

## 强非局域非线性介质中的形变像散椭圆呼吸子\*

陆大全†

(华南师范大学, 信息光电子科技学院广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室, 广州 510631)

(2013年2月4日收到; 2013年3月26日收到修改稿)

得到了强非局域非线性介质中的形变像散椭圆呼吸子的解析解, 并基于解析解讨论了这类呼吸子的演化性质. 在传输过程中光束在两个维度上仍保持高斯的形状, 但束宽与等相位面曲率均做两个维度上不同步的等周期演化. 当光束在两个维度上均为非束腰入射时, 不管功率如何, 光束的汇聚或发散惯性将继续保持一段距离, 继而形成二维异步同周期呼吸效应. 当光束在某方向上为束腰入射时则既可能形成二维异步呼吸, 也可能只有一维呼吸. 束宽的二维异步呼吸还导致了椭球等相位面曲率以及光斑椭圆率的周期性变化. 在二维束腰重合情况下, 椭圆率的最大值和最小值总是固定的且二者之积为 1; 入射位置的变化不影响椭圆率最值, 但会影响椭圆率变化速度在一个周期内的分布均匀性和最大椭圆率出现的位置.

**关键词:** 形变呼吸子, 像散, 强非局域非线性介质

**PACS:** 42.65.Tg, 42.65.Jx

**DOI:** 10.7498/aps.62.144209

## 1 引言

呼吸子又称为呼吸型孤子, 是在孤子概念出现后才出现的概念. 孤子是在传输过程中形状和大小均保持不变的波束, 若这些波束的宽度发生周期性改变, 则称为呼吸子. 孤子和呼吸子是非线性科学中一个重要的研究内容, 自从 1834 年 Russell 在运河中观察到孤子现象以来, 孤子问题一直得到强烈的关注. 而 20 世纪 60 年代激光出现以后, 提供了足够高的光强以产生孤子所需的非线性效应, 从此孤子现象出现在了光学领域中. 光孤子不但是基本物理现象, 同时也在全光开关、光互连等方面有诱人的应用前景<sup>[1]</sup>, 因此一直是非线性光学领域的一个热门问题. 而 1997 年 Snyder 和 Mitchell<sup>[2]</sup> 提出强非局域非线性概念后, 又掀起了新一轮的孤子和呼吸子的研究热潮. 非局域非线性存在于等离子体<sup>[3]</sup>、玻色-爱因斯坦凝聚体<sup>[4]</sup>、向列相液晶<sup>[5]</sup>、铅玻璃<sup>[6]</sup>、特殊条件下的二阶非线性介质<sup>[7,8]</sup> 等物理系统中. 所谓非局域非线性是指光场中每一点感受到的非线性折射率不但与该点的光场有关, 还与其他

邻近位置的光场有关. 在强非局域条件下, 光场的传输方程可简化为线性化的 Snyder-Mitchell 模型. 在 Snyder-Mitchell 模型的基础上, 许多孤子和呼吸子, 如多极孤子和呼吸子<sup>[9,10]</sup>、涡旋孤子<sup>[11,12]</sup>、旋转孤子<sup>[13]</sup>、旋转呼吸子<sup>[14]</sup> 等, 均得到了深入的研究.

本文提出一种形状和大小均会发生改变的新型呼吸子, 即形变像散椭圆呼吸子. 在传输过程中, 此类呼吸子的形状为椭圆形, 但在传输过程中其两个维度上的宽度发生不同步的等周期变化, 因此其椭圆度也在周期性改变. 我们基于强非局域非线性传输与自由传输的对应关系, 得到了形变像散椭圆呼吸子的解析表达式. 基于解析表达式分析了传输过程中的束宽呼吸效应、等相位面曲率以及光斑椭圆率的演化规律.

