

## 分数阶 Lorenz 系统的分析及电路实现\*

贾红艳<sup>1)†</sup> 陈增强<sup>2)</sup> 薛薇<sup>1)</sup>

1) (天津科技大学自动化系, 天津 300222)

2) (南开大学自动化系, 天津 300071)

(2013年3月12日收到; 2013年3月11日收到修改稿)

频域传递函数近似方法不仅是常用的分数阶混沌系统相轨迹的数值分析方法之一, 而且也是设计分数阶混沌系统电路的主要方法. 应用该方法首先研究了分数阶 Lorenz 系统的混沌特性, 通过对 Lyapunov 指数图、分岔图和数值仿真分析, 发现了其较为丰富的动态特性, 即当分数阶次从 0.7 到 0.9 以步长 0.1 变化时, 该分数阶 Lorenz 系统既存在混沌特性, 又存在周期特性, 从数值分析上说明了在更低维的 Lorenz 系统中存在着混沌现象. 然后又基于该方法和整数阶混沌电路的设计方法, 设计了一个模拟电路实现了该分数阶 Lorenz 系统, 电路中的电阻和电容等数值是由系统参数和频域传递函数近似确定的. 通过示波器观测到了该分数阶 Lorenz 系统的混沌吸引子和周期吸引子的相轨迹图, 这些电路实验结果与数值仿真分析是一致的, 进一步从物理实现上说明了其混沌特性.

**关键词:** 分数阶系统, Lorenz 系统, 分岔分析, 电路实现

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Ac

**DOI:** 10.7498/aps.62.140503

## 1 引言

尽管分数阶的微积分理论很可能在 300 多年前就已经出现了, 但在 1960 年以前, 关于分数阶系统的研究很少能引起研究者的关注<sup>[1,2]</sup>. 这或许是由于存在着许多不一致的微积分定义, 或许是由于缺乏对分数阶微积分的充分的几何解释<sup>[3]</sup>. 直到近几十年, 尤其当发现一些实际的物理系统展现出分数阶动态特性以后, 例如, 管道的边界层效应、电解电极、黏弹性受阻结构等过程中都存在分数阶动态特性<sup>[4-7]</sup>. 关于分数阶系统的研究开始引起了越来越多的关注, 随后对分数阶系统中的混沌动态研究逐渐成为了一个研究热点, 相继有一些分数阶混沌系统被提出和研究, 例如, 分数阶的 Chua's 电路<sup>[1]</sup>、分数阶的 Lorenz 系统<sup>[3]</sup>、分数阶的 Chen 系统<sup>[8-10]</sup>、分数阶的 Lü 系统<sup>[11]</sup>、分数阶的神经网络<sup>[12]</sup>、分数阶的 Duffing 振子<sup>[13]</sup>等.

通常认为在维数低于 3 的系统中, 不能发现混

沌动态, 而在分数阶系统中存在混沌动态使得在维数低于 3 的系统中发现混沌现象成为可能. 在更低维的系统中发现混沌现象或许会成为是一个研究动力, 促使研究者们更进一步地分析和研究分数阶混沌系统. 这里所说的系统维数是指系统中所有的微分方程的阶次的总和. 此外, 出于应用的需要, 关于分数阶混沌同步和控制研究以及电路设计等也正逐渐成为了一个研究热点<sup>[14-20]</sup>. 分数阶混沌理论的研究工作将为混沌应用提供一些新的技术手段, 从而促进混沌应用的发展.

然而由于对分数阶混沌的研究刚刚起步, 上述关于分数阶混沌系统的研究绝大多数都是通过 Lyapunov 指数、吸引子相轨迹图、电路仿真等数值仿真分析方法说明系统的混沌动态. 而分数阶混沌系统的分岔分析以及硬件实现等却很少涉及. 本文将主要通过分岔分析和模拟电路实现对分数阶 Lorenz 系统的混沌特性进行研究. 前者可以给出分数阶系统随参数变化的演化过程, 分析系统的一些动态特性, 找到系统中的混沌吸引子和周期吸引子.

\* 国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 11202148)、国家自然科学基金 (批准号: 61174094)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20090031110029) 和天津科技大学科学研究基金 (批准号: 20110124) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jiahy@tust.edu.cn

后者不仅可以帮助从物理意义上说明混沌的存在性,而且可以为分数阶混沌应用提供电路模型.

