量子光学态的 Ridgelet 变换*

余海军^{1)†} 钟国宝¹⁾²⁾ 马建国¹⁾ 任刚¹⁾

(淮南师范学院物理与电子信息系,淮南 232038)
 (安徽大学物理与材料科学学院,合肥 230039)
 (2013年2月4日收到;2013年3月30日收到修改稿)

利用有序算符内积分技术推导出一个有用的双模算符正规乘积公式. 然后在量子力学框架下, 计算出相干态、特殊压缩相干态、中介纠缠态表象的 Radon 变换. 在此基础上, 通过选取"墨西哥帽"母小波函数, 分别分析了以上三种量子光学态的 Ridgelet 变换.

 关键词: 有序算符内积分技术, Radon 变换, Ridgelet 变换

 PACS: 42.50.-p

 DOI: 10.7498/aps.62.144203

1 引 言

光学 Ridgelet 变换作为一种新的多尺度分析 方法,在数学分析、信号与图像处理等方面有着极 其广泛的应用前景^[1]. Ridgelet 变换的基本理论由 Candes^[2] 在其博士学位论文中建立, Starck^[3,4] 在后 续的一系列研究工作中逐步拓展和完善. 其核心思 想是先将直线奇异经过 Radon 变换转化为"点奇 异", 再在 Radon 域中用小波处理. 具体来说, 函数 $f(x_1, x_2)$ 的 Ridgelet 变换定义式为

$$W(\mu, s, \theta) = \iint_{\infty} f(x_1, x_2) \psi_{\mu, s, \theta}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (1)$$

借助于 $f(x_1, x_2)$ 的 Radon 变换定义式

$$R_f(\theta, t) = \iint_{\infty} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx_1 dx_2, \qquad (2)$$

(1) 式可写为

$$W_f(\mu, s, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\theta, t) \psi\left(\frac{t-s}{\mu}\right) dt.$$
 (3)

(3) 式说明, 给定函数 *f*(*x*₁, *x*₂) 的 Radon 变换一 个切片: 幅角变量 θ 为常数而变量 *t* 是变化的, 再 对这个切片进行一元小波变换就得到了该函数的 Ridgelet 变换. 所以 Ridgelet 变换也可以看作是一元小波的一种特殊的应用.

文献 [5—11] 从量子力学幺正变换的观点, 通 过改写经典小波积分变换, 定义了量子力学态的小 波变换. 受到这一思想的启发, 在量子力学框架下, 二维空间的 Radon 变换式可以改写为

$$R_{f}(\theta, t) = \iint_{\infty} \langle x_{1}, x_{2} | f \rangle \,\delta(x_{1} \cos \theta + x_{2} \sin \theta - t) \,\mathrm{d}x_{1} \,\mathrm{d}x_{2}, \quad (4)$$

式中的 $f(x_{1}, x_{2}) = \langle x_{1}, x_{2} | f \rangle$ 是量子力学态 $| f \rangle$ 在坐
标表象中的投影.

由此给我们提出了一个新的问题, 既然量子 光学态可以有 Radon 变换, 那么我们是否可以进 一步研究其 Ridgelet 变换呢? 基于这一想法, 本文 开展了相关研究工作. 首先利用有序算符内积分 (IWOP) 技术^[12,13] 推导出一个双模算符正规乘积 公式, 然后在量子力学框架下, 计算出相干态、特 殊压缩相干态、中介纠缠态表象的 Radon 变换, 最 后在 Radon 变换的基础上给出以上三种量子光学 态的 Ridgelet 变换结果.

2 一个双模算符正规乘积公式

为了计算出双模特殊压缩相干态和中介纠缠

© 2013 中国物理学会 Chinese Physical Society

http://wulixb.iphy.ac.cn

^{*}安徽高校省级自然科学研究项目(批准号: KJ2011Z359, KJ2012Z383)资助的课题.

[†]通讯作者. E-mail: haijun20030@163.com

态表象的 Radon 变换,首先利用 IWOP 技术来推导 一个有用的双模正规乘积公式.已知双模相干态满 足归一化条件

$$\int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2| = 1,$$

利用双模真空态的正规乘积形式 $|00\rangle\langle 00| =: exp(-a^{\dagger}a - b^{\dagger}b):, 可得,$

