tau = T \cdot \arg \max_i \{R(i)\}$ ,  $T$  为时间采样间隔.

$$P_{xf}(m, n) = P_x(m, n) \cdot B_x(m, n), \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (22)$$

$$R(i) = \text{coxy2}(P_{mod}(m-i), P_{xf}) = \frac{\sum_m \sum_n (P_{mod}(m-i, n) - \overline{P_{mod}}) \cdot (P_{xf}(m, n) - \overline{P_{xf}})}{\sqrt{\sum_m \sum_n (P_{mod}(m-i, n) - \overline{P_{mod}})^2 \cdot \sum_m \sum_n (P_{xf}(m, n) - \overline{P_{xf}})^2}}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (23)$$

使用  $P_{xf}$  估计时延使得二维相关系数法具有良好的抗噪性, 然而时域采样却限制了该算法的时延精度. Taylor FFT 等频域时延估计算法 [17,18] 的时延精度与累积序列时间分辨率无关, 但对噪声比较敏感, 较低的信噪比会导致多解情况, 从而影响时延结果的判定. 因此可以将二维相关系数法的时延结果作为频域算法搜索求解过程的初始值, 从而克服

频域算法出现多解误判的情况.

## 4 实验与分析

### 4.1 算法的仿真实验与分析

以 B0403-76 和 B0149-16 两颗脉冲星为例, 通

通过分析不同信噪比下的检测性能对本文检测算法进行验证. 实验中累积序列的采样点数为 256, 在不同信噪比下分别对 200000 个含有脉冲星信号的累积序列进行蒙特卡洛实验, 得到检测性能曲线如图 6, 图中的检测概率随着信噪比的增加而增加, 当信噪比为 -10 dB 时, 图中的  $P_d$  均大于 70%; 当信噪比大于 -4 dB 时, 图中的  $P_d$  均趋近于 100%.

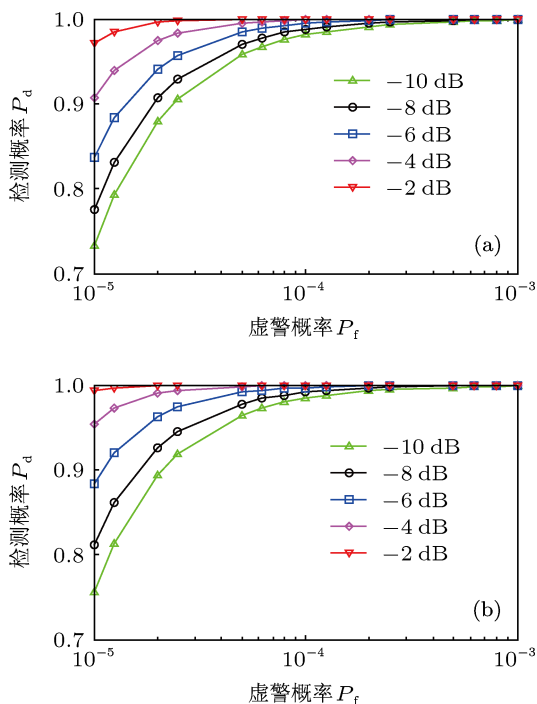


图 6 算法的检测性能曲线 (a) PSR B0403-76; (b) PSR B0149-16

### 4.2 不同算法比较

将本文算法与基于高斯分布的检测算法作比较, 来评价本文算法的检测性能. 基于高斯分布的检测算法假设背景噪声为高斯分布, 因此背景噪声的  $S$  变换域时频矩阵也服从高斯分布; 令  $m_n$  和  $\delta_n$  为背景噪声  $S$  变换域时频矩阵的统计均值和标准差, 对应的阈值门限为 [19]

$$\eta_{\text{gauss}} = m_n + k\delta_n. \quad (24)$$

将累积序列  $x(m)$  的  $S$  变换域时频矩阵  $S_x$  逐时频点与  $\eta_{\text{gauss}}$  比较, 取  $k=2$ , 当  $S_x(m, n) > \eta_{\text{gauss}}$  时, 表示该点检测到信号, 否则当噪声点处理, 对应结果记录在二值矩阵  $B$  中; 按照 (18) 式统计  $S$  变换域时频功率谱的能量  $T_{\text{gauss}}$ , 使用恒虚警概率方法得到基于高斯分布算法的门限  $\gamma_{\text{gauss}}$ , 当  $T_{\text{gauss}} > \gamma_{\text{gauss}}$

