

## 力梯度辛方法在圆型限制性三体问题中的应用\*

陈云龙 伍歆<sup>†</sup>

(南昌大学理学院, 南昌 330031)

(2013年1月11日收到; 2013年3月27日收到修改稿)

旋转坐标系下的圆型限制性三体问题因含非惯性系所附加的影响部分使得动能不是动量的严格二次型, 可能导致力梯度辛积分算法的应用遇到困难. 从 Lie 算子运算出发, 严格论证了力梯度算子在这种情形下的物理意义仍然像质心惯性坐标系下的圆型限制性三体问题那样是引力的梯度, 而不是引力与非惯性力所得合力的梯度, 表明了力梯度辛方法适合求解旋转坐标系下的圆型限制性三体问题. 通过应用四阶力梯度辛方法、最优化四阶力梯度辛方法和 Forest-Ruth 辛方法分别求解该问题, 进行了数值对比研究, 结果显示最优化型力梯度算法能够取得最好精度. 还应用最优化型算法计算两邻近轨道的 Lyapunov 指数和快速 Lyapunov 指标, 确保高精度辛方法能够贯穿于这些混沌指标计算的全过程, 以便准确刻画此系统的动力学定性性质.

**关键词:** 辛积分器, 圆型限制性三体问题, 混沌, Lyapunov 指数

**PACS:** 05.10.-a, 02.70.-c, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.140501

## 1 引言

辛积分器<sup>[1]</sup>和流形改正方法<sup>[2,3]</sup>都属于几何积分算法<sup>[4]</sup>, 两者同样都能确保能量积分误差在长时间积分中没有长期变化, 但差别在于前者能够保持 Hamilton 系统的辛结构, 而后者却不能. 辛方法因具有这两个优点, 从而成为求解 Hamilton 系统长期演化的最佳数值积分方法, 它已在分子动力学<sup>[5]</sup>、量子力学<sup>[6-8]</sup>、声波<sup>[9]</sup>、等离子体<sup>[10]</sup>、太阳系动力学和相对论天体物理<sup>[11-14]</sup>等领域得到广泛应用.

辛积分器分为显式<sup>[15]</sup>和隐式<sup>[1]</sup>两种形式. 有时也会用到它们的混合形式<sup>[11-14,16-18]</sup>, 但这种混合型本质上还是归结于隐式方法. 显辛方法比隐辛方法具有计算效率方面的优势, 故通常受到学者们的关注. 应当注意它的使用要求 Hamilton 至少要分解成两个可积部分, 例如由动量和坐标分别组成的动能与势能就是一种 Hamilton 分解形式. 二阶 Verlet 辛积分器<sup>[4]</sup>尽管是这种分解形式下的一种简单的显辛方法, 但在辛方法研究中却发挥重要作用, 被认为是获得高阶或高精度辛积分算法的基

础. 直接消去其三阶截断误差项, 若按不对称组合方式可以得到三阶辛方法<sup>[15]</sup>; 若按对称组合方式则可以取得四阶 Forest-Ruth 辛积分器<sup>[19]</sup>, 还能得到 Yoshida 高阶辛积分器<sup>[20]</sup>. 当 Hamilton 分解成主要的未受摄部分和次要的摄动部分并且两部分均可积时<sup>[21]</sup>, Verlet 辛积分器的三阶截断误差中有一项会比另一项大很多. 若将该阶甚至各阶截断误差中的主要项消去但次要项仍保留, 则得到类高阶 (pseudo-high-order) 辛方法<sup>[22,23]</sup>, 还可以取得辛校正器<sup>[24]</sup>. 在太阳系动力学中, 这种摄动分解形式及构造的有关算法与动-势能分解的同阶算法来比显著提高了数值精度. 应该指出摄动分解情形下 Verlet 辛积分器的三阶截断误差中的所谓次要项当实施动-势能分解时与另一项不再有明显的主次之分, 亦即没有很大的量级差异, 将会在算法构造中很有用, 它本质上就是力的梯度. Ruth<sup>[15]</sup>正是认识到这一点, 把它加入势能中再与动能组合求解构造了一个三阶力梯度辛方法. 沿着该思路, 可以设计一系列高阶力梯度辛方法<sup>[25-30]</sup>及其截断误差各项系数平方和最小的最优化型算法<sup>[31,32]</sup>. 不超过四阶的力梯度辛方法各组合系数可以全为正数, 意

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11173012, 11178002) 和南昌大学创新团队项目资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: xwu@ncu.edu.cn

意味着积分过程中的每一子步都用正步长, 这有益于求解不可逆系统. 大量文献<sup>[25-32]</sup>表明力梯度辛方法在 Kepler 二体问题、摄动 Kepler 二体问题、太阳系  $N$  体问题、分子动力学多粒子问题、量子力学薛定谔方程以及 Hénon-Heiles 系统等模拟中比同阶非力梯度辛方法要好一到几个数量级精度, 并且最优化型总要优于没有经过优化处理的算法. 类高阶辛方法、辛校正器和力梯度辛方法实际上都是直接将误差项中的某些部分提取出来加入组合来构造新的算法, 以便使所得算法误差里不再含有该提取部分, 从而改善数值精度. 从这一角度来看, 它们均含有误差校正的意思.