## 2 解析解

在非局域非线性介质中, 光束的传输一方面受衍射的影响, 同时还会受到非线性折射率分布的影响. 由于非局域效应, 空间任意点  $(x, y)$  处的非线性

\* 国家自然科学基金(批准号: 10804033, 11174090, 11174091)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: ludq@scnu.edu.cn

折射率不仅与该点处的光强分布有关,而且还与空间其他位置处的光强分布有关,因此其传输由非局域非线性薛定谔方程决定. 在强非局域条件下,传输方程可线性化为 Snyder-Mitchell 模型 [2]:

$$2ik\partial_z A + (\partial_{xx} + \partial_{yy})A - k^2 P_0 \gamma^2 (x^2 + y^2)A = 0, \quad (1)$$

其中  $k$  为波数,  $P_0$  为入射光功率.

现构建由像散椭圆高斯光束入射强非局域非线性介质形成的形变椭圆呼吸子. 假设入射面处的纵坐标为  $z = 0$ , 输入光场为一般情况下的像散椭圆高斯光束, 在  $x$  和  $y$  方向的束腰分别位于  $z = z_{sx}$  和  $z = z_{sy}$ , 则其在自由空间的传输解为 [15]

$$A^{(f)}(x, y, z) = A_0 \exp \left[ -\left( \frac{x^2}{2w_{xf}^2} + \frac{y^2}{2w_{yf}^2} \right) \right] \times \exp \left[ ik \left( \frac{x^2}{2R_{xf}} + \frac{y^2}{2R_{yf}} \right) \right] \times \exp [i\varphi_f], \quad (2)$$

$A_0$  为与功率相关的归一化系数, 由  $P_0 = \iint |A^{(f)}|^2 dx dy$  决定, 其他参数为

$$w_{fx} = w_{0x} \left[ 1 + \left( \frac{z - z_{sx}}{z_{0x}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$w_{fy} = w_{0y} \left[ 1 + \left( \frac{z - z_{sy}}{z_{0y}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$R_{fx} = (z - z_{sx}) \left[ 1 + \left( \frac{z_{0x}}{z - z_{sx}} \right)^2 \right],$$

$$R_{fy} = (z - z_{sy}) \left[ 1 + \left( \frac{z_{0y}}{z - z_{sy}} \right)^2 \right],$$

$$z_{0x} = kw_{0x}^2, \quad z_{0y} = kw_{0y}^2,$$

$$\varphi_f = \frac{1}{2} \left[ \arctan \left( \frac{z - z_{sx}}{z_{0x}} \right) + \arctan \left( \frac{z - z_{sy}}{z_{0y}} \right) \right].$$

在强非局域非线性介质入射面处的光场分布为  $A^{(f)}(x, y, 0)$ , 但由于变量太多, 直接由初值条件  $A^{(f)}(x, y, 0)$  求其传输解析解在数学处理上将会非常复杂. 我们基于之前的工作, 用另一种办法来得到其解析解. 在文献 [16] 中, 我们从描述光束在自由空间中传输的衍射方程和描述光束在强非局域非线性介质中传输的非线性薛定谔方程出发, 得到了自由传输解和强非局域非线性传输解之间的对应关系 [16]:

$$A^{(s)}(x, y, z) = F_1 F_2 \times A^{(f)}(F_1 x, F_1 y, F_3), \quad (3)$$

其中

$$F_1(z) = (-1)^\alpha \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{z}{z_c} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$F_2(z) = \exp \left\{ -\frac{ikF_1(z)^2(x^2 + y^2)}{2z_c \left[ \tan \left( \frac{z}{z_c} \right) + 1/\tan \left( \frac{z}{z_c} \right) \right]} \right\},$$

$$F_3(z) = z_c \tan \left( \frac{z}{z_c} \right), \quad z_c = (\gamma^2 P_0)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\alpha(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{z}{z_c} - \arctan \left[ \tan \left( \frac{z}{z_c} \right) \right] \right\}, \quad (4)$$

$A^{(s)}(x, y, z)$  代表光束在强非局域非线性介质中的场分布. 将方程 (2) 代入方程 (3), 可得像散椭圆高斯光束在强非局域非线性介质中的演化:

$$A^{(s)}(x, y, z) = A_0 \exp \left[ -\left( \frac{x^2}{2w_{xs}^2} + \frac{y^2}{2w_{ys}^2} \right) \right] \times \exp \left[ ik \left( \frac{x^2}{2R_{xs}} + \frac{y^2}{2R_{ys}} \right) \right] \times \exp [i\varphi_s], \quad (5)$$