$$\begin{split} &\exp(\xi a^2 + \eta a + \varepsilon b^2 + \lambda b + vab) \\ &\times \exp(\alpha a^{\dagger} + \beta b^{\dagger} + \gamma a^{\dagger} b^{\dagger}) \\ &= \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} \exp(\xi a^2 + \eta a + \varepsilon b^2 + \lambda b + vab) \\ &\times |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2| \exp(\alpha a^{\dagger} + \beta b^{\dagger} + \gamma a^{\dagger} b^{\dagger}) \\ &= : \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} \exp(\xi z_1^2 + \eta z_1 + \varepsilon z_2^2 + \lambda z_2 + v z_1 z_2) \\ &\times \exp[-(|z_1|^2 + |z_2|^2) + z_1 a^{\dagger} + z_2 b^{\dagger}] \\ &\times \exp(z_1^* a + z_2^* b - a^{\dagger} a - b^{\dagger} b) \\ &\times \exp(\alpha z_1^* + \beta z_2^* + \gamma z_1^* z_2^*) : \\ &= \frac{1}{\sqrt{(v\gamma - 1)^2} - 4\varepsilon \xi \gamma^2} : \\ &\times \exp[(a^{\dagger} + \eta)(a + \alpha) + \xi(a + \alpha)^2 - a^{\dagger} a - b^{\dagger} b] \\ &\times \exp\left\{\frac{1}{(v\gamma - 1)^2 - 4\varepsilon \xi \gamma^2} \times (v\gamma - 1)[v(a + \alpha) + \lambda + b^{\dagger}][b + \beta + \gamma(a^{\dagger} + \eta) + 2\xi \gamma(a + \alpha)]\right\} \end{split}$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{(\nu\gamma-1)^2 - 4\varepsilon\xi\gamma^2} \left(\xi\gamma^2[\nu(a+\alpha)+\lambda+b^{\dagger}]^2 + \varepsilon[b+\beta+\gamma(a^{\dagger}+\eta)+2\xi\gamma(a+\alpha)]^2\right)\right\};,\qquad(5)$$

上式积分利用到公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^* + f z^2 + g z^{*2})$$

= $\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp[(\zeta^2 - 4fg)^{-1} \times (-\zeta \xi \eta + \xi^2 g + \eta^2 f)].$ (6)

3 双模相干态的 Ridgelet 变换

现选取 $|f\rangle = |z_1, z_2\rangle$, 研究双模相干态的 Radon 变换和 Ridgelet 变换. 已知双模相干态在坐标表象 中的投影为

$$f(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 | z_1, z_2 \rangle$$

= $\pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \sqrt{2}(z_1x_1 + z_2x_2)\right]$

$$-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1^2 + z_2^2)].$$
(7)

将 (7) 式代入 (4) 式, 可以计算出 |*z*₁,*z*₂)的 Radon 变换:

$$R_{f}(\theta,t) = \sqrt{2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(|z_{1}|^{2} + |z_{2}|^{2} - t^{2} + 2It + (-z_{1}^{2} + z_{2}^{2})\cos 2\theta - 2z_{1}z_{2}\sin 2\theta\right)\right], \quad (8)$$

式中 $I = \sqrt{2}(z_1 \cos \theta + z_2 \sin \theta)$, (8) 式计算过程 中使用到下面的 Mathematic 积分公式:

$$\iint_{\infty} \exp(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \varepsilon x_1 + \lambda x_2 + \tau x_1 x_2)$$

$$\times \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx_1 dx_2$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{|\sin \theta| \sqrt{-\alpha + \tau \cot \theta - \beta (\cot \theta)^2}}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 + \lambda^2 (\cot \theta)^2 - 2\varepsilon \lambda \cot \theta}{4[\alpha - \tau \cot \theta + \beta (\cot \theta)^2]}\right\}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4[\alpha - \tau \cot \theta + \beta (\cot \theta)^2]} + (2[\csc \theta(-2\alpha \lambda + \varepsilon \tau) + \sec \theta(-2\beta \varepsilon + \lambda \tau)]t - (\csc \theta)^2(4\alpha \beta - \tau^2)t^2)\right\}.$$
(9)

在此基础上,取"墨西哥帽"母小波函数

$$\Psi(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$
 (10)

利用(3)式,分析(8)式的小波变换,可得,

$$W(\mu, s, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{t-s}{\mu}\right)^2 \right] \\ \times \exp\left[- \left(\frac{t-s}{\mu}\right)^2 / 2 \right] R_f(\theta, t) dt \\ = 2\sqrt{\pi} (1 - I^2 + 2Is - s^2 + \mu^2) \left(\frac{\mu}{\mu^2 + 1}\right)^{\frac{5}{2}} \\ \times \exp\left[\frac{2Is - s^2 + I^2 \mu^2}{2(1 + \mu^2)} \right] \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2 + (-z_1^2 + z_2^2) \cos 2\theta - 2z_1 z_2 \sin 2\theta) \right],$$
(11)