考虑到四阶力梯度辛方法与非力梯度 Forest-Ruth 辛积分器来比具有精度好的优点, 文献<sup>[26]</sup>将其应用于求解惯性坐标系下的圆型限制性三体问题. 这里第三个小天体受到两主天体所给引力的梯度连同引力被一起用来构造算法. 这种处理是合理的, 因为惯性系下的第三体受力在物理上是非常清晰的. 然而, 圆型限制性三体问题的研究大都在旋转坐标系下进行, 这时第三体除受到两主天体引力外还受到旋转坐标系所产生的非惯性力, 使得第三体受力变得复杂起来, 进而导致力梯度算法的应用变得困难, 因为我们不清楚力梯度究竟是哪种力的梯度, 即是关于引力的梯度还是非惯性力的? 也许有人认为应当是针对引力与非惯性力的合力来实施梯度运算, 但这样会使引力与非惯性力对应的 Hamilton 之和不可积, 也就是显辛方法不再适合, 故显辛方法在实际应用中需要将引力与非惯性力分开计算. 因此, 我们不直接从第三体受力分析出发而是改由有关 Lie 算子运算来探讨力梯度辛方法是否适合求解旋转坐标系下的圆型限制性三体问题. 这是本文的一个主要目的. 具体来说, 通过评估比较四阶力梯度辛方法<sup>[25]</sup>、最优化四阶力梯度辛方法<sup>[31]</sup>和 Forest-Ruth 辛方法<sup>[19]</sup>, 我们希望找到适合求解旋转坐标系下的圆型限制性三体问题精度最好的辛积分器. 然后, 利用所挑出的算法计算两邻近轨道的 Lyapunov 指数<sup>[33]</sup>和快速 Lyapunov 指标<sup>[34]</sup>, 达到完全确保高精度辛方法能够贯穿于这些混沌指标计算的全过程, 可为正确揭示系统动力学定性性质服务.

## 2 算法描述

设动能  $T(\mathbf{p})$  是关于  $n$  维动量  $\mathbf{p}$  的二次型  $T(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2$ , 而势能  $V(\mathbf{q})$  仅是  $n$  维坐标  $\mathbf{q}$  的函

数, 它们组成的 Hamilton 函数为

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}). \quad (1)$$

依次定义  $T$  和  $V$  的 Lie 导数算子为

$$A = \sum_{i=1}^n T_i \frac{\partial}{\partial q_i},$$

$$B = - \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (2)$$

上式中,  $T_i = \partial/\partial p_i$ ,  $V_i = \partial/\partial q_i$ , 以下类同. Lie 导数  $A$  分别作用于坐标  $q_i$  和动量  $p_i$ , 实际上就是关于坐标和动量的普通导数, 即  $\dot{q}_i = Aq_i = T_i$ ,  $\dot{p}_i = Ap_i \equiv 0$ , 表明  $A$  仅仅对位置坐标有作用, 故称为位置型算子;  $B$  自然称为动量型算子, 它对  $p_i$  作用就得到力或加速度. 利用这两个算子可以构造二阶 Verlet 辛积分器<sup>[4]</sup>

$$e^{\frac{\tau}{2}B} e^{\tau A} e^{\frac{\tau}{2}B} = e^W, \quad (3)$$

这里,  $\tau$  为步长, 而

$$W = \tau(A+B) + \tau^3(-[A, [B, A]]/12 + [B, [A, B]]/24) + O(\tau^5).$$

在三阶截断误差中, 互逆子

$$C = [B, [A, B]] = [B, AB - BA]$$

$$= BAB - BBA - (ABB - BAB)$$

$$= 2BAB - BBA - ABB.$$

容易验证

$$BBAq_i = BBAp_i \equiv 0,$$

$$ABBq_i = ABBp_i \equiv 0,$$

$$BABq_i \equiv 0, \quad (4)$$

但

$$BABp_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n V_{ij} V_k T_{jk} = \sum_{j=1}^n V_{ij} V_j. \quad (5)$$

于是, 可得

$$C = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} V_j \frac{\partial}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^n \nabla_i \mathbf{f}^2 \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (6)$$

其中, 力  $\mathbf{f} = (-V_1, \dots, -V_n)$ . 显然,  $C$  就是力梯度算子, 与  $B$  属于同类的动量型算子.