2003年, Grigorenko 和 Grigorenko [3] 分析了分数阶 Lorenz 系统的混沌动态, 不仅给出了当系统维数大于或等于 2.91 时的一些吸引子相轨迹图和分析, 而且也给出了当维数小于或等于 2.91 时, 该系统不存在混沌动态的结论. 但非常遗憾的是, 2003 年在和 Grigorenko 的私人通信中, Li 证实了文献 [3] 中的结论是错误的, 并于 2004 年在文献 [2] 中做了说明. 2009 年 Yu 等 [21] 进一步研究了分数阶 Lorenz 系统且给出了其平衡点的稳定性分析, 说明了该系统的 Hopf 分岔现象, 同时也给出了 2.96 维的混沌吸引子的数值仿真图. 那么在更低维的分数阶 Lorenz 系统是否存在混沌动态呢?

本文在上述研究的基础上, 首先对分数阶 Lorenz 系统进行了研究, 发现在更低维的分数阶 Lorenz 系统存在着混沌现象. 然后, 为进一步说明混沌特性随参数变化的演化行为, 又给出了不同分数阶次的系统的 Lyapunov 指数图、分岔图和吸引子相轨迹图, 通过数值分析方法说明了分数阶 Lorenz 系统的混沌特性, 即数值仿真结果和分岔图是一致的. 最后, 基于整数阶混沌电路的设计方法 [22-31], 用模拟电路实现了该分数阶 Lorenz 系统, 通过模拟示波器观察到了与数值仿真一致的结果. 不仅从物理意义上说明了分数阶 Lorenz 系统的混沌特性, 也为混沌应用提供了技术上的准备.

## 2 分数阶 Lorenz 系统及其分形分析

### 2.1 分数阶 Lorenz 系统

最近, Grigorenko 和 Grigorenko 分析了分数阶 Lorenz 系统的混沌动态, 该系统可以被描述为

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = a(y-x), \\ \frac{d^\beta y}{dt^\beta} = cx - xz + dy, \\ \frac{d^\gamma z}{dt^\gamma} = xy - bz, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $a, b, c, d$  是系统参数,  $\alpha, \beta, \gamma$  是分数阶次. 在文献 [2, 3, 21] 中分别对该系统进行了数值仿真分析和平衡点的稳定性分析等研究, 分别说明了该分数阶系统在 2.91 维和 2.96 维的混沌特性. 现选取

$a = 40, b = 3, c = 10, d = 25, \alpha = \beta = \gamma = 0.9$  时, 通过数值仿真可以观察到该分数阶系统在 2.7 维的一个混沌吸引子的相轨迹, 如图 1 所示.

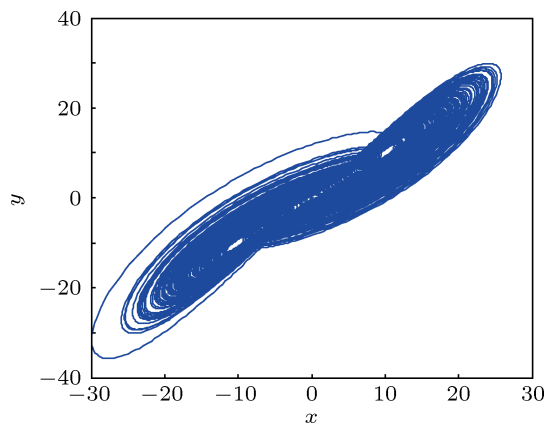


图 1 分数阶 Lorenz 系统的混沌吸引子 ( $\alpha = \beta = \gamma = 0.9$ )

### 2.2 分数阶 Lorenz 系统分形分析和数值仿真

然而, 仅仅凭借图 1 不能说明分数阶 Lorenz 系统的混沌动态. 为进一步对其混沌特性加以验证, 下面将通过 Lyapunov 指数图和分岔图对其进行进一步研究. 本文中采用的分数阶微分为 Riemann-Liouville 定义:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2)$$

那么, 在该定义下的 Laplace 变换为

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\}, \quad (3)$$

这样, 传递函数  $1/s^\alpha$  可以用一个近似的整数阶传递函数表示. 实际上当研究分数阶系统的混沌动态时, 频域传递函数近似方法是常用的数值方法之一, 这种方法在很多研究中常被采用 [1,2,32,33]. 且误差不会超过 2 dB. 本文分别采用了文献 [1, 33] 中所给出的两种不同的频域近似, 对分数阶 Lorenz 系统进行了研究, 通过对 Lyapunov 指数图、分岔图和数值仿真分析, 都发现了分数阶 Lorenz 系统的混沌动态. 鉴于篇幅原因, 本文只给出了采用文献 [33] 的频域近似方法的分析结果. 其中所用到的近似函数分别为