时,  $H_1$  成立; 当  $T_{\text{gauss}} \leq \gamma_{\text{gauss}}$  时, 则  $H_0$  成立. 以脉冲星 B0531+21 为例, 分别对各信噪比下的 200000 个含有脉冲星信号的累积序列进行检测, 结果如图 7 所示. 图中当  $P_f \in [10^{-4}, 10^{-3}]$  时两个算法的  $P_d$  很接近且都高于 95%, 这是因为较高的  $P_f$  对应的检测门限都比较小; 当  $P_f \in [10^{-5}, 10^{-4}]$  且  $\text{SNR} = -16$  dB 时, 两个算法的检测性能相差不多, 本文算法的  $P_d$  略高一点, 但随着  $\text{SNR}$  的增加, 本文算法的  $P_d$  迅速增加, 增幅远大于高斯算法, 因此本文算法的检测性能优于基于高斯分布算法的.

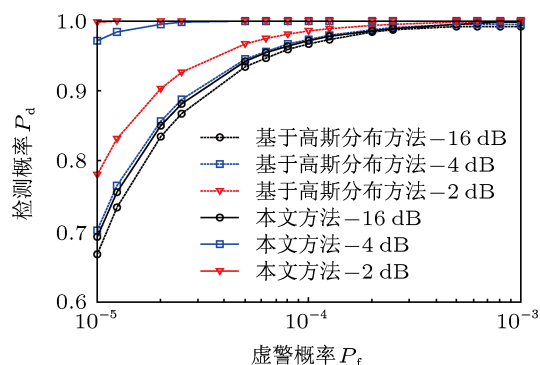


图 7 与基于高斯分布检测算法的性能比较

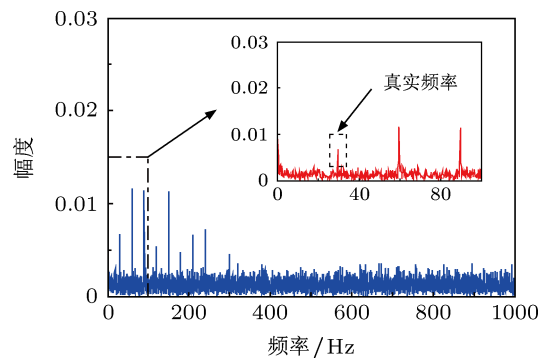


图 8 FFT 幅度谱

下面对传统的 FFT 检测算法进行简单分析, 并将其与本文检测算法作比较. 对于传统的 FFT 检测算法, 由于大多数脉冲星的辐射脉冲较窄包含丰富细节, 因此对未累积的观测序列进行频域变换会导致信号能量分散于谐波中, 当噪声中含有与谐波接近的频率成分时, 则谐波能量得到增强, 这将导致信号被误检测. 下面仍以脉冲星 B0531+21 为例, 来说明谐波对 FFT 检测算法的影响, 设周期为 0.0334 s, 每个周期的采样点为 512, 信号辐射强度为  $2 \times 10^{-2} \text{ ph/cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , 生成 100 个周期的观测序



列, 对该观测序列求幅度谱, 结果如图 8 所示. 图中的幅度谱包含了真实的频率成分及丰富的谐波成分, 有些谐波成分的幅度大于真实频率的幅度, 很容易造成信号的误检测. 相对而言, 本文检测算法利用背景高斯噪声  $S$  变换域功率谱的分布特性对累积序列的功率谱进行阈值处理, 减小了谐波分量对本文检测算法的影响, 在 SNR 较低时依然具有不错的检测性能 (见图 6、图 7). 此外, 本文检测算法需要已知待检测脉冲星信号的周期, 而 FFT 检测算法则不需要.

### 4.3 时延试验

利用本文阈值处理后的累积序列  $S$  变换域时频功率谱可以估计出观测信号的时间延迟. 这里选取脉冲星 B0531+21 和 J1518+4904 的累积脉冲轮廓进行基于二维相关系数的时延测量实验, 对应参数如表 1 所示.