既然如此, 可将截断误差中的  $C$  提取出来并和  $B$  等同看待再跟  $A$  组合构造一类更高阶算法, 称为力梯度辛方法. 例如, 一个简单四阶力梯度辛方法<sup>[25]</sup>为

$$S1 = e^{\frac{\tau}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{3}})A} e^{\frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^3}{48}(2-\sqrt{3})C} e^{\frac{\tau}{\sqrt{3}}A}$$

$$\times e^{\frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^3}{48}(2-\sqrt{3})C} e^{\frac{\tau}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{3}})A}. \quad (7)$$

如还要求五阶截断误差各项系数的平方和最小, 则得一个最优化四阶力梯度辛方法 [31]

$$S2 = e^{a\tau B} e^{b\tau A} e^{(0.5-a)\tau B + c\tau^3 C} e^{(1-2b)\tau A} \times e^{(0.5-a)\tau B + c\tau^3 C} e^{b\tau A} e^{a\tau B}, \quad (8)$$

其中, 各步进算子的系数约定如下:

$$\begin{aligned} a &= 0.8789368601680709E - 1, \\ b &= 0.2813980611667719E0, \\ c &= 0.3061810122369770E - 2. \end{aligned}$$

当不考虑  $C$  加入组合式中, 则是通常的辛方法. 常见的例子就是四阶 Forest-Ruth 辛积分器 [19]

$$S3 = e^{\alpha\tau B} e^{\beta\tau A} e^{(0.5-\alpha)\tau B} e^{(1-2\beta)\tau A} \times e^{(0.5-\alpha)\tau B} e^{\beta\tau A} e^{\alpha\tau B}, \quad (9)$$

这里, 两系数为  $\beta = 1/(2 - \sqrt[3]{2})$ ,  $\alpha = \beta/2$ .

### 3 圆型限制性三体问题

本节致力于力梯度型算法在旋转坐标系下的圆型限制性三体问题中的具体实现, 并以非力梯度型为参考评估这些算法的精度优劣, 最后利用所挑选的精度最佳算法计算一些混沌指标.

#### 3.1 物理模型

经典平面圆型限制性三体问题 [35] 揭示的是第三个无限小质量天体在做匀速圆周运动的两主天体的引力作用下的运动情形. 约定两主天体总质量为 1, 质量为  $m_1 = 1 - \mu$  的一体位于质心旋转坐标系内的  $x$  轴上的点  $(-\mu, 0)$ , 而质量为  $m_2 = \mu \leq 1/2$  的另一体位于点  $(1 - \mu, 0)$ . 这样两主天体固联在  $x$  轴上始终保持 1 不变, 但它们以匀角速度 1 做圆运动, 即  $x$  轴围绕原点以匀角速度 1 旋转并不受小天体引力的影响. 在这两主天体的引力作用下小天体的坐标  $\mathbf{q} = (x, y)$  和动量  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$  演化以无量纲 Hamilton 函数表为

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - U(x, y). \quad (10)$$

力函数  $U(x, y)$  具有如下形式

$$\begin{cases} U(x, y) = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \\ r_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2}, \\ r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}, \end{cases}$$

该系统具有正则方程

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x + y, & \dot{y} = p_y - x, \\ \dot{p}_x = p_y + U_x, & \dot{p}_y = -p_x + U_y. \end{cases} \quad (11)$$

容易验证存在 Jacobi 常数

$$C_J \equiv -2H = 2U(x, y) + x^2 + y^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (12)$$

显辛方法的应用并不针对整个系统 (10) 或 (11) 而是将其分离成两个可积部分分别求解. 系统 (10) 的一种分解形式可以是如下的“动能  $T$ ”和“势能  $V$ ”两部分

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y, \\ V = -U(x, y), \end{cases} \quad (13)$$

势能  $V$  来自于两主天体施加给小天体的引力作用部分, 而  $yp_x - xp_y$  是因旋转坐标系为非惯性系而给小天体运动附加的影响部分.

从 (13) 式来看,  $T$  不是动量  $\mathbf{p}$  的二次型, 这使得力梯度算法的应用似乎遇到了困难, 下面力图解决这一问题.