$$\frac{1}{s^{0.9}} = \frac{2.2675(s+1.292)(s+215.4)}{(s+0.01292)(s+2.154)(s+359.4)}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{s^{0.8}} = \frac{5.3088(s+0.1334)(s+2.371)(s+42.17)(s+749.9)}{(s+0.01334)(s+0.2371)(s+4.217)(s+74.99)(s+1334)}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{s^{0.7}} = \frac{9.3633(s+0.06449)(s+0.578)(s+5.179)(s+46.42)(s+416)}{(s+0.01389)(s+0.1245)(s+1.116)(s+10)(s+89.62)(s+803.1)}. \quad (6)$$

同时, 基于连续整数阶混沌系统 Lyapunov 指数的 Jacobian 计算方法, 本文计算了分数阶 Lorenz 系统的 Lyapunov 指数. 与整数阶系统计算方法不同的是, 在计算不同分数阶次 Lorenz 系统的 Lyapunov 指数时, 本文将整数阶的积分器  $1/s$  转换为分数阶的积分器  $1/s^\alpha$ , 就可以得到系统的相应的分数阶次的 Lyapunov 指数.

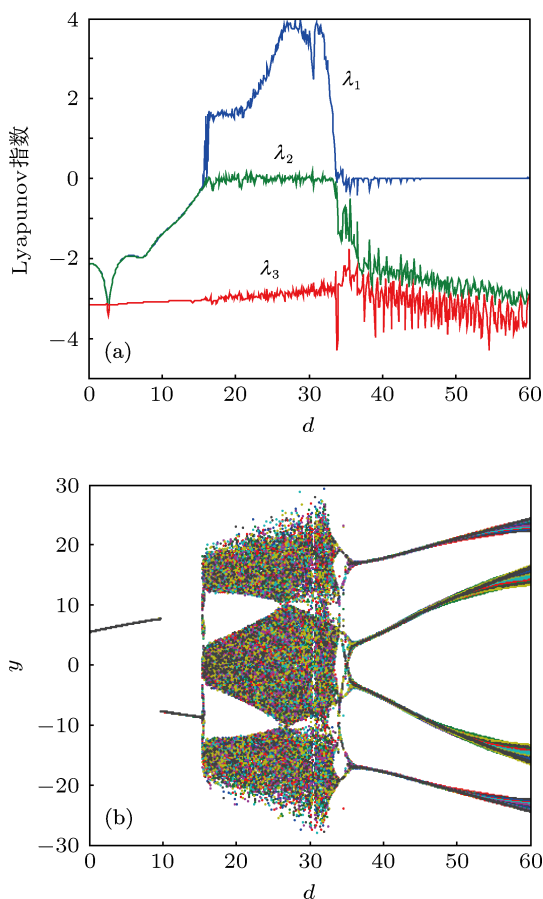


图2 分数阶次为  $\alpha = \beta = \gamma = 0.9$  的 Lorenz 系统的 Lyapunov 指数图和分岔图 (a) Lyapunov 指数图; (b) 分岔图

这样当  $a = 40, c = 10, b = 3$ , 变化参数  $d$  时, 可以得到分数阶次为  $\alpha = \beta = \gamma = 0.9$ , 系统维数为 2.7 的 Lorenz 系统的 Lyapunov 指数图和分岔图, 如图 2 所示. 通过对该 Lyapunov 指数图和分岔图分析, 可以发现在 2.7 维的 Lorenz 系统的确存在混沌特性. 采用相同的方法, 也可以分别得到分数阶次为 0.8 和 0.7, 系统维数为 2.4 和 2.1 的 Lorenz 系统的

Lyapunov 指数图和分岔图, 如图 3 和图 4 所示.