表 1 脉冲星参数

脉冲星	周期/ms	采样点	采样间隔/ms
B0531+21	33.403	256	0.1305
J1518+4904	40.9349	256	0.1599

图 9 中的实、虚线分别为脉冲星 B0531+21 的标准脉冲轮廓和累积脉冲轮廓, 两个轮廓间的时延真实值为 6.785 ms, 累积脉冲轮廓的 SNR = 4 dB. 对图 9 中累积轮廓的  $S$  变换域功率谱进行阈值处理, 将结果与时移后的标准轮廓  $S$  变换域功率谱按照 (22) 式做相关, 结果如图 10 所示, 其中横坐标为标准轮廓功率谱的时移时间  $\tau$ , 纵坐标为二维相关系数  $R$ , 图中的曲线表示  $R$  随  $\tau$  的变化情况, 取  $R$  达到最大值时对应的  $\tau$  值为时延估计值, 这里的时延估计值为 6.785 ms, 与时延真实值一致. 在不同 SNR 下, 计算脉冲星 B0531+21 和 J1518+4904 多次测量的时延误差的标准差, 结果如图 11. 图中随着 SNR 的增加, 两颗脉冲星的时延标准差均减小; 相同 SNR 下, 脉冲星 B0531+21 的标准差较小, 这是因为脉冲星 B0531+21 的采样间隔较小.

综上, 由于时间分辨率限制和噪声影响, 本文算法的时延估计值会与真实值存在一定范围的误差, 但本文算法可以避免频域算法的多解情况, 因此可以将本文时延估计的结果作为 Taylor FFT 等频域时延估计算法的初始值.

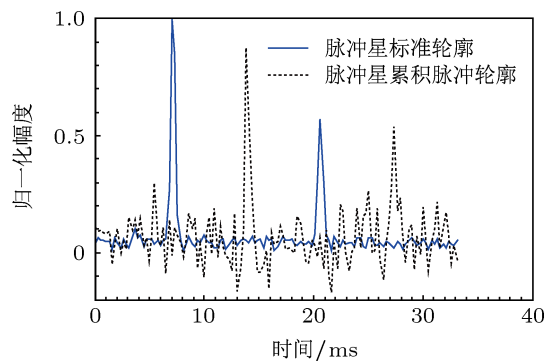


图 9 PSR B0531+21 标准轮廓和累积脉冲轮廓

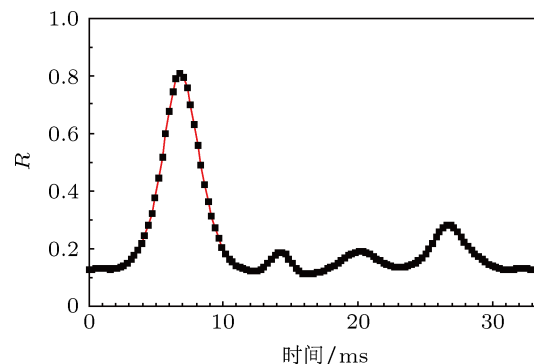


图 10 PSR B0531+21 累积脉冲轮廓时延测量

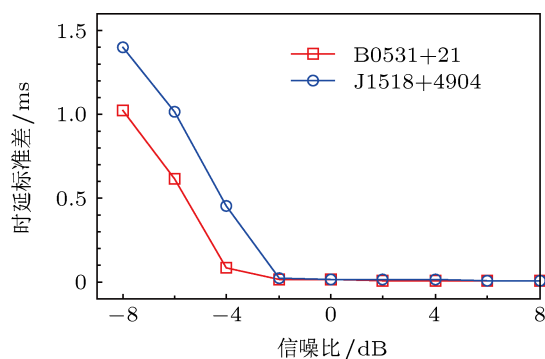


图 11 时间延迟测量的均方差

## 5 结论

本文定义了信号的  $S$  变换域功率谱, 证明了高斯白噪声的  $S$  变换域功率谱服从自由度为 2 的卡方分布, 在此基础上提出了基于  $S$  变换域的脉冲星累积脉冲轮廓检测方法, 该方法不需要脉冲星信号形状信息, 直接对累积序列做检测, 克服了传统 FFT 检测算法计算量大的问题; 算法中利用背景高斯噪声  $S$  变换域功率谱的分布特性对累积序列的功率谱进行阈值处理, 减小了频域方法在低信噪比时由谐波分量引起的误检现象; 仿真实验表明, 本文算法的检测性能优于同类基于高斯分布模型检



测算法的. 在时延测量方面, 本文算法的时延测量精度低于 Taylor FFT 等频域算法, 但抗噪性优于频域算法, 因此本文算法的时延解可以为频域方法提

供参考, 从而避免频域算法多解误判情况的产生, 提高频域算法的时延搜索速度.

- [1] Zhang L, Bian X, Mei D C 2001 *Chin. Phys.* **10** 662
- [2] Sheikh S I 2005 *Ph. D. Dissertation* (Maryland: University of Maryland)
- [3] Zhong C X, Yang T G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6157 (in Chinese) [仲崇霞, 杨廷高 2007 物理学报 **56** 6157]
- [4] Hu H J, Zhao B S, Sheng L Z, Yan Q R 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 029701 (in Chinese) [胡慧君, 赵宝升, 盛立志, 鄢秋荣 2011 物理学报 **60** 029701]
- [5] Shrauner J A 1997 *Ph. D. Dissertation* (New Jersey: Princeton University)
- [6] Xie Z H 2008 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Xidian University) (in Chinese) [谢振华 2008 博士学位论文 (西安: 西安电子科技大学)]
- [7] Gregory P C 1996 *Astrophys. J.* **10** 1
- [8] Zhang H, Xu L P, Xie Q, Luo N 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 049701 (in Chinese) [张华, 许录平, 谢强, 罗楠 2011 物理学报 **60** 049701]
- [9] Stockwell R G, Mansinha L, Lowe R P 1996 *IEEE. Trans. Sig. Proc.* **44** 998
- [10] Jin H M 2010 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: Hunan University) (in Chinese) [金慧敏 2010 博士学位论文 (长沙: 湖南大学)]
- [11] Mallat S 1999 *A Wavelet Tour of Signal Processing* (2nd Ed.) (New York: Academic Press) p194
- [12] Gao J H, Man W S, Chen S M 2004 *Chinese J. Geophys.* **47** 869 (in Chinese) [高静怀, 满蔚仕, 陈树民 2004 地球物理学报 **47** 869]
- [13] Jenkins G M, Watts D G 1968 *Spectral Analysis and Its Applications* (1st Ed.) (San Francisco: Holden Day) p525
- [14] Gilman D L, Fuglister F J 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 182
- [15] Torrence C, Compo G P 1998 *BAMS* **79** 61
- [16] Wang L, Xu L P, Zhang H, Luo N 2012 *J. Astronautics* **33** 1460 (in Chinese) [王璐, 许录平, 张华, 罗楠 2012 宇航学报 **33** 1460]
- [17] Taylor J H 1992 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **341** 117
- [18] Xie Z H, Xu L P, Ni G R 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6683 (in Chinese) [谢振华, 许录平, 倪广仁 2008 物理学报 **57** 6683]
- [19] Shang H Y, Shui P L, Zhang S H, Zhang Y B, Zhu T Q 2007 *J. Electron. Inf. Technol.* **29** 1416 (in Chinese) [尚海燕, 水鹏朗, 张守宏, 张雅斌, 朱天桥 2007 电子与信息学报 **29** 1416]

# Pulsar signal detection based on S-transform<sup>\*</sup>

Wang Lu<sup>†</sup> Xu Lu-Ping Zhang Hua Luo Nan

(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 30 January 2013; revised manuscript received 6 March 2013)

## Abstract

In order to increase the detection speed and to improve the detection rate in low signal-to-noise ratio, a novel detection algorithm for pulsar integrated pulse profile is proposed based on S-transform. We prove that the local S-transform spectrum of Gaussian white noise follows chi-square distribution with two degrees of freedom in this paper, and based on this, threshold processing is operated on the S-transform power spectra of cumulative signal; then, the total energy of the time-frequency power spectral after threshold processing is accumulated to construct the detecting statistics to obtain the statistic decision. Moreover, the time-frequency power spectra after threshold processing can also be used to measure the time delay of pulsar signal. The simulation result verifies the effectiveness of the proposed method which is superior to a similar method based on the Gaussian distribution; in addition, it can give the time delay with a certain accuracy.

**Keywords:** pulsar, chi-square distribution, S transformation domain detection, delay measurement

**PACS:** 97.60.Gb, 98.70.Qy, 96.60.tk

**DOI:** 10.7498/aps.62.139702

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61172138), and the Open Fund of Key Laboratory of Precision Navigation and Technology, National Time Service Center, CAS (Grant No. 2012PNTT02).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: wanglu\_xidian@163.com