

# 基于 Dini 展开的高阶 Hankel 变换及其在 光束传输中的应用\*

游开明<sup>†</sup> 林燕玲 王友文 陈列尊 戴志平 陆世专

(湖南衡阳师范学院物理与电子信息科学系, 衡阳 421002)

(2013年2月2日收到; 2013年3月30日收到修改稿)

基于 Dini 级数展开, 导出了  $p(> 0)$  阶准离散 Hankel 变换 (the  $p$ th-order quasi-discrete Hankel transform based on Dini series expansion,  $p$ DQDHT) 算法, 并给出了该算法在光束传输中的应用. 通过不同输入函数分别对  $p$ DQDHT 算法进行测试及光束通过透镜传输的应用实例, 结果表明:  $p$ DQDHT 算法不仅精度高于现有的 Hankel 变换算法, 可以进行多次正、逆变换, 能广泛应用于光束分步传输问题, 而且执行速度也与一般的快速 Hankel 变换算法相当.

关键词: Dini 级数展开, 高阶 Hankel 变换, 光束传输

PACS: 02.60.Gf, 42.30.Kq, 42.40.My, 42.25.Bs

DOI: 10.7498/aps.62.140203

## 1 引言

由于 Hankel 变换 (Hankel transform, HT) 在物理学的很多分支 (如光学、声学、电磁学、分子生物学等) 有着广泛的应用<sup>[1-4]</sup>, 引起了很多科学工作者的关注, 并对它的数值计算算法进行了研究. 1977 年, Siegman<sup>[5]</sup> 首先对径向坐标抽样点用指数形式量化, 将 HT 化为离散形式, 用快速傅里叶变换 (FFT) 进行计算, 得出了准快速 Hankel 变换算法. 此后, 出现了很多用于物理学各个方面的 HT 算法, 如文献 [6—18]. 文献 [9—11] 把 HT 看作是一个二变量函数的简单积分的傅氏变换, 先用一般方法计算简单积分, 再利用 FFT 得到 HT. 2003 年, Markham 和 Conchello<sup>[12]</sup> 总结了计算 HT 的 6 种方法, 并把它们用于计算振荡函数. 文献 [13] 和 [14] 分别用正弦和余弦变换进行快速 HT 及非均匀快速 HT 等. 2007 年, Cerjan<sup>[15]</sup> 把变换函数在单位区间上用 Zernike 多项式表示, 再根据 Zernike 多项式基础集与 Bessel 函数展开的对偶关系进行 HT, 其展开的系数采用 Simpson 规则或 Gauss-Kronrod 求积法计

算, 使 HT 变换在精度上有所提高. 1998 年 Yu 等<sup>[16]</sup> 对径向坐标按零阶 Bessel 函数零点分布的比例进行离散, 将变换函数做 Fourier-Bessel 级数展开, 实现了准离散 HT (quasi-discrete HT, QDHT), 2004 年 Guizar-Sicairos 和 Gutiérrez-Vega<sup>[17]</sup> 又把它推广到  $p$  阶 HT (the  $p$ th-order quasi-discrete HT,  $p$ QDHT), 这类方法利用变换矩阵使计算变得简单, 因而速度也较快, 由于能量守恒, 逆变换精度很高, 不依赖输入函数, 能适应反复变换, 具有很高的实用价值. 遗憾的是基于 Fourier-Bessel 级数展开 HT 方法处于条件收敛, 不能计算空间域和空间频率域端点处的变换值, 同时其 0 阶 HT 也不能计算对称轴上点的变换值, 不能直接用于研究传输问题中对称轴上的特性. 文献 [18] 给出了一种基于 Dini 级数展开的 0 阶准离散 HT 算法, 由于 Dini 级数展开比 Fourier-Bessel 级数展开收敛更快, 精度更高, 对于 0 阶 HT 还能计算对称轴上的值, 所以作者把它应用到解决光束非线性传输问题. 然而物理学中更一般的传输问题是高阶的, 如高阶 Bessel 光束传输问题等<sup>[19-21]</sup>, 又基于 Dini 级数展开 0 阶 HT 与高阶 HT 毕竟还有一定区别, 因此本文开展基于 Dini

\* 湖南省自然科学基金 (批准号: 12JJ6001, 11A018)、湖南省重点学科建设项目和国家自然科学基金专项类项目 (批准号: 11247313) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: hykmyou@163.com

级数展开的高阶  $p$  ( $p > 0$ ) 准离散 HT (the  $p$ th-order quasi-discrete Hankel transform based on Dini series expansion,  $p$ DQDHT) 算法的研究, 并给出它在光束传输中的应用.