通过对上述 Lyapunov 指数图和分岔图的分析, 可以发现当分数阶次从 0.7 到 0.9 以步长 0.1 变化时, 即系统维数从 2.1 到 2.7 以步长 0.3 变化时, 分数阶 Lorenz 系统不仅存在混沌特性, 而且也存在周期特性. 为了进一步验证我们的分析, 本文中也给出了一些不同分数阶次或系统维数的数值仿真图. 现选取  $a = 40, b = 3, c = 10$ , 当分数阶 Lorenz 系统的分数阶次从 0.7 到 0.9 变化时, 其  $x-y$  平面的相轨迹图分别如图 5 所示. 其中当分数阶次为 0.9,  $a = 40, b = 3, c = 10$ , 分别取  $d = 40, d = 33.8$  时, 分数阶 Lorenz 系统为单周期吸引子和双周期吸引子, 如图 5(a) 和 5(b) 所示; 当分数阶次为 0.8,  $a = 40, b = 3, c = 10$ , 分别取  $d = 40$  和  $d = 41.7$  时,

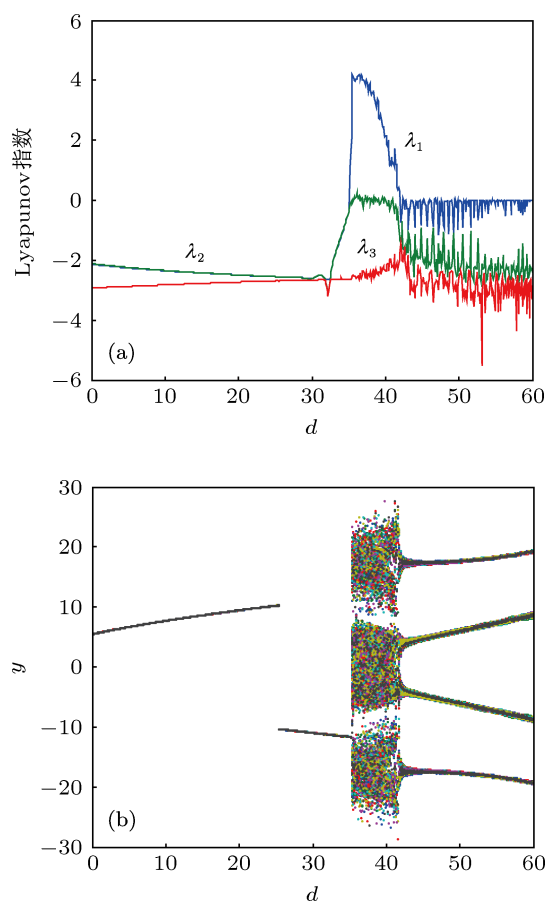


图3 分数阶次为  $\alpha = \beta = \gamma = 0.8$  的 Lorenz 系统的 Lyapunov 指数图和分岔图 (a) Lyapunov 指数图; (b) 分岔图

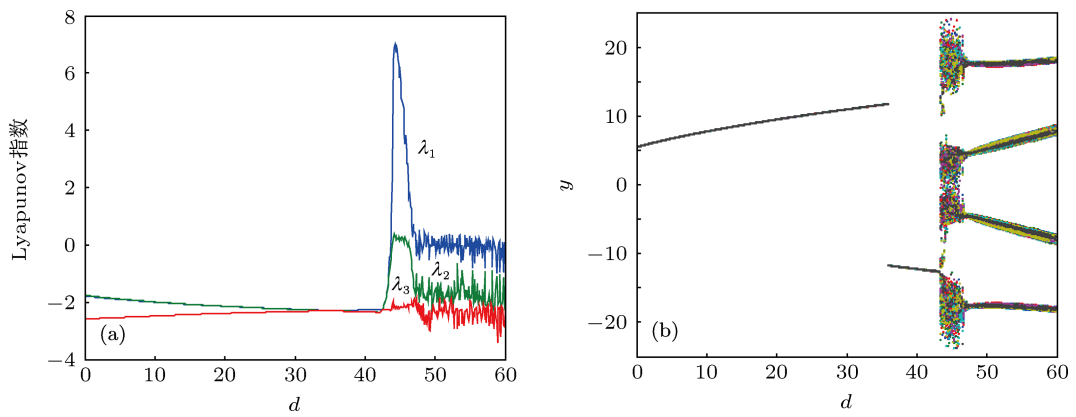


图4 分数阶次为  $\alpha = \beta = \gamma = 0.7$  的 Lorenz 系统的 Lyapunov 指数图和分岔图 (a) Lyapunov 指数图; (b) 分岔图