其中:

$$w_{xs} = w_{0x} \sqrt{\frac{1 + \left[ \frac{z_c \tan \left( \frac{z}{z_c} \right) - \frac{z_{sx}}{z_{0x}} \right]^2}{1 + \tan^2 \left( \frac{z}{z_c} \right)}},$$

$$w_{ys} = w_{0y} \sqrt{\frac{1 + \left[ \frac{z_c \tan \left( \frac{z}{z_c} \right) - \frac{z_{sy}}{z_{0y}} \right]^2}{1 + \tan^2 \left( \frac{z}{z_c} \right)}},$$

$$R_{xs} = \frac{z_c \left[ z_c^2 - 2z_c z_{sx} \cot \left( \frac{z}{z_c} \right) + (z_{0x}^2 + z_{sx}^2) \cot^2 \left( \frac{z}{z_c} \right) \right]}{z_c z_{sx} - \cot \left( \frac{z}{z_c} \right) \left[ z_{0x}^2 - z_c^2 + z_{sx}^2 + z_c z_{sx} \cot \left( \frac{z}{z_c} \right) \right]},$$

$$R_{ys} = \frac{z_c \left[ z_c^2 - 2z_c z_{sy} \cot \left( \frac{z}{z_c} \right) + (z_{0y}^2 + z_{sy}^2) \cot^2 \left( \frac{z}{z_c} \right) \right]}{z_c z_{sy} - \cot \left( \frac{z}{z_c} \right) \left[ z_{0y}^2 - z_c^2 + z_{sy}^2 + z_c z_{sy} \cot \left( \frac{z}{z_c} \right) \right]},$$

$$\varphi_s = \alpha\pi + \frac{1}{2} \left\{ \arctan \left[ \frac{z_c \tan \left( \frac{z}{z_c} \right) - \frac{z_{sx}}{z_{0x}} \right]}{+ \arctan \left[ \frac{z_c \tan \left( \frac{z}{z_c} \right) - \frac{z_{sy}}{z_{0y}} \right]} \right\}. \quad (6)$$

(5) 式即为形变像散椭圆呼吸子的解析解, 下面我们将基于此解析解对其演化性质进行详细的讨论.

### 3 演化性质

由 (5) 式可见, 像散椭圆高斯光束在强非局域非线性介质中传输时, 光束在  $x$  和  $y$  两个维度

上仍保持高斯形状,但束宽、相位曲率半径均以  $\Delta z = \pi z_c = \pi/(\gamma\sqrt{P_0})$  为周期循环演化,且两个维度上不同步.因此此光束在强非局域非线性介质中以形变像散椭圆呼吸子的形式传输.在不同参数条件

下,将表现出不同的演化性质(比如入射离腰量  $z_{sx}, z_{sy}$  的变化就会导致形状和大小的演化发生变化,如图 1 所示).下面将对束宽、等相位面、光斑椭圆度的演化规律进行逐个分析.