从而计算出了双模相干态的 Ridgelet 变换. 上式的 计算利用到如下的 Mathematic 积分公式:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{t-s}{\mu}\right)^2 \right] \\ \times \exp\left[-\left(\frac{t-s}{\mu}\right)^2 / 2 \right] \exp\left(\alpha t^2 + \beta t\right) dt$$

144203-2

$$=\sqrt{2\pi}\left(\frac{\mu}{1-2\alpha\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-2\alpha-4s^2\alpha^2-4s\alpha\beta\right)$$
$$-\beta^2+4\alpha^2\mu^2\exp\left(\frac{2s^2\alpha+2s\beta+\beta^2\mu^2}{2-4\alpha\mu^2}\right). \quad (12)$$

4 双模特殊压缩相干态的 Ridgelet 变 换

下面再取 $|f\rangle = |z_1, z_2\rangle_{f,g}$, 研究双模特殊压缩相 干态的 Radon 变换和 Ridgelet 变换. 已知,

$$|z_1, z_2\rangle_{f,g} = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) + Ea^{\dagger} + Fb^{\dagger} + Ga^{\dagger}b^{\dagger}\right]|00\rangle,$$
 (13)

式中 $E = fz_1 + gz_2, F = gz_1^* + fz_2^*, G = -2fg.$ 利用推导出的正规乘积内算符公式(5),由(13)

利用推导出的止规乘低內昇付公式 (5), 田 (15) 式可以计算出 $|z_1, z_2\rangle_{f,g}$ 在坐标表象中的投影:

$$f(x_{1}, x_{2}) = \langle x_{1}, x_{2} | z_{1}, z_{2} \rangle_{f,g}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1 - G^{2})}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(|z_{1}|^{2} + |z_{2}|^{2}) - \frac{E^{2}}{2} - \frac{(F - EG)^{2}}{2(1 - G^{2})}\right] \times \exp\left[-\left(\frac{1}{2} + \frac{G^{2}}{1 - G^{2}}\right)x_{1}^{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{G^{2}}{1 - G^{2}}\right)x_{2}^{2} + \frac{\sqrt{2}(E - FG)}{1 - G^{2}}x_{1} + \frac{\sqrt{2}(-F + EG)}{1 - G^{2}}x_{2} - \frac{2G}{1 - G^{2}}x_{1}x_{2}\right].$$
(14)

为了便于计算, 令
$$H = 1 - G^2$$
,
 $A = -\left(\frac{1}{2} + \frac{G^2}{H}\right), \quad B = \frac{\sqrt{2}(E - FG)}{H}, \quad C = \frac{\sqrt{2}(-F + EG)}{H}, \quad D = -\frac{2G}{H}, \text{ 由此 (14)}$ 式简化为
 $f(x_1, x_2)$
 $= \frac{1}{\sqrt{\pi H}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) - \frac{E^2}{2} - \frac{C^2 H}{4}\right]$
 $\times \exp\left[A\left(x_1^2 + x_2^2\right) + Bx_1 + Cx_2 + Dx_1x_2\right].$ (15)
鉴 (15) 式任 \lambda (4) 式 计算出双模特殊 医统相

将 (15) 式代入 (4) 式, 计算出双模特殊压缩相 干态的 Radon 变换:

$$=\frac{R_f(\theta,t)}{|\sin\theta|\sqrt{H}\sqrt{-A\csc^2\theta+D\cot^2\theta}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|z_{1}|^{2}+|z_{2}|^{2}\right)-\frac{E^{2}}{2}-\frac{C^{2}H}{4}\right]$$
$$\times \exp\left[\frac{B^{2}+C^{2}\cot^{2}\theta-2BC\cot\theta}{4\left(-A\csc^{2}\theta+D\cot^{2}\theta\right)}\right]$$
$$\times \exp\left(Xt^{2}+Yt\right). \tag{16}$$

式中

$$X = \frac{-\csc^2\theta \left(4A^2 - D^2\right)}{4\left(-A\csc^2\theta + D\cot^2\theta\right)},$$

$$Y = \frac{\csc\theta \left(-2AC + BD\right) + \sec\theta \left(-2AB + CD\right)}{\left(-A\csc^2\theta + D\cot^2\theta\right)}.$$

(16) 式的计算过程用到了 Mathematic 积分公式 (9) 式.