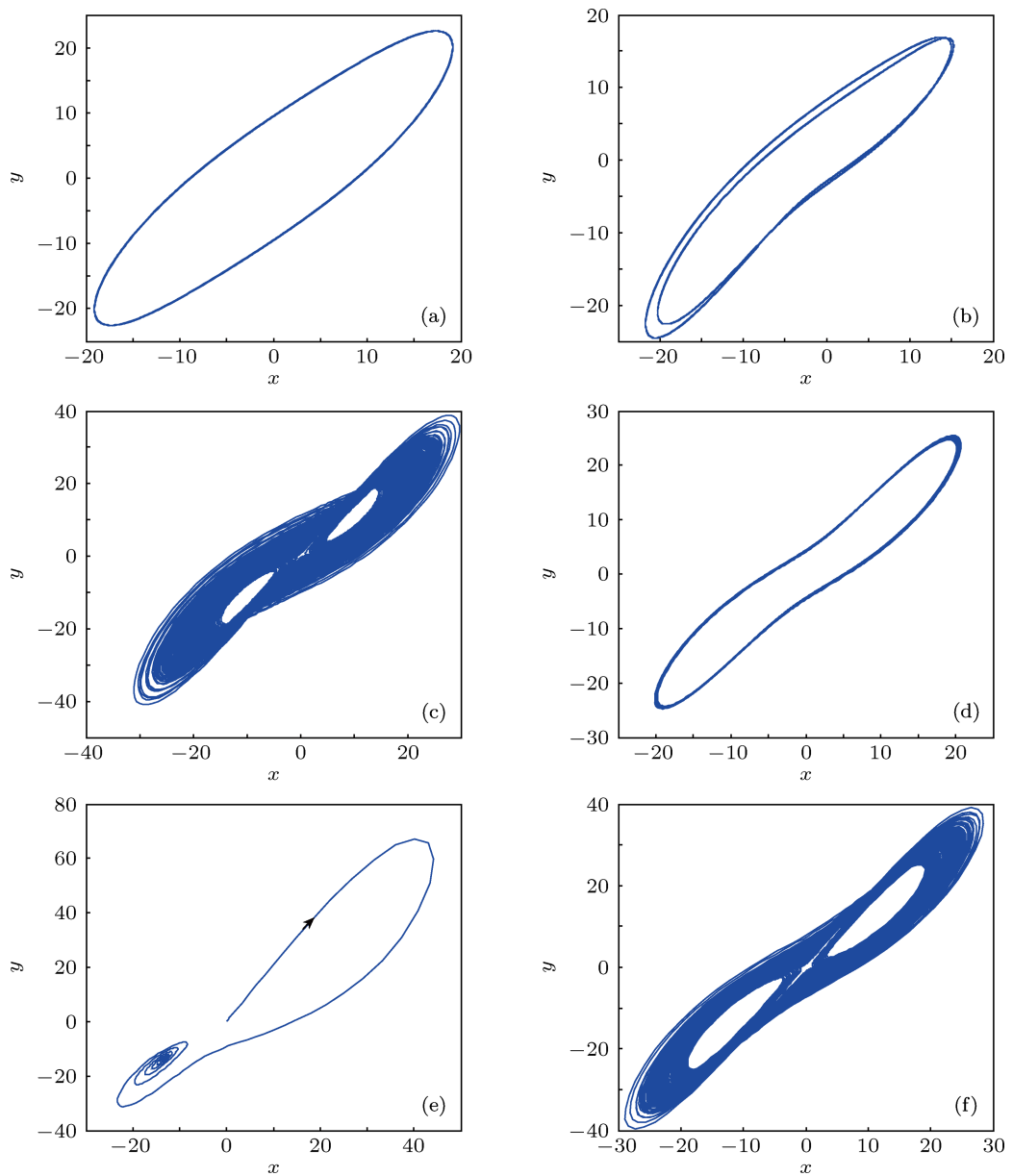


图5 分数阶 Lorenz 系统的  $x$ - $y$  平面的吸引子相轨迹 (a)  $\alpha = \beta = \gamma = 0.9, d = 40$  时单周期吸引子; (b)  $\alpha = \beta = \gamma = 0.9, d = 33.8$  时双周期吸引子; (c)  $\alpha = \beta = \gamma = 0.8, d = 40$  时混沌吸引子; (d)  $\alpha = \beta = \gamma = 0.8, d = 41.7$  时周期吸引子; (e)  $\alpha = \beta = \gamma = 0.7, d = 40$  时渐进稳定的相轨迹; (f)  $\alpha = \beta = \gamma = 0.7, d = 46$  时混沌吸引子

分数阶 Lorenz 系统为混沌吸引子和周期吸引子, 如图 5(c) 和 (d) 所示; 当分数阶次为 0.7,  $a = 40$ ,  $b = 3$ ,  $c = 10$ , 分别取  $d = 40$  和  $d = 46$  时, 分数阶 Lorenz 系统为渐进稳定的相轨迹和混沌吸引子, 如图 5(e) 和 (f) 所示. 考虑到篇幅原因, 本文仅给出部分吸引子的相轨迹图. 通过数值仿真观察到的吸引子相轨迹与指数图和分岔图所呈现的动态特性是一致的.