#### 3.2 算法实现

由于  $T$  不是动量  $\mathbf{p}$  的严格二次型, 故其 Lie 导数算子  $A$  不再有方程 (2) 形式, 而是由位置型算子变为动量与位置混合型算子

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^2 \left( T_{p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - T_{q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\ &= (p_x + y) \frac{\partial}{\partial x} + (p_y - x) \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + p_y \frac{\partial}{\partial p_x} - p_x \frac{\partial}{\partial p_y}. \end{aligned} \quad (14)$$

它作用于坐标和动量就得到微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax = p_x + y, & \dot{y} = Ay = p_y - x, \\ \dot{p}_x = Ap_x = p_y, & \dot{p}_y = Ap_y = -p_x. \end{cases} \quad (15)$$

从初始状态量  $(x_0, y_0, p_{x0}, p_{y0})$  出发经过时间  $t$  后获得该方程组的分析解为

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) \\ \quad + t(p_{x0} \cos(t) + p_{y0} \sin(t)), \\ y = y_0 \cos(t) - x_0 \sin(t) \\ \quad + t(p_{y0} \cos(t) - p_{x0} \sin(t)), \\ p_x = p_{x0} \cos(t) + p_{y0} \sin(t), \\ p_y = p_{y0} \cos(t) - p_{x0} \sin(t), \end{cases} \quad (16)$$

这意味着混合算子  $A$  是可积可解的. 关于  $V$  的动量型算子  $B$  也是如此, 但若非惯性系所施加的影响部分  $yp_x - xp_y$  与  $V$  结合便是不可积、不可解的.

当 (14) 式所给算子  $A$  代替 (2) 式中的算子  $A$ , 我们容易证明 (4) 和 (5) 两式仍然成立, 从而 (6) 式也仍然适用, 即动量型算子

$$\begin{aligned} C &= 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 V_{ij} V_k T_{p_j p_k} \frac{\partial}{\partial p_i} \\ &= 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 V_{ij} V_j \frac{\partial}{\partial p_i} \\ &= 2(V_{xx} V_x + V_{xy} V_y) \frac{\partial}{\partial p_x} \\ &\quad + 2(V_{yx} V_x + V_{yy} V_y) \frac{\partial}{\partial p_y}. \end{aligned} \quad (17)$$

这表明算子  $C$  还是两主天体引力的梯度, 并不是两主天体引力与旋转坐标系所附加非惯性力的合力之梯度. 因此, 旋转坐标系下的圆型限制性三体问题仍可如 (1) 式所示 Hamilton 系统那样用力梯度方法求解. 为了更清楚地说明力梯度辛方法的具体实现过程, 我们以算法 S1 为为例列举其从  $l$  步到  $(l+1)$  步的差分格式

$$\begin{aligned} x &= x_l \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] + y_l \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( p_{xl} \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + p_{yl} \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right), \\ y &= y_l \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] - x_l \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( p_{yl} \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - p_{xl} \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right), \\ p_x &= p_{xl} \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] + p_{yl} \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right], \\ p_y &= p_{yl} \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] - p_{xl} \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]; \\ p_x^* &= p_x - \frac{\tau}{2} V_x(x, y) + \frac{\tau^3}{24} (2 - \sqrt{3}) (V_{xx}(x, y) V_x(x, y) \\ &\quad + V_{xy}(x, y) V_y(x, y)), \\ p_y^* &= p_y - \frac{\tau}{2} V_y(x, y) + \frac{\tau^3}{24} (2 - \sqrt{3}) (V_{yx}(x, y) V_x(x, y) \\ &\quad + V_{yy}(x, y) V_y(x, y)); \\ x^\dagger &= x \cos \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) + y \sin \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \left( p_x^* \cos \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) + p_y^* \sin \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \right), \\ y^\dagger &= y \cos \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) - x \sin \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \\ &+ \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \left( p_y^* \cos \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) - p_x^* \sin \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \right), \\ p_x^\dagger &= p_x^* \cos \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) + p_y^* \sin \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right), \\ p_y^\dagger &= p_y^* \cos \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) - p_x^* \sin \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right); \\ p_x^\diamond &= p_x^\dagger - \frac{\tau}{2} V_x(x^\dagger, y^\dagger) \\ &\quad + \frac{\tau^3}{24} (2 - \sqrt{3}) (V_{xx}(x^\dagger, y^\dagger) V_x(x^\dagger, y^\dagger) \\ &\quad + V_{xy}(x^\dagger, y^\dagger) V_y(x^\dagger, y^\dagger)), \\ p_y^\diamond &= p_y^\dagger - \frac{\tau}{2} V_y(x^\dagger, y^\dagger) \\ &\quad + \frac{\tau^3}{24} (2 - \sqrt{3}) (V_{yx}(x^\dagger, y^\dagger) V_x(x^\dagger, y^\dagger) \\ &\quad + V_{yy}(x^\dagger, y^\dagger) V_y(x^\dagger, y^\dagger)); \\ x_{(l+1)} &= x^\dagger \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] + y^\dagger \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( p_x^\diamond \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + p_y^\diamond \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right), \\ y_{(l+1)} &= y^\dagger \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] - x^\dagger \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( p_y^\diamond \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - p_x^\diamond \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right), \\ p_{x_{(l+1)}} &= p_x^\diamond \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] + p_y^\diamond \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right], \\ p_{y_{(l+1)}} &= p_y^\diamond \cos \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] - p_x^\diamond \sin \left[ \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \end{aligned}$$