同样取 "墨西哥帽" 母小波函数 (10) 式, 利用 Mathematic 积分公式 (12) 式, 由 (3) 式计算 (16) 式 的小波变换:

$$W(\mu, s, \theta) = \frac{\sqrt{2\pi} \left(-2X - 4s^2 X^2 - 4s XY - Y^2 + 4X^2 \mu^2\right)}{|\sin \theta| \sqrt{H} \sqrt{-A \csc^2 \theta + D \cot^2 \theta}} \times \left(\frac{\mu}{1 - 2X \mu^2}\right)^{\frac{5}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) - \frac{E^2}{2} - \frac{C^2 H}{4}\right] \exp\left[\frac{B^2 + C^2 \cot^2 \theta - 2BC \cot \theta}{4 \left(-A \csc^2 \theta + D \cot^2 \theta\right)} + \frac{2s^2 X + 2s Y + Y^2 \mu^2}{2 - 4X \mu^2}\right],$$
(17)

由此得到了双模特殊压缩相干态的 Ridgelet 变换.

5 中介纠缠态表象的 Ridgelet 变换

再取 $|f\rangle = |\eta\rangle_{\sigma,r}$, 研究中介纠缠态表象的 Radon 变换和 Ridgelet 变换. 已知

$$|\eta\rangle_{\sigma,r} = \frac{1}{\sigma^* + \gamma^*} \exp\left[-\frac{\sigma^* - \gamma^*}{2(\sigma^* + \gamma^*)}|\eta|^2 + Ea^{\dagger} + Fb^{\dagger} + Ga^{\dagger}b^{\dagger}\right]|00\rangle, \quad (18)$$

(18) 式中重新定义了, $E = \frac{\eta}{\sigma^* + \gamma^*}$, $F = -\frac{\eta^*}{\sigma^* + \gamma^*}$, $G = \frac{\sigma + \gamma}{\sigma^* + \gamma^*}$.

再次利用推导出的正规乘积内算符公式 (5) 式,由 (18)式可以计算出 $|\eta\rangle_{\sigma,r}$ 在坐标表象中的投影:

$$f(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 | \eta \rangle_{\sigma, r} = \frac{1}{\sqrt{\pi (1 - G^2)} (\sigma^* + \gamma^*)}$$

144203-3

$$\times \exp\left(-\frac{\sigma^{*} - \gamma^{*}}{2(\sigma^{*} + \gamma^{*})}|\eta|^{2} - \frac{E^{2}}{2} - \frac{(F - GE)^{2}}{2(1 - G^{2})}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{1}{2} + \frac{G^{2}}{1 - G^{2}}\right)x_{1}^{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{G^{2}}{1 - G^{2}}\right)x_{2}^{2} + \frac{\sqrt{2}(E - FG)}{1 - G^{2}}x_{1} - \frac{\sqrt{2}(F - EG)}{1 - G^{2}}x_{2} - \frac{2G}{1 - G^{2}}x_{1}x_{2}\right].$$
(19)

类比第4部分的计算过程,改令 H =

$$1-G^2, A = -\left(\frac{1}{2} + \frac{G^2}{H}\right), B = \frac{\sqrt{2}(E-FG)}{H}, C =$$

 $-\frac{\sqrt{2}(F-EG)}{H}, D = -\frac{2G}{H},$ 将(19)式简化为
 $f(x_1,x_2)$
 $=\frac{1}{\sqrt{\pi H}(\sigma^* + \gamma^*)}$
 $\times \exp\left[-\frac{\sigma^* - \gamma^*}{2(\sigma^* + \gamma^*)}|\eta|^2 - \frac{E^2}{2} - \frac{(F-GE)^2}{2(1-G^2)}\right]$
 $\times \exp\left[A\left(x_1^2 + x_2^2\right) + Bx_1 + Cx_2 + Dx_1x_2\right].$ (20)

再次利用 Mathematic 积分公式 (9) 式,由 (4) 式和 (20) 式便可以得到中介纠缠态表象的 Radon 变换:

$$R_{f}(\theta,t) = \frac{1}{|\sin\theta|(\sigma^{*}+\gamma^{*})\sqrt{H(-A\csc^{2}\theta+D\cot^{2}\theta)}} \times \exp\left(-\frac{\sigma^{*}-\gamma^{*}}{2(\sigma^{*}+\gamma^{*})}|\eta|^{2}-\frac{E^{2}}{2}-\frac{C^{2}H}{4}\right) \times \exp\left[\frac{B^{2}+C^{2}\cot^{2}\theta-2BC\cot\theta}{4(-A\csc^{2}\theta+D\cot^{2}\theta)}\right] \times \exp\left(Xt^{2}+Yt\right).$$
(21)

式中

$$X = \frac{-\csc^2\theta \left(4A^2 - D^2\right)}{4 \left(-A\csc^2\theta + D\cot^2\theta\right)},$$