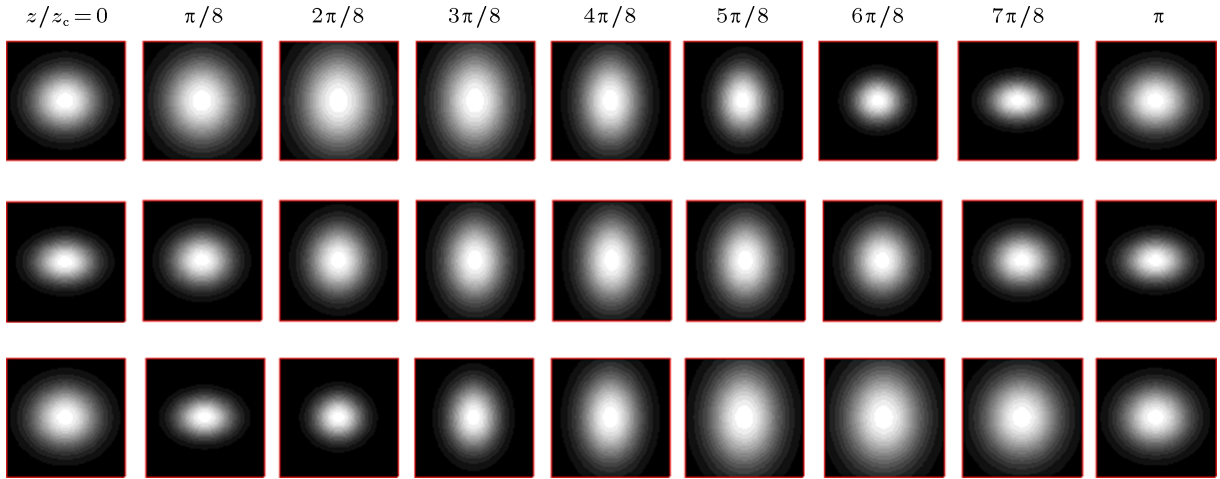


图 1 不同入射离腰量条件下的形变像散椭圆呼吸子随传输距离的演化 第一行,两个方向均为束腰后入射 ( $z_{sx} = z_{sy} = -z_0$ ); 第二行,两个方向均为束腰上入射 ( $z_{sx} = z_{sy} = 0$ ); 第三行,两个方向均为束腰前入射 ( $z_{sx} = z_{sy} = z_0$ ); 其他参数为  $w_{0y} = 0.7w_{0x}, P_0 = 1/(k^2\gamma^2 w_{0x}^4)$

首先看束宽的变化规律.从物理机制上讲,进入强非局域非线性介质后,束宽的变化受到汇聚或发散惯性、自由衍射以及非线性自聚焦的综合影响:其中强非局域效应使非线性波导及其导致的自聚焦效应不因束宽而变,只与功率有关;自由衍射效应与光束宽度呈负相关;汇聚或发散惯性则与入射位置有关.当光束为偏离束腰入射时,在入射面处光束是汇聚或发散的.比如对于两方向分别为束腰前入射和束腰后入射情况(图 2 第 2 列),入射后在  $x$  和  $y$  方向上继续保持各自的汇聚和发散趋势一段距离(但由于入射面处两方向上的等相位线曲率不同,故在两方向上保持的距离是不同的),继而发生振荡.由于 1) 两个方向的束宽均以周期  $\Delta z = \pi z_c = \pi/(\gamma\sqrt{P_0})$  循环变化; 2) 入射面处像散椭圆高斯光束在  $x$  和  $y$  方向的等相位线弯曲程度不同导致两个方向上的束宽达到最大值和最小值的位置也不同,故一般情况下光斑大小和形状不能保持稳定不变的静态平衡,而是形成二维异步等周期呼吸效应(图 2).

如果光束的入射位置为像散椭圆高斯光束某一个方向的束腰,则此方向上没有发散或汇聚惯性.在此情况下,束宽的演化只由自由衍射和非线性自聚焦之间的关系决定.如果此方向上的束宽与光束整体功率满足关系  $w = (k^2\gamma^2 P_0)^{-1/4}$ ,则衍射效应与自聚焦效应刚好抵消,在此方向上的束宽将维持不

变(如图 3(a) 中的实线所示).但在两腰位置不重合的一般情况下,另一个方向上有初始发散或汇聚惯性,故此方向形成呼吸(如图 3(a) 中的虚线所示).因此在两腰位置不重合的像散情况下,最多只能在一个方向上保持孤子的性质.

功率也会影响束宽演化.对于同一入射位置,功率越高,决定演化周期的参数  $z_c = (\gamma^2 P_0)^{-1/2}$  越小,故束宽演化周期越短;并且功率越高,非线性波导的折射率分布曲率越大,汇聚效应也会越强,因为功率的增加相当于将衍射与自聚焦效应的平衡点向光束中心进行了推移.