我们采用 Jacobi 常数  $C_J = 3.12$  及大约相当于木星与太阳质量比参数  $\mu = 0.001$  和初值  $x = 0.29$ ,  $y = p_x = 0$ , 而初值  $p_y$  从能量积分 (10) 式或 Jacobi 积分 (12) 式确定并在开方运算中取正根. 该积分轨道是图 1(a) 所示 Poincaré 截面  $y = 0$  ( $y > 0$ ) 上的一个环, 表明是拟周期有序轨道. 让步长  $\tau$  从 0.01 到 0.1 逐次变大, 可得图 1(b) 所示的每个算法对每个给定步长积分 100000 步后的最大 Jacobi 常数误差. 该图揭示了非力梯度 Forest-Ruth 辛方法 S3 的精度要显著劣于力梯度算法 S1 精度. 还可以看出最优力梯度算法 S2 是最好的.

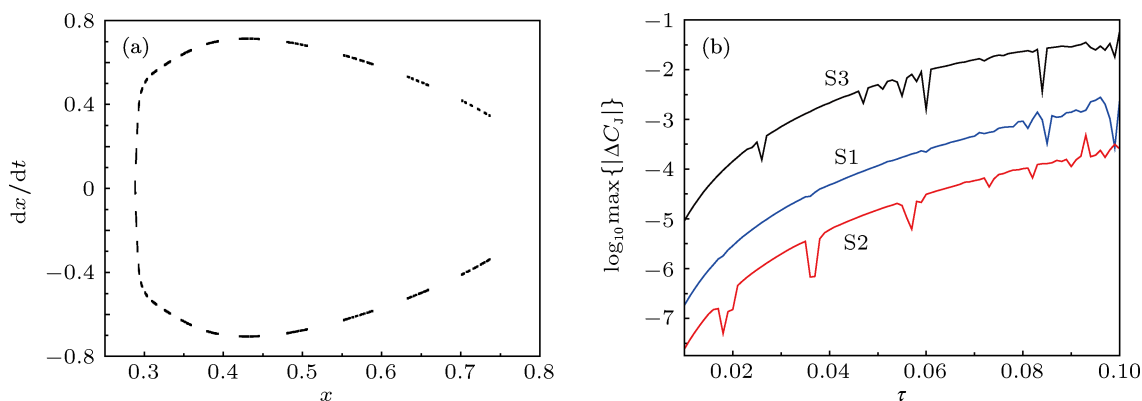


图1 (a) Jacobi 常数  $C_J = 3.12$  的 Poincaré 截面  $y = 0$  上的拟周期有序轨道; (b) 三个算法对每个给定步长积分 100000 步后的最大 Jacobi 常数误差

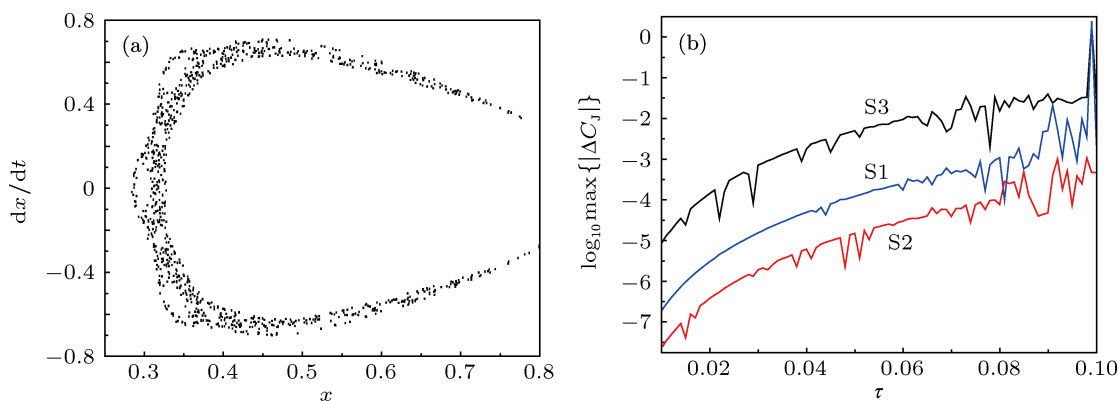


图2 (a) Jacobi 常数  $C_J = 3.06$  的 Poincaré 截面  $y = 0$  上的混沌轨道; (b) 三个算法对每个给定步长积分 100000 步后的最大 Jacobi 常数误差

当仅改变 Jacobi 常数  $C_J = 3.06$  及相应初值  $p_y$  时, 则得图 2(a) 所示 Poincaré 截面上的一些随机分布的点, 表明是混沌轨道. 图 2(b) 的最大 Jacobi 常数误差再次证实三个算法的数值性能优劣关系与有序轨道的情形是完全一致的. 就图 1(b) 和 2(b) 比较来看, 当步长  $\tau$  没有达到 0.1 前, 对于有序和混沌轨道两情形每个算法精度基本上差不多; 但当步长  $\tau$  接近 0.1 时, 针对混沌轨道情况, 两算法 S1 和 S3 已失去数值稳定性, 而算法 S2 仍几乎保持有序轨道的精度.