### 3 分数阶 Lorenz 系统的电路实现

为了进一步从物理意义上验证分数阶 Lorenz 系统的混沌特性, 基于整数阶混沌电路的设计方法和频域近似方法, 使用电阻、电容、模拟运算放大器 LF347N 和乘法器 AD633, 本文也设计了一个模拟电路实现了 0.9 阶次的分数阶 Lorenz 系统, 如图 6 所示. 其中  $R_5 = R_{15} = R_{24} = 1.55 \text{ M}\Omega$ ,

$R_6 = R_{16} = R_{25} = 62 \text{ M}\Omega$ ,  $R_7 = R_{17} = R_{26} = 2.5 \text{ k}\Omega$ ;  $C_1 = C_4 = C_7 = 0.73 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = C_5 = C_8 = 0.52 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_3 = C_6 = C_9 = 1.1 \text{ }\mu\text{F}$ , 上述电阻和电容的数值都是根据 0.9 阶次的频域近似确定的.  $R_1 = R_2 = 2.5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = R_8 = R_9 = R_{10} = R_{13} = R_{18} = R_{19} = R_{22} = R_{27} = R_{28} = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = R_{12} = R_{14} = R_{21} = R_{23} = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{20} = 33.3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{11}$  是可调电阻, 这些电阻阻值都是根据分数阶 Lorenz 系统的系统参数确定的, 其中  $R_{11}$  随着系统 (1) 中的参数  $d$  的变化而变化. 这样当调节可调电阻  $R_{11}$  时, 可以通过示波器观测到混沌吸引子或周期吸引子的相轨迹, 本文分别给出了  $x$ - $y$  和  $y$ - $z$  平面的混沌吸引子、双周期吸引子和单周期吸引子的相轨迹图, 如图 7 所示. 通过与数值仿真的结果比较, 可以发现分数阶 Lorenz 系统的数值仿真、分形分析、电路实现的结果是一致的.

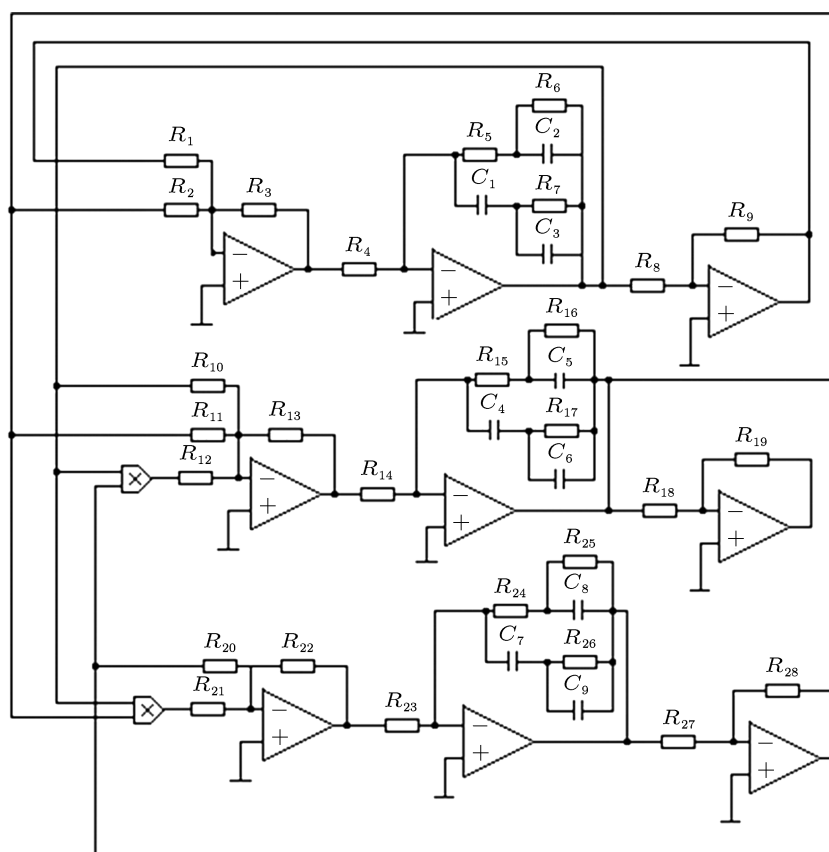


图 6 分数阶 Lorenz 系统的模拟电路

### 4 结论

采用频域传递函数近似方法, 研究了分数阶 Lorenz 系统, 分别从系统的 Lyapunov 指数图、分

岔图和吸引子相轨迹图等数值仿真分析验证了其混沌特性. 与已有的研究不同的是, 本文发现了该分数阶 Lorenz 系统丰富的动态特性, 当分数阶次从 0.7 到 0.9 以步长 0.1 变化时, 即系统维数从 2.1 到