## 2 算法的推导

很多有限区域上圆对称物理量分布问题, 数值方法上使用 HT 更有效. 归一化坐标的整数  $p$  ( $p > 0$ ) 阶 Hankel 变换和逆变换分别表示为 [7]

$$g(\beta\rho) = 2\pi b^2 \int_0^1 r f(br) J_p(S\rho r) dr, \quad (1)$$

$$f(br) = 2\pi\beta^2 \int_0^1 \rho g(\beta\rho) J_p(S\rho r) d\rho, \quad (2)$$

对于光束传输, 式中  $r$  表示归一化空间径向坐标,  $\rho$  表示归一化空间频率径向坐标,  $J_p$  表示第一类  $p$  阶 Bessel 函数,  $b$  和  $\beta$  分别表示空间变量和空间频率变量的截断半径,  $S$  表示带宽乘积  $b\beta$  的  $2\pi$  倍, 即

$$S = 2\pi b\beta. \quad (3)$$

对于第二类齐次边界条件, 第一类  $p$  阶 Bessel 函数满足如下关系 [18]

$$\int_0^1 t J_p(\alpha_m t) J_p(\alpha_n t) dt = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_n^2}\right) J_p^2(\alpha_n) \delta_{nm} \quad \left(p > -\frac{1}{2}\right), \quad (4)$$

式中  $\alpha_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是  $p$  阶 Bessel 函数导数  $J'_p(x)$  的正实根,  $\delta_{nm}$  为克罗内克符号,  $m = n$  时为 1, 否则为 0.

这里考虑  $p > 0$  的情况, 将方程 (1), (2) 中的变换函数  $f(br)$  和  $g(\beta\rho)$  展开为  $J_p$  的级数, 分别有

$$f(br) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_n^2}\right)^{-1} J_p^{-2}(\alpha_n) J_p(\alpha_n r), \quad (5)$$

$$g(\beta\rho) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_n^2}\right)^{-1} J_p^{-2}(\alpha_n) J_p(\alpha_n \rho), \quad (6)$$

式中的系数  $f_n$  和  $g_n$  由方程 (4) 确定, 再结合方程 (1) 和 (2), 分别有

$$\begin{aligned} f_n &= \int_0^1 r f(br) J_p(\alpha_n r) dr \\ &= \frac{1}{2\pi b^2} g \left(\frac{\beta\alpha_n}{S}\right), \quad (7) \\ g_n &= \int_0^1 \rho g(\beta\rho) J_p(\alpha_n \rho) d\rho \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi\beta^2} f \left(\frac{b\alpha_n}{S}\right). \quad (8)$$

上述级数展开称为 Dini 级数展开 [22].

将归一化径向坐标变量  $r$  和  $\rho$  分别量化为

$$r_n = \frac{\alpha_n}{S} \quad \text{和} \quad \rho_m = \frac{\alpha_m}{S}. \quad (9)$$

综合方程 (5) 到 (8), 得到  $p$  阶离散 Hankel 变换对为

$$\begin{aligned} g \left(\frac{\beta\alpha_m}{S}\right) &= \frac{1}{\pi\beta^2} \sum_{n=1}^N f \left(\frac{b\alpha_n}{S}\right) \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_n^2}\right)^{-1} \\ &\quad \times J_p^{-2}(\alpha_n) J_p \left(\frac{\alpha_n\alpha_m}{S}\right), \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \left(\frac{b\alpha_n}{S}\right) &= \frac{1}{\pi b^2} \sum_{m=1}^N g \left(\frac{\beta\alpha_m}{S}\right) \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_m^2}\right)^{-1} \\ &\quad \times J_p^{-2}(\alpha_m) J_p \left(\frac{\alpha_n\alpha_m}{S}\right), \quad (11) \end{aligned}$$