因此, 无论是对有序轨道还是对混沌轨道进行数值模拟, 我们总是发现力梯度类算法精度要大大优于非力梯度类的, 而最优化型算法能够取得最好精度. 这样, 高精度辛方法的使用能确保所得动力学定性结果的可靠. 下面我们考虑方法 S2 在混沌动力学方面的应用.

### 3.3 混沌指标

除 Poincaré 截面方法外, Lyapunov 指数和快速

Lyapunov 指标等都是区分系统有序与混沌的常用方法. 这些方法克服了 Poincaré 截面限于相空间维数为 3 的应用局限, 并且均以计算两邻近轨道的分离演化为基础来获得.

Lyapunov 指数是衡量两邻近轨道平均指数分离比的指标. 通常采用的是最大 Lyapunov 指数, 定义为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\xi(t)|}{|\xi(0)|}, \quad (18)$$

式中的  $\xi(t)$  和  $\xi(0)$  分别是  $t$  时刻与初始时刻的切向量, 即变分方程之解. (18) 式称为计算 Lyapunov 指数的变分法 [33]. 当然, 它的计算也可用两邻近轨道的差来代替变分方程之解, 称为计算 Lyapunov 指数的两粒子法 [33], 定义如下:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d(0)}, \quad (19)$$

$d(t)$  和  $d(0)$  是两邻近轨道分别在  $t$  时刻与初始时刻的距离. 应当注意初始距离必须适当选择, 如果  $d(0)$  太大, 那么两邻近轨道的差将与变分方程的解

差别太大;但若  $d(0)$  太小,则舍入误差增大.也就是说,  $d(0)$  太大和太小都会导致不正确的 Lyapunov 指数.文献 [36] 认为就双精度而言初始距离的适当选择为  $d(0) = 10^{-8}$ ,还指出应适当考虑重整化次数.对于有界轨道,若  $\lambda > 0$ ,则系统混沌;当  $\lambda = 0$  时,系统被认为是有序的.这是 Lyapunov 指数区分有序和混沌的准则.

注意 (19) 式代替 (18) 式计算 Lyapunov 指数的优点有二:对于复杂的动力系统,如相对论引力系统,可以避免推导复杂变分方程的麻烦;针对 Hamilton 系统来说,可以完全确保辛方法贯穿于 Lyapunov 指数计算的全过程,因为两粒子法就是用辛方法积分运动方程两次来计算 Lyapunov 指数.基于此因,我们采用两粒子法计算 Lyapunov 指数.选取步长  $\tau = 0.01$ ,参数和参考轨道初始条件同上,而邻近轨道初始条件为  $x = 0.29 + 10^{-8}$ ,其他初始条件与参考轨道的相同但初值  $p_y$  相应改变.每积分 10 步,实施一次重整化.于是,我们获得图 3 中的 Lyapunov 指数.图 1 轨道的 Lyapunov 指数  $\lambda$  趋于 0 故为有序的,而图 2 轨道的  $\lambda = 0.023$  则表明其混沌性.

一个比 Lyapunov 指数区分有序与混沌更灵敏、更快的方法是快速 Lyapunov 指标,其定义如下 [37]:

$$FLI = \log_{10} |\xi(t)|. \quad (20)$$

也可用两邻近轨道的差来代替变分方程之解来计算快速 Lyapunov 指标,称为两邻近轨道(或两粒子法)的快速 Lyapunov 指标 [34],定义为

$$FLI = \log_{10} \frac{d(t)}{d(0)}. \quad (21)$$

不同于 (20) 式, (21) 式计算快速 Lyapunov 指标需要重整化,否则,混沌情形的两邻近轨道距离  $d(t)$  达到 1 后出现轨道饱和使其不再增长、计算无法继续.为避免这一问题,每当  $d(t) = 1$  实施重整化,即不改变方向将邻近轨道拉回到与参考轨道相距  $d(0)$  处进行它的下次积分.假设重整化次数为  $k$ ,那么,两粒子法的快速 Lyapunov 指标实际按下式计算

$$FLI = -(k+1) * \log_{10} d(0) + \log_{10} d(t). \quad (22)$$

对于有序和混沌两种情况,切向量长度随时间演化的速度是完全不同的,即有序系统的切向量长度随时间代数式变大,而混沌系统的切向量长度随时间

指数式增长.这一特性可以作为有序与混沌的区分标准.