2.7 以步长 0.3 变化时, 分数阶 Lorenz 系统不仅都存在混沌特性, 而且也都存在周期特性. 另外, 也设计了一个模拟电路实现了分数阶次为 0.9 的 Lorenz 系统, 且通过示波器观测到的相轨迹图同数值仿真分析是一致的, 从物理意义上进一步验证了分数阶

Lorenz 系统的混沌特性. 上述研究结果表明, 在更低维的 Lorenz 系统中也存在着混沌特性. 本文的研究工作或许将为混沌应用提供更为丰富的分数阶模型, 为其应用提供技术上的准备.

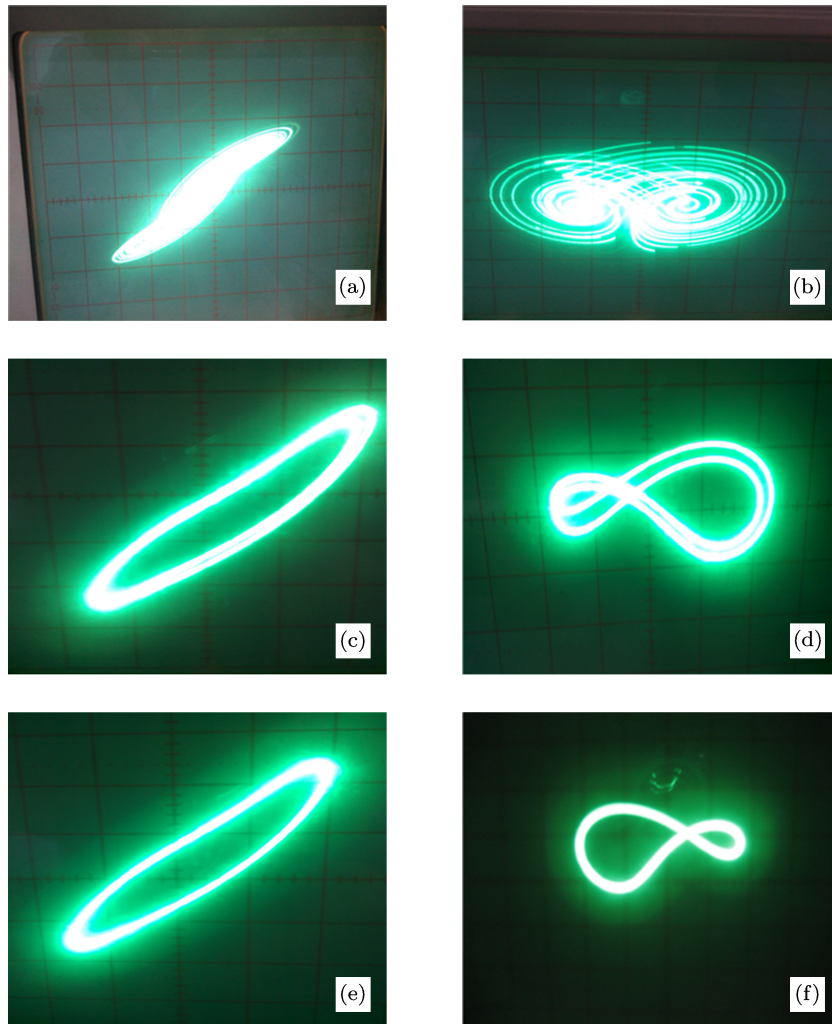


图 7 示波器观测到的分数阶 Lorenz 系统的相轨迹 (a)  $x$ - $y$  平面混沌吸引子; (b)  $y$ - $z$  平面混沌吸引子; (c)  $x$ - $y$  平面双周期吸引子; (d)  $y$ - $z$  平面双周期混沌吸引子; (e)  $x$ - $y$  平面单周期吸引子; (f)  $y$ - $z$  平面单周期吸引子