束宽的呼吸也伴随着等相位面曲率半径的周期性变化.如图 3(b) 所示,  $x$  和  $y$  方向的曲率半径演化情况是不同的.但在两个方向上均满足如下规律:如果迎着呼吸子的传输方向观察,当光束在某方向上发散时对应凸的等相位线(曲率  $1/R > 0$ ),而在此方向上汇聚时则对应凹的等相位线(曲率  $1/R < 0$ ),而若此方向的束宽保持不变,则等相位线恒为直线(曲率  $1/R \equiv 0$ ).由于两方向上的束宽演化不同步,因此两个方向上的等相位线曲率的演化也为不同步的等周期演化,故呼吸子的二维等相位面为周期变化的椭球面.

在呼吸过程中,像散椭圆呼吸子的光斑椭圆率也会发生周期性变化(图 4).呼吸子光斑椭圆率为  $x$  和  $y$  方向的束宽之比,即

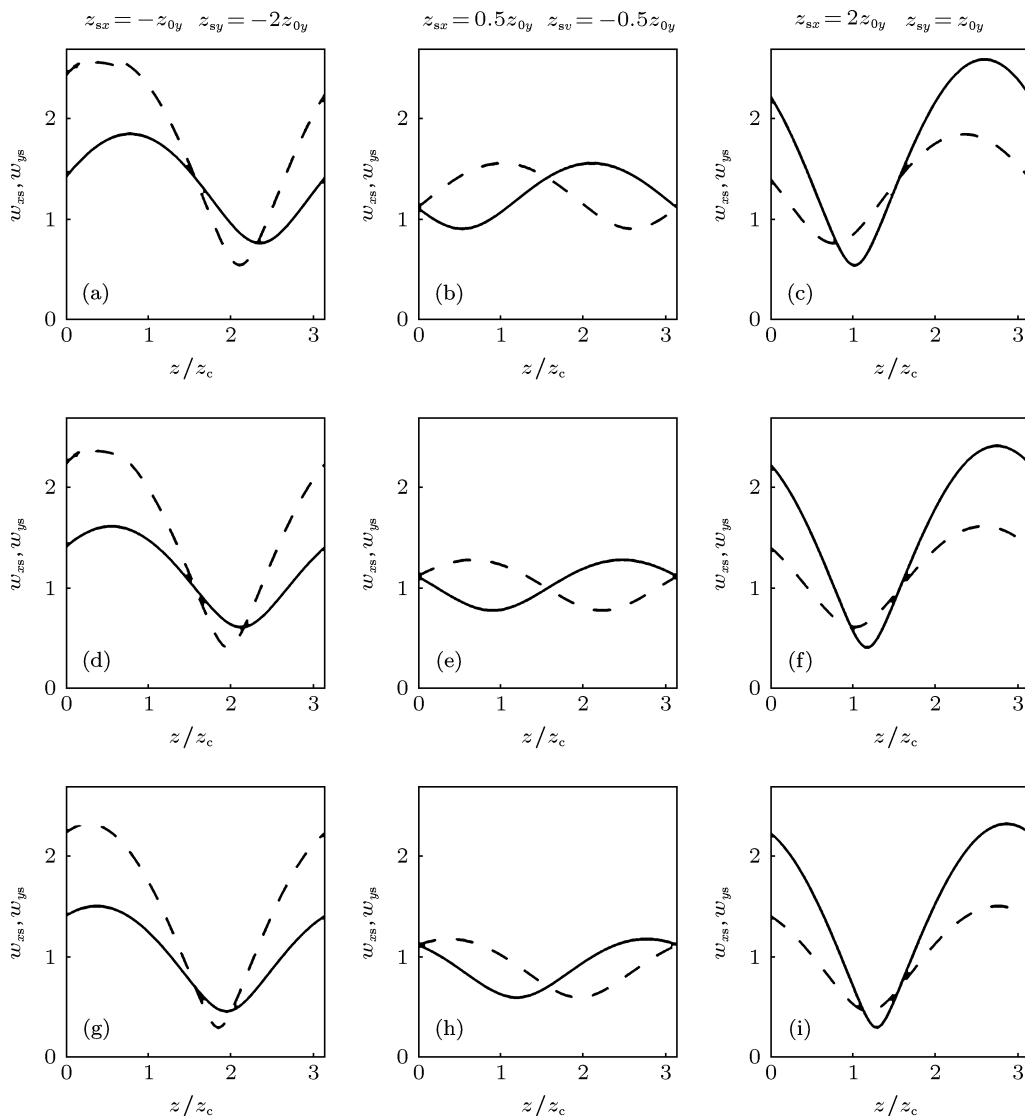


图2 不同功率及不同入射条件下的形变椭圆呼吸子在  $x$  (实线) 和  $y$  (虚线) 方向的束宽演化 第一行,  $P_0 = 1/(2k^2\gamma^2 w_{0x}^4)$ ; 第二行,  $P_0 = 1/(k^2\gamma^2 w_{0x}^4)$ ; 第三行,  $P_0 = 2/(k^2\gamma^2 w_{0x}^4)$ ;  $x$  和  $y$  方向的束腰宽度关系为  $w_{0y} = w_{0x}$ , 两个方向的束腰相距  $z_{sx} - z_{sy} = z_{0x}$

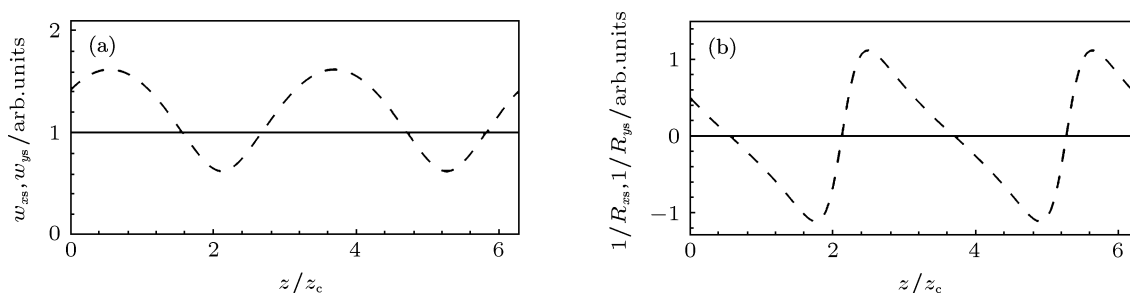