由于两邻近轨道的快速 Lyapunov 指标具有两粒子法计算 Lyapunov 指数那样的优点,我们考虑它的应用.选择邻近轨道初始条件为  $x = 0.29 + 10^{-9}$ ,其他初始条件和参考轨道的与上面相同但初值  $p_y$  相应改变.实际上,初始距离为  $d(0) \approx 10^{-9}$ ,可以比两粒子法的 Lyapunov 指数的初始距离要小些,而且重整化时间间隔要大很多.如图 4 所示,图 1 轨道的快速 Lyapunov 指标随时间增长缓慢,属于有序轨道类型;图 2 轨道的快速 Lyapunov 指标随时间增长迅速,应归之于混沌轨道一类.

对比图 3 和图 4 还可以看出利用 Lyapunov 指数区分有序与混沌需要积分的时间至少为  $t = 10000$ ,而根据快速 Lyapunov 指标只需积分到  $t = 1000$  即可分辨两轨道类型.快速 Lyapunov 指标由于拥有识别混沌速度快的优点,因而常用来追踪小行星轨道稳定性和研究其他动力学问题 [38-40].

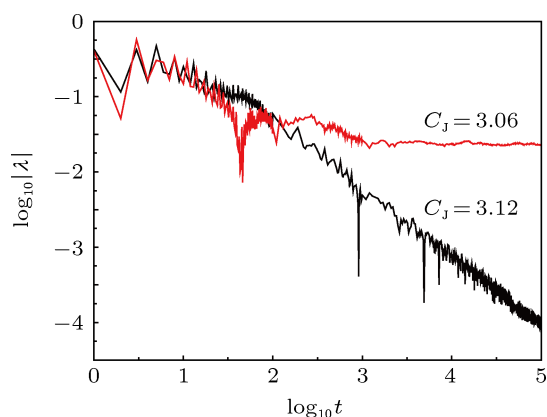


图 3 两轨道的 Lyapunov 指数

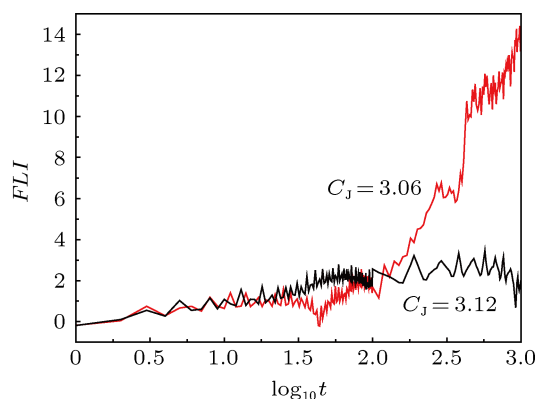


图 4 两轨道的快速 Lyapunov 指标

## 4 结论

旋转坐标系下的圆型限制性三体问题因含非惯性系所附加的影响部分使得动能不是动量的严格二次型, 意味着力梯度辛积分算法的应用似乎遇到了理论方面的困难. 本文从 Lie 算子运算出发严格推导了力梯度算子的物理意义仍然是两主天体对第三个小天体引力的梯度, 并不是两主天体引力与旋转坐标系所附加非惯性力的合力之梯度. 这样, 解决了力梯度辛方法应用的理论问题. 数值实验揭示力梯度类算法精度总要大大优于非力梯度

类的, 而最优化型算法能够取得最好精度. 将最优化型算法计算两邻近轨道的 Lyapunov 指数和快速 Lyapunov 指标可以完全确保高精度辛方法能够贯穿于这些混沌指标计算的全过程, 以便准确刻画动力学定性性质.

未来的工作希望借助这种最优化型辛积分算法和恰当的混沌指标探讨含辐射压的平面圆型限制性三体问题、平面椭圆型限制性三体问题、空间圆型限制性三体问题和空间椭圆型限制性三体问题等动力学性质.