这里  $N$  为数值计算点数. 为了减少方程 (10) 和 (11) 右边求和符号中数乘次数, 分别定义向量  $G(m)$  和  $F(n)$  为

$$\begin{aligned} G(m) &= g \left(\frac{\beta\alpha_m}{S}\right) \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_m^2}\right)^{-1/2} \\ &\quad \times |J_p^{-1}(\alpha_m)| \beta, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(n) &= f \left(\frac{b\alpha_n}{S}\right) \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_n^2}\right)^{-1/2} \\ &\quad \times |J_p^{-1}(\alpha_n)| b, \quad (13) \end{aligned}$$

于是方程 (10) 和 (11) 简化为如下形式

$$G(m) = \sum_{n=1}^N C_{mn} F(n), \quad (14)$$

$$F(n) = \sum_{m=1}^N C_{nm} G(m), \quad (15)$$

其中  $C_{nm}$  为  $N \times N$  变换矩阵  $C$  的矩阵元, 表示为

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \frac{2}{S} |J_p^{-1}(\alpha_n) J_p^{-1}(\alpha_m)| \\ &\quad \times \left[ \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_n^2}\right) \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_m^2}\right) \right]^{-1/2} \\ &\quad \times J_p \left(\frac{\alpha_n\alpha_m}{S}\right). \quad (16) \end{aligned}$$

根据方程 (14)–(16), 容易看出矩阵  $C$  的一些特性: 由方程 (16) 知  $C$  是实对称矩阵, 满足  $C = C^T$ ; 将方程 (14) 代入 (15) 或反过来代换, 发现  $F(n)$  和  $G(m)$  均为自身变换, 说明正、逆变换毫无误差时还需要  $C$  是正交矩阵, 满足  $CC^T = I$  ( $I$  表示单位矩阵), 即  $C$  的行列式  $\det[C] = \pm 1$ ; 由方程 (16) 还知  $C$  是单参数  $S$  的函数,  $C = C(S)$ ,  $S$  不同, 矩阵  $C$  中元素的值不同, 所以如何选择  $S$  以使  $C$  成为正交矩阵对提高该数值算法的精度非常重要.

根据方程 (1), (2) 和 (9) 应取  $S = \alpha_N$ , 然而我们通过数值验证, 得知矩阵  $C$  并不是很好的正交矩阵. 若取  $S = j_{N+1}$  (其中  $j_{N+1}$  为  $J_p(x)$  的第  $N+1$  个零点, 满足  $\alpha_N < j_{N+1} < \alpha_{N+1}$ ), 矩阵  $C$  非常接近正交矩阵, 这是因为当方程 (1) 和 (2) 中的  $r = 1$  和  $\rho = 1$  时, 其中的变换核函数为  $J_p(S) = 0$ , 可以使变换后的  $g(\rho)$  和  $f(b)$  的值为 0, 所以本算法一般的数值计算中取  $S = j_{N+1}$ . 若要进一步提高精度, 可利用矩阵  $C$  的性质对  $j_{N+1}$  进行修正来得到  $S$ , 其修正表达式为

$$S = 2 |J_p^{-1}(\alpha_k)| \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_k^2}\right)^{-1/2} \times \sqrt{\sum_{n=1}^N J_p^{-2}(\alpha_n) \left(1 - \frac{p^2}{\alpha_n^2}\right)^{-1} J_p^2\left(\frac{\alpha_k \alpha_n}{j_{N+1}}\right)} \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (17)$$

我们用数值方法计算了 (17) 式的  $k$  值, 当  $k = [(N - 2p)/4]$  ( $N \geq 2p + 4$ ) 时,  $|\det[C] - 1|$  取最小值,  $C$  最接近正交矩阵.