图3 (a) 在  $P_0 = 1/(k^2\gamma^2 w_{0x}^4)$  时形变像散椭圆呼吸子在  $x$  (实线) 和  $y$  (虚线) 方向的束宽演化; (b) 相同条件下在  $x$  (实线) 和  $y$  (虚线) 方向对应的等相位线曲率演化; 两个方向上入射离腰量分别为  $z_{sx} = 0$  和  $z_{sy} = -z_{0x}$ , 束腰宽度关系为  $w_{0y} = w_{0x}$

$$\gamma = \frac{w_{xs}}{w_{ys}} = \frac{w_{0x}}{w_{0y}} \left\{ \left\{ 1 + \left[ \frac{z_c}{z_{0x}} \tan\left(\frac{z}{z_c}\right) - \frac{z_{sx}}{z_{0x}} \right]^2 \right\} \left\{ 1 + \left[ \frac{z_c}{z_{0y}} \tan\left(\frac{z}{z_c}\right) - \frac{z_{sy}}{z_{0y}} \right]^2 \right\}^{-1} \right\}^{1/2}, \quad (7)$$

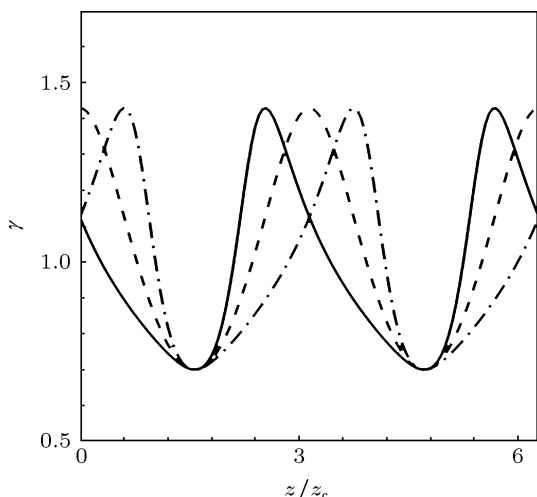


图4 两维束腰重合时不同入射离腰量条件下的形变椭圆呼吸子椭圆率的演化 实线为束腰后入射 ( $z_s = -z_{0y}$ ); 虚线为束腰上入射 ( $z_s = 0$ ); 点虚线为束腰前入射 ( $z_s = z_{0y}$ ); 其他参数为  $w_{0y} = 0.7w_{0x}$ ,  $P_0 = 2/(k^2 \gamma^2 w_{0x}^4)$