- [1] Feng K, Qin M Z 2009 *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems* (Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Publishing House)
- [2] Zhong S Y, Wu X 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104037
- [3] Mei L J, Wu X, Liu F Y 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 050201
- [4] Hairer E, Lubich C, Wanner G 1999 *Geometric Numerical Integration*. (Berlin: Springer)
- [5] Chi Y H, Liu X S, Ding P Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6320 (in Chinese) [匙玉华, 刘学深, 丁培柱 2006 物理学报 **55** 6320]
- [6] Luo X Y, Liu X S, Ding P Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 604 (in Chinese) [罗香怡, 刘学深, 丁培柱 2007 物理学报 **56** 604]
- [7] Liu X S, Wei J Y, Ding P Z 2005 *Chin. Phys.* **14** 231
- [8] Bian X B, Qiao H X, Shi T Y 2007 *Chin. Phys.* **16** 1822
- [9] Cao Y, Yang K Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1984 (in Chinese) [曹禹, 杨孔庆 2003 物理学报 **52** 1984]
- [10] Hu W P, Deng Z C 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3923
- [11] Zhong S Y, Wu X, Liu S Q, Deng X F 2010 *Phys. Rev. D* **82** 124040
- [12] Zhong S Y, Wu X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090402 (in Chinese) [钟双英, 伍歆 2011 物理学报 **60** 090402]
- [13] Zhong S Y, Liu S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120401 (in Chinese) [钟双英, 刘崧 2012 物理学报 **61** 120401]
- [14] Wu X, Zhong S Y 2011 *Gen. Relat. Gravit.* **43** 2185
- [15] Ruth R D 1983 *IEEE Tran. Nucl. Sci.* **30** 2669
- [16] Preto M, Saha P 2009 *Astrophys. J.* **703** 1743
- [17] Liao X H 1997 *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **66** 243
- [18] Lubich C, Walther B, Braugmann B 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104025
- [19] Forest E, Ruth R D 1990 *Physica D* **43** 105
- [20] Yoshida H 1990 *Phys. Lett. A* **150** 262
- [21] Wisdom J, Holman M 1991 *Astron. J.* **102** 1528
- [22] Preto M, Tremaine S 1999 *Astron. J.* **118** 2532
- [23] Laskar J, Robutel P 2001 *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **80** 39
- [24] Wisdom J, Holman M, Touma J 1996 *Fields Inst. Commun.* **10** 217
- [25] Chin S A 1997 *Phys. Lett. A* **75** 226
- [26] Chin S A, Chen C R 2005 *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **91** 301
- [27] Chin S A 2007 *Phys. Rev. E* **75** 036701
- [28] Xu J, Wu X 2010 *Res. Astron. Astrophys.* **10** 173
- [29] Sun W, Wu X, Huang G Q 2011 *Res. Astron. Astrophys.* **11** 353
- [30] Li R, Wu X 2010 *Science China: Physics, Mechanics & Astronomy* **53** 1600
- [31] Omelyan I P, Mryglod I M, Folk R 2003 *Comput. Phys. Commun.* **151** 272
- [32] Li R, Wu X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7135 (in Chinese) [李荣, 伍歆 2010 物理学报 **59** 7135]
- [33] Wu X, Huang T Y 2003 *Phys. Lett. A* **313** 77
- [34] Wu X, Huang T Y, Zhang H 2006 *Phys. Rev. D* **74** 083001
- [35] Murray C D, Dermott S F 1999 *Solar System Dynamics* (Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press)
- [36] Tancredi G, Sánchez A, Roig F 2001 *Astron. J.* **121** 1171
- [37] Froeschlé C, Lega E 2000 *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **78** 167
- [38] Wu X, Xie Y 2008 *Phys. Rev. D* **77** 103012
- [39] Wang Y, Wu X 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050504
- [40] Wang Y Z, Wu X, Zhong S Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160401 (in Chinese) [王玉诏, 伍歆, 钟双英 2012 物理学报 **61** 160401]

# Application of force gradient symplectic integrators to the circular restricted three-body problem\*

Chen Yun-Long Wu Xin<sup>†</sup>

(School of Science, Nanchang University, Nanchang 330031, Jiangxi)

(Received 11 January 2013; revised manuscript received 27 March 2013)

## Abstract

The kinetic energy of the circular restricted three-body problem in a rotating frame is no longer a standard positive quadratic function of moment, owing to the additional part in the non-inertial rotating frame, which leads to a difficulty in using force gradient symplectic integrators. To address this problem, we show through the calculation of Lie operators that the force gradient operator on the system is still related to the gradient of the gravitational forces from the two main objects rather than that of the resultant force of both the gravitational forces and the non-inertial force exerted by the rotating frame, just as the force gradient operator on the circular restricted three-body problem in an inertial frame. Therefore, it is reasonable to use the gradient symplectic integrators for integrating the circular restricted three-body problem in the rotating frame from a theoretical point of view. Numerical simulations describe that a fourth-order force gradient symplectic method is always greatly superior to the non-gradient Forest-Ruth algorithm in the numerical accuracy, and its optimized version is best. Because of this, the optimized gradient scheme is recommended for calculating chaos indicators, such as Lyapunov exponents of and fast Lyapunov indicators of two nearby trajectories, which is conducive to obtaining a true description of dynamically qualitative properties.

**Keywords:** symplectic integrators, circular restricted three-body problem, chaos, Lyapunov exponents

**PACS:** 05.10.-a, 02.70.-c, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.140501

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11173012, 11178002) and the Program for Innovative Research Team of Nanchang University, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: xwu@ncu.edu.cn