- Chuang I L, Nielsen M A 2000 Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Candes E J 1999 Ridgelets and Their Derivatives Representation of Images with Edges Department of Statistics, Stanford University, Saint-Malo Proceedings, Schumaker L (ed.) pp1–10
- [3] Starck J L, Candès E J, Donoho D L 2002 Trans. Image Processing 11 670
- [4] Starck J L, Donoho D L, Candes E J 2003 Astron. Astrophys. 398 785
- [5] Fan H Y, Lu H L 2006 Opt. Lett. 31 407
- [6] Song J, Fan H Y 2010 Chin. Phys. Lett. 27 024210

$$Y = \frac{\csc\theta \left(-2AC + BD\right) + \sec\theta \left(-2AB + CD\right)}{\left(-A\csc^2\theta + D\cot^2\theta\right)}$$

在同样的"墨西哥帽"母小波函数 (10) 式作用 下,利用 Mathematic 积分公式 (12) 式,由 (3) 式计 算 (21) 式的小波变换:

$$W(\mu, s, \theta) = \frac{1}{|\sin \theta| (\sigma^* + \gamma^*) \sqrt{H (-A\csc^2 \theta + D\cot^2 \theta)}} \\ \times \sqrt{2\pi} \left(\frac{\mu}{1 - 2X\mu^2}\right)^{\frac{5}{2}} (-2X - 4s^2X^2 - 4sXY) \\ -Y^2 + 4X^2\mu^2) \\ \times \exp\left[-\frac{\sigma^* - \gamma^*}{2(\sigma^* + \gamma^*)} |\eta|^2 - \frac{E^2}{2} \\ -\frac{C^2H}{4} + \frac{B^2 + C^2\cot^2 \theta - 2BC\cot \theta}{4(-A\csc^2 \theta + D\cot^2 \theta)} \\ + \frac{2s^2X + 2sY + Y^2\mu^2}{2 - 4X\mu^2}\right],$$
(22)

由此得到了中介纠缠态表象的 Ridgelet 变换. 通过 这一计算过程可以明显看到中介纠缠态表象和双 模特殊压缩相干态表象的 Radon 变换和 Ridgelet 变换结果很相像,只是相差一个因子,这是因为它 们有相类似的显式.

6 结 论

本文在量子力学框架下,通过改写经典 Radon 变换,定义了量子光学态的 Radon 变换.利用 IWOP 技术推导出了一个有用的双模算符正规乘积公式,然后计算得到相干态、特殊压缩相干态、中介纠 缠态表象的 Radon 变换.在此基础上,通过选取"墨西哥帽"母小波函数,分别分析了以上三种量子光 学态的 Ridgelet 变换.

- [7] Fan H Y, Lu H L 2007 Opt. Lett. 32 554
- [8] Fan H Y, Liu S G 2007 Opt. Lett. 32 1507
- [9] Fan H Y 2003 J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 5 R147
- [10] Song J, Xu Y J, Fan H Y 2011 Acta Phys. Sin. 60 084208 (in Chinese) [宋军, 许业军, 范洪义 2011 物理学报 60 084208]
- [11] Yu H J, Du J M, Zhang X L 2012 Acta Phys. Sin. 60 164205 (in Chinese) [余海军, 杜建明, 张秀兰 2012 物理学报 60 164205]
- [12] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R 1987 Phys. Rev. D 35 1831
- [13] Fan H Y, Zaidi H R 1988 Phys. Rev. A 37 2985

Ridgelet transform for quantum optical states*

Yu Hai-Jun^{1)†} Zhong Guo-Bao¹⁾²⁾ Ma Jian-Guo¹⁾ Ren Gang¹⁾

1) (Department of Physics and Electronic Information Engineering, Huinan Normal Colledge, Huainan 232038, China)

2) (Shool of Physics and Material Science, Anhui University, Hefei 230039, China)

(Received 4 February 2013; revised manuscript received 30 March 2013)

Abstract

We derive a useful formula for the normal ordering of two-mode operator by the technique of integration within an ordered product (IWOP) of operators. Furthermore, we also calculate the Radon transformations for the coherent state, special squeezed coherent state, intermediary entangled state in the view of the quantum mechanics. Based on the results above, the Mexican hat's mother wavelet function is selected to analyse Ridgelet transformations of these three quantum optical states.

Keywords: IWOP technique, radon transform, Ridgelet transform

PACS: 42.50.-p

DOI: 10.7498/aps.62.144203

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of the Anhui Higher Education Institutions of China (Grant Nos. KJ2011Z359, KJ2012Z383).

[†] Corresponding author. E-mail: haijun20030@163.com