可见, 光斑椭圆率的演化周期也为  $\Delta z = \pi z_c = \pi/(\gamma\sqrt{P_0})$ . 在两维束腰重合 ( $z_{sx} = z_{sy} = z_s$ ) 的情况下, 若假设  $w_{0x} > w_{0y}$ , 则通过对其求偏导可得椭圆率的极大值和极小值分别为

$$\begin{cases} \gamma_{\max} = \frac{w_{0x}}{w_{0y}} \left( \text{at } z = m\pi z_c + z_c \arctan\left(\frac{z_s}{z_c}\right) \right), \\ \gamma_{\min} = \frac{w_{0y}}{w_{0x}} \left( \text{at } z = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi z_c \right). \end{cases} \quad (8)$$

由 (8) 式, 两维束腰重合时, 像散椭圆呼吸子的光斑椭圆率有两个基本特点: 首先, 尽管输入位置的变化会导致输入面处的光斑椭圆率发生改变, 但在强非局域非线性介质中传输时, 椭圆率的最大值和最小值总是固定的, 且二者满足关系  $\gamma_{\max}\gamma_{\min} = 1$ . 其次, 最小椭圆率出现的位置总是固定出现在  $z = (m + 1/2)\pi z_c$  处, 但最大椭圆率出现的位置会随着入射位置的变化而发生改变. 只有

在束腰入射 (即  $z_s = 0$ ) 情况下最大值会出现在两个相邻最小值的中部 (即  $z = m\pi z_c$  处). 而当  $z_s < 0$  ( $z_s > 0$ ) 时, 每个最大值会更靠近前 (后) 方的邻近最小值; 若将两相邻最小椭圆率位置定义为一个周期的始末, 则在周期初的椭圆率变化速度大于 (小于) 周期尾的椭圆率变化速度.

## 4 结论

本文基于强非局域非线性传输与自由传输解之间的关系, 得到了形变像散椭圆呼吸子的解析解. 在传输过程中, 这类呼吸子在  $x$  和  $y$  两个维度上仍保持高斯形状, 但束宽与相位曲率均做周期性演化. 当为束腰前 (后) 入射时, 在入射面处光束是汇聚 (发散) 的, 因此进入强非局域非线性介质中后, 不管功率如何, 这种汇聚 (发散) 的惯性将继续保持一段距离, 继而形成二维异步等周期的呼吸效应. 而在某一方向为束腰入射情况下, 如果此方向上的束宽与光束整体功率满足临界关系, 将形成一维呼吸, 否则为二维异步呼吸. 另外, 功率也会影响束宽的整体演化: 在同一入射位置, 功率越高, 光束的汇聚效应越强, 相当于将衍射与自聚焦效应的平衡点向光束中心进行了推移. 束宽的呼吸也导致等相位面曲率半径的周期性变化, 并且由于两方向上的等相位线曲率的演化不同步, 故二维等相位面为周期变化的椭球面. 束宽的呼吸还导致了光斑椭圆率的周期性变化. 在两维束腰重合时, 椭圆率的最大值和最小值总是固定的且二者之积为 1; 入射位置变化时, 将影响椭圆率变化速度在一个周期内的均匀性, 最小椭圆率总出现在固定位置, 但最大椭圆率出现的位置会发生改变.

[1] Peccianti M, Conti C, Assanto G, Luca A D, Umetsu C 2002 *Appl. Phys. Lett.* **81** 3335  
 [2] Snyder A W, Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538  
 [3] Pecseli H L, Rasmussen J J 1980 *Plasma Phys.* **22** 421  
 [4] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463  
 [5] Peccianti M, Brzdakiewicz K A, Assanto G 2002 *Opt. Lett.* **27