- [1] Hartley T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications* **42** 485
- [2] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [3] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101
- [4] Ichise M, Nagayanagi Y, Kojima T 1971 *J. Electroanal. Chem.* **33** 253
- [5] Bagley R L, Calico R A 1991 *J. Guid. Contr. Dyn.* **14** 304
- [6] Sugimoto N 1991 *J. Fluid Mech.* **25** 631
- [7] Torvik P J, Bagley R L 1984 *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **51** 294
- [8] Lu J G, Chen G R 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 685
- [9] Li C P, Guo J P 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 443
- [10] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 549
- [11] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [12] Huang X, Zhao Z, Wang Z, Li Y X 2012 *Neurocomputing* **94** 13
- [13] Ge Z M, Qu C Y 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **34** 262
- [14] Hu J B, Xiao J, Zhao L D 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110515 (in Chinese) [胡建兵, 肖建, 赵灵东 2011 物理学报 **60** 110515]
- [15] Wu C J, Zhang Y B, Yang N N 2011 *Chin. Phys. B* **20** 060505
- [16] Chen L P, Chai Y, Wu R W, Sun J, Ma T D 2012 *Phys. Lett. A* **376** 2381
- [17] Wang Z, Huang X, Zhao Z 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 999
- [18] Li H Q, Liao X F, Lou M W 2012 *Nonlinear Dyn.* **68** 137
- [19] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物

- 理学报 56 6865]
- [20] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣, 刘崇新, 王发强, 李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
- [21] Yu Y G, Li H X, Wang S, Yu J Z 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **1181**
- [22] Yu S M, Lü J H, Chen G R 2007 *Phys. Lett. A* **364** 244
- [23] Yang X S, Li Q D, Chen G R 2003 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **31** 637
- [24] Li Y X, Tang W K S, Chen G R 2005 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **33** 235
- [25] Jia H Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4469 (in Chinese) [贾红艳, 陈增强, 袁著祉 2009 物理学报 **58** 4469]
- [26] Wang G Y, He H L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4014
- [27] Wang G Y, Liu J B, Zheng X 2007 *Chin. Phys.* **16** 2278
- [28] Zhang Z X, Yu S M 2009 *Chin. Phys. B* **18** 119
- [29] Yu S M, Yu Z D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6859 (in Chinese) [禹思敏, 禹之鼎 2008 物理学报 **57** 6859]
- [30] Liu Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1439 (in Chinese) [刘扬正 2008 物理学报 **57** 1439]
- [31] Liu Y Z, Lin C S, Li X C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060507 (in Chinese) [刘扬正, 林长圣, 李心朝 2011 物理学报 **60** 060507]
- [32] Charef A, Sun Y Y, Tsao Y Y 1992 *IEEE Trans. Autom. Control* **37** 1465
- [33] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 339

# Analysis and circuit implementation for the fractional-order Lorenz system\*

Jia Hong-Yan<sup>1)†</sup> Chen Zeng-Qiang<sup>2)</sup> Xue Wei<sup>1)</sup>

1) (Department of Automation, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China)

2) (Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China)

(Received 12 March 2013; revised manuscript received 11 March 2013)

## Abstract

Transfer function approximation in frequency domain is not only one of common numerical analysis methods studying portraits of fractional-order chaotic systems, but also a main method to design their chaotic circuits. According to it, in this paper we first investigate the chaotic characteristics of the fractional-order Lorenz system, find some more complex dynamics by analyzing Lyapunov exponents diagrams, bifurcation diagrams and phase portraits, that is, we display the chaotic characteristics as well as periodic characteristics of the system when changing fractional-order from 0.7 to 0.9 in steps of 0.1, and show that the chaotic motion exists in the a lower-dimensional fractional-order Lorenz system. Then, according to transfer function approximation and the approach to designing integer-order chaotic circuits, we also design an analog circuit to implement the fractional-order system. The resistors and capacitors in the circuit are selected according to the system parameters and transfer function approximation in frequency domain. Some phase portraits including chaotic attractors and periodic attractors are observed by oscilloscope, which are coincident well with numerical simulations, and the chaotic characteristics of the fractional-order Lorenz system are further proved by the physical implementation.

**Keywords:** fractional-order system, Lorenz system, bifurcation analysis, circuit implementation

**PACS:** 05.45.—a, 05.45.Pq, 05.45.Ac

**DOI:** 10.7498/aps.62.140503

\* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11202148), the Natural Science Foundation of China (Grant No. 61174094), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20090031110029), and the Research Fund of Tianjin University of Science and Technology, China (Grant No. 20110124).

† Corresponding author. E-mail: jiahy@tust.edu.cn