利用矩阵  $C$  不仅能使在一次 HT 中减少  $N(3N - 4)$  次复数或实数乘法运算, 若将  $C$  存储起来, 还可避免下一次变换时对数据的重复计算, 这对分步传输问题非常重要, 可以极大地提高程序的执行速度.

这样  $p$ DQDHT 算法为: 先由方程 (13) 将  $f(br)$  转换为  $F(n)$ , 乘以矩阵  $C$  后再按方程 (12) 将  $G(m)$  转换为  $g(\beta\rho)$ . 逆变换时只要将方程 (12) 和 (13) 右边的  $\rho$  和  $b$  交换即可.

### 3 算法的测试与验证

我们用 C++ 语言编程对  $p$ DQDHT 算法的正确性与精度进行测试, 根据  $C$  为实对称矩阵, 对数据的存储采用三角矩阵形式, 可以分别节省  $N(N - 1)/2$  个双精度型存储单元的存储空间, 这用 C++ 语言编程是很容易实现的. 对于 Bessel 函数及其导数的零点很容易先用公式估算出来<sup>[23]</sup>, 然后用牛顿迭代法分别解方程  $J_p(x) = 0$  和  $J'_p(x) = 0.5(J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)) = 0$  很快得到精确值. 注意, 在本文后面的叙述中  $r$  和  $\rho$  表示实际坐标, 前后的关系分别是  $r = br$  和  $\rho = \beta\rho$ , 同时取  $S = j_{N+1}$ .

首先我们用连续函数  $f(r) = r^2 \exp(-\pi r^2)$  作为输入函数对  $p$ DQDHT 算法进行测试, 它在  $[0, \infty)$  上

的 2 阶 HT 的精确表达式为

$$g(\rho) = \rho^2 \exp(-\pi\rho^2) \quad (p = 2), \quad (18)$$

以  $g(\rho)$  作为基准, 用  $g^*(\rho)$  表示  $p$ DQDHT 算法的变换值, 在空间频率域定义绝对误差为  $|g - g^*|$ , 并分别用  $\text{Max}E$  表示最大绝对误差,  $\text{Min}E$  表示最小绝对误差,  $\text{Mean}E$  表示平均误差  $|g - g^*|/N$ , 取  $b = \beta = (S/2\pi)^{1/2}$ , 2 阶 HT 的计算结果如表 1 所示.

表 1 用  $p$ DQDHT 计算  $f(r)$  的误差随抽样点数  $N$  的变化

$N$	10	20
$\text{Max}E$	$9.42391 \times 10^{-8}$	$2.58578 \times 10^{-14}$
$\text{Min}E$	$3.62277 \times 10^{-9}$	$1.11316 \times 10^{-16}$
$\text{Mean}E$	$3.66319 \times 10^{-8}$	$7.28397 \times 10^{-15}$

可见, 对于连续函数当抽样点数  $N$  很小时  $p$ DQDHT 算法就有很高的精度, 进一步说明 Dini 展开收敛很快.

图 1 表示函数  $f(r)$  的精确值与经过 40 次 2 阶  $p$ DQDHT 后的结果比较, 计算中空间域截断半径  $b = 4$ , 抽样点数  $N = 100$ . 图中的实线表示精确值, 圆点线表示 2 阶 HT 的数值结果, 它们几乎完全重合. 在 PIV 1.5 GHz 的 CPU, 512 MB 内存的 PC 机上执行程序,  $p$ DQDHT 算法经过 40 次变换共花费的时间为 0.03 s. 可见,  $p$ DQDHT 算法经过多次变换仍保持极高的精度, 而且程序执行速度快.

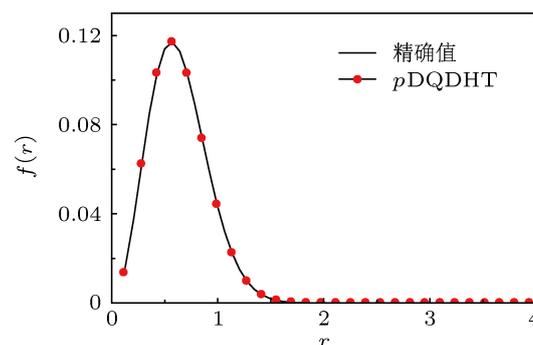


图 1 函数  $f(r)$  的精确值与经过 40 次  $p$ DQDHT 后的结果比较, 其中  $p = 2, b = 4, N = 100$

其次, 我们用 top-hat 函数作为输入函数, 它的定义是  $f(r) = r^p[H(r) - H(r - b)]$ , 这里  $H(r)$  为 Heaviside 阶跃函数, 其  $p$  阶 HT 的精确表达式为

$$g(\rho) = b^{p+1} J_{p+1}(2\pi b\rho) / \rho \quad (p \geq 0, \rho > 0). \quad (19)$$

分别计算经过一次  $p$ DQDHT 和  $p$ QDHT 与 (19) 式随空间频率  $\rho$  变化绝对误差的对数, 再进行误差比较, 它们的动态比较结果如图 2 所示. 计算中空间

域截断半径  $b = 5$ , 抽样点数  $N = 200$ , 空间频率域截断半径  $\beta$  在 20.025 附近. 图 2 是  $p = 3$  时  $p$ DQDHT 和  $p$ QDHT 两种算法的结果比较, 图中整个空间频率范围内  $p$ DQDHT 算法得到的曲线 (实线) 均位于  $p$ QDHT 算法得到的曲线 (圆点线) 的下方, 表示  $p$ DQDHT 算法比  $p$ QDHT 算法具有更高的精度. 图 2 还表现出基于 Dini 级数展开的  $p$ DQDHT 算法与基于 Fourier-Bessel 级数展开的  $p$ QDHT 算法的不同特性, 前者误差较大的地方主要出现在低频端较小的区域内, 在其他的地方保持较高的精度, 这对再进行一次 HT 变换到空间域时减少 Gibbs 现象是非常有益的; 后者在低频端精度较高, 随着频率的增大, 误差越来越大, 特别是在最高频率处误差最大, 因此  $p$ DQDHT 算法更具有优势.

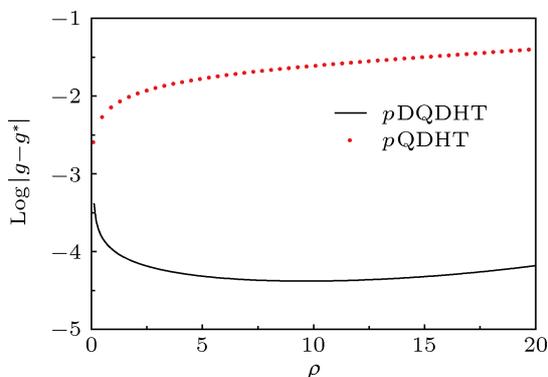


图 2 “top-hat” 函数经过一次  $p$ DQDHT 和  $p$ QDHT 后与精确值绝对误差的对数随空间频率半径变化的比较, 其中  $p = 3$ ,  $b = 5$ ,  $N = 200$

#### 4 $p$ DQDHT 在光束传输中的应用

为了研究  $p$  阶准离散 Hankel 变换在光束传输中的应用, 我们考虑圆对称 4 阶 Bessel 光束  $f(r) = J_4(k_t r) \exp(i4\phi + ik_z z)$  通过凸透镜后的聚焦演变. 让光束入射到半径  $R = 4$  mm, 焦距  $f = 0.5$  m, 位于平面  $z = 0$  的凸透镜上, 并使光束在透镜光轴上对称分布, 波数  $k$  与横向波数  $k_t$  和纵向波数  $k_z$  满足关系  $k^2 = (2\pi/\lambda)^2 = k_t^2 + k_z^2$ .

光束通过透镜后为非傍轴传输, 数值方法上采用分步传输方法, 所以运用  $p$ DQDHT 解决类似于上述光束传输问题的计算步骤可为:

- 1) 选取  $b$ ,  $p$  和  $N$ , 计算程序中所需的 Bessel 函数及其导数的零点, 将 Bessel 函数导数的零点存储于一维数组中;
- 2) 计算矩阵  $C$ , 并使用指针数组按三角形式存储起来;
- 3) 计算  $(1 - p^2/\alpha_n^2)^{-1/2} |J_p^{-1}(\alpha_n)|$ , 将它们值存储于一维数组中;

4) 计算  $z = 0$  处初始光束  $f(r) = J_4(k_t r)$  的值, 乘以光束从透镜前表面傍轴传输到后表面的作用因子  $\exp[ikr^2/(2f)]$  后按复数形式存储于一维数组中 (在 C 和 C++ 中偶地址存实部, 奇地址存虚部);

5) 选取传输步数  $M$ , 计算传输步长  $\Delta z = z/M$ , 再进行分步传输计算:

for  $j = 0, \dots, M$

对  $f(r)$  进行一次  $p$ DQDHT 得空间频率域上的  $g(\rho)$ ;

乘以角谱传递函数  $\exp(i2\pi\Delta z\sqrt{\lambda^{-2} - \rho^2})$ ;

再进行一次  $p$ DQDHT 得空间域上的  $f(r)$ , 存储光强径向分布数据, end.

计算中取光的波长  $\lambda = 632.8$  nm,  $k_t = 19858.32$  m<sup>-1</sup>, 径向截断半径  $b = 4$  mm, 径向取样点数  $N = 256$ , 纵向传输距离  $z = 0.75$  m, 传输步数  $M = 300$ . 按照这些参数利用  $p$ DQDHT 算法编程计算, 得到会聚 Bessel 光束光强  $I(r, z)$  的传播演变如图 3 所示.

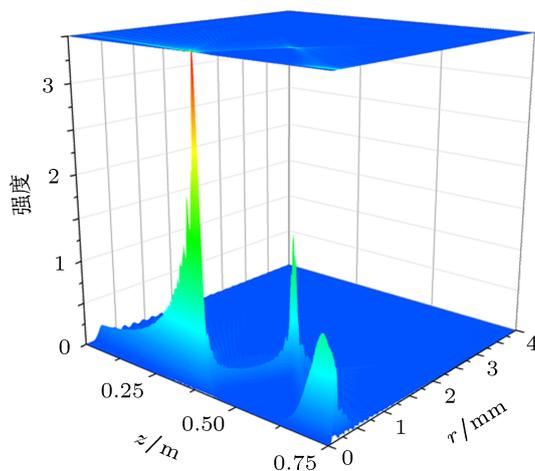


图 3 4 阶会聚 Bessel 光束通过透镜后光强在焦平面附近的传播演变

从图 3 看出, 会聚 Bessel 光束通过凸透镜后在焦平面附近三处会聚, 会聚的峰值并不出现在对称轴上, 而是在以对称轴为中心半径不同的三个圆环上, 这是高阶贝塞尔光束为空心光束的原因. 进一步用数值方法求三个会聚峰值的半径和位置, 得到透镜焦平面前、焦平面上和焦平面后三个峰值光环的半径分别为  $r = 0.062647$  mm,  $0.996897$  mm 和  $0.110658$  mm, 会聚平面的位置分别为  $z = 0.38$  m,  $0.5$  m 和  $0.72$  m, 它们的截面光强分布如图 4 所示. 这些结果与 FFT 算法得到的结果是一致的, 特别是在焦平面上的结果还与文献 [20] 用几何方法得到的会聚圆环的半径  $r = fk_t/k_z$  很好地相符.

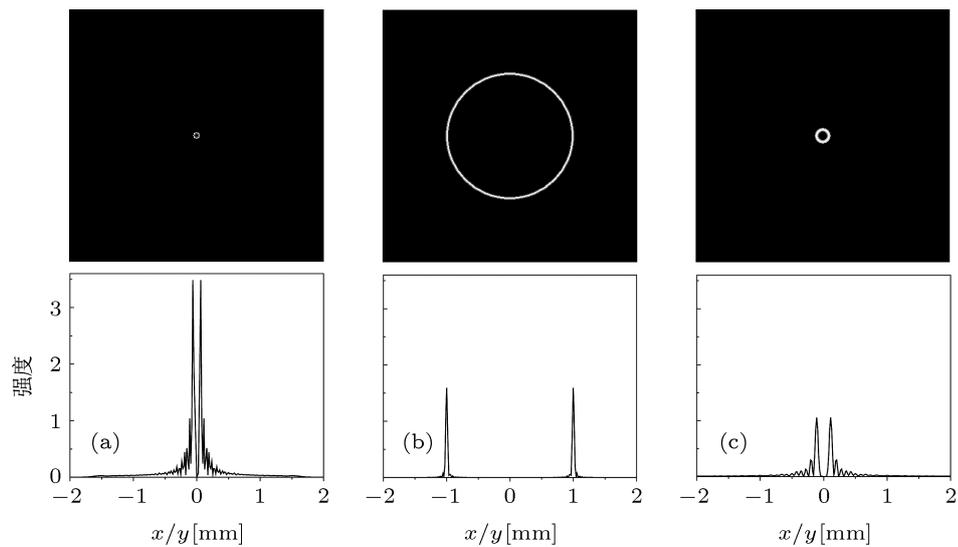


图4 4阶 Bessel 光束通过透镜后不同会聚处的截面光强分布 (a)  $z = 0.38$  m; (b)  $z = 0.5$  m; (c)  $z = 0.72$  m

## 5 结论

基于 Dini 级数展开, 导出了高阶 Hankel 变换的离散表达式, 称为  $p$ DQDHT 算法, 能实现复数或实数形式的 HT. 用向量表示, 可把它们分别写成为输出向量是变换矩阵与输入向量的乘积, 计算变得更简单, 计算速度更快. 讨论了变换矩阵  $C$  的性质, 以及使它成为正交矩阵与两个截断半径乘积  $S$  的关系, 定性分析了  $S$  的取值, 得到  $S = j_{N+1}$  时  $C$  接近于正交矩阵. 为了进一步提高该算法的精度, 定量给出了对  $S$  进行修正的表达式, 同时用数值方法给出了其中的可选参数  $k$  与抽样点数  $N$  的关系.

在算法的实施上, 事先计算出 Bessel 函数导数的零点进行静态存储, 计算变换矩阵  $C$  采用三角形式存储, 以免下一次变换对数据重复计算, 进一步提高了计算速度. 算法中的正变换和逆变换虽然

用了两种表达式, 实际上它们的区别只是截断半径不同, 所以正变换和逆变换可以采用相同的程序段, 只是在每次变换后将两个截断半径的值进行交换即可, 使程序变得简单.

通过两个不同的输入函数对  $p$ DQDHT 算法的测试和光束分步传输的应用实例, 结果表明:  $p$ DQDHT 算法经过多次变换而不丢失精度, 特别适合分步传输的场合, 这是很多 Hankel 变换算法做不到的; 在整个变换区域内,  $p$ DQDHT 算法都具有很高的精度, 特别是在空间频率域的高频端精度更高, 在空间域近轴端精度更高, 这正符合一般实际应用的需要; 程序执行的速度与一般的快速算法相当.

我们相信, 借助本文  $p$ DQDHT 算法在光束分步传输中的应用方法,  $p$ DQDHT 算法在解决物理学各个分支类似的问题中必将发挥重要作用.

- [1] Du G H 1988 *Acta Phys. Sin.* **37** 769 (in Chinese) [杜功焕 1988 物理学报 **37** 769]
- [2] Yan C C, Xue G G, Liu C, Gao S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3058 (in Chinese) [闫长春, 薛国刚, 刘诚, 高淑梅 2005 物理学报 **54** 3058]
- [3] Yang X J, Zang W P, Tian J G, Liu Z B, Zhou W Y, Zhang C P, Zhang G Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2735 (in Chinese) [杨新江, 臧维平, 田建国, 刘智波, 周文远, 张春平, 张光寅 2005 物理学报 **54** 2735]
- [4] Chen G B, Wang H N, Yao J J, Han Z Y, Yang S W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1608 (in Chinese) [陈桂波, 汪宏年, 姚敬金, 韩子夜, 杨守文 2009 物理学报 **58** 1608]
- [5] Siegman E 1977 *Opt. Lett.* **1** 13
- [6] Agrawal G P 1981 *Opt. Lett.* **6** 171
- [7] Magni V, Cerulle G, De Silvestri S 1992 *J. Opt. Soc. Am. A* **9** 2031
- [8] Agnesi A, Reali G C, Patrini G, Tomaselli A 1993 *J. Opt. Soc. Am. A* **10** 1872
- [9] Ferrari J A 1995 *J. Opt. Soc. Am. A* **12** 1812
- [10] Ferrari J A, Perciante D, Dubra A 1999 *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 2581
- [11] Perciante C D 2004 *J. Opt. Soc. Am. A* **2** 1911
- [12] Markham J, Conchello A J 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 621
- [13] Knockaert L 2000 *IEEE Trans. Signal Process.* **48** 1695
- [14] Liu Q H, Zhang Z Q 1999 *Appl. Opt.* **38** 6705
- [15] Cerjan C 2007 *J. Opt. Soc. Am. A* **24** 1609
- [16] Yu L, Huang M, Chen M, Chen W, Huang W, Zhu Z 1998 *Opt. Lett.* **23** 409
- [17] Guizar-Sicarios M, Gutiérrez-Vega J C 2004 *J. Opt. Soc. Am. A* **21** 53
- [18] You K M, Wen S C, Chen L Z, Wang Y W, Hu Y H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3893
- [19] Wang Z, Gao C Q, Xin J T 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 124209 (in Chinese)

- nese) [王铮, 高春清, 辛璟焘 2012 物理学报 **61** 124209]
- [20] Gutierrez-Vega J C, Rodríguez-Masegosa R, Chávez-Cerda S 2003 *Pure Appl. Opt.* **5** 276
- [21] Zhang Q A, Wu F T, Zheng W T, Pu J X 2011 *Sci. Sin. Phys. Mech. Astron.* **41** 1131 (in Chinese) [张前安, 吴逢铁, 郑维涛, 蒲继雄 2011 中国科学: 物理学·力学·天文学 **41** 1131]
- [22] Arfken G B, Weber H J 2001 *Mathematical Methods for Physicists* (California: Harcourt-Academic)
- [23] Wolfram S 1991 *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer* (Massachusetts: Addison-Wesley)

# High order Hankel transform based on Dini expansion and its applications in beam propagation\*

You Kai-Ming<sup>†</sup> Lin Yan-Ling Wang You-Wen Chen Lie-Zun  
Dai Zhi-Ping Lu Shi-Zhuan

(Department of Physics and Electronic Information Science, Hengyang Normal University, Hengyang 421002, China)

(Received 2 February 2013; revised manuscript received 30 March 2013)

## Abstract

Based on Dini series expansion,  $p(> 0)$  order quasi discrete Hankel transform ( $p$ DQDHT) algorithm is deduced. The application of this algorithm in beam propagation is presented.  $p$ DQDHT algorithm is tested with various input functions and used in beam propagation through lens. Experimental results show that the  $p$ DQDHT algorithm possesses a high accuracy compared with existing Hankel transformation algorithms. The  $p$ DQDHT algorithm can be transformed forwardly and inversely and widely used in beam distribution of transmission. The implementing speed is comparable to that of general fast Hankel transform algorithm.

**Keywords:** Dini series expansion, high-order Hankel transform, beam propagation

**PACS:** 02.60.Gf, 42.30.Kq, 42.40.My, 42.25.Bs

**DOI:** 10.7498/aps.62.140203

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant Nos. 12JJ6001, 11A018), the Construct Program of the Key Discipline in Hunan Province, and the Special Funds of the National Natural Science Foundation of China (Grant No.11247313).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: hykmyou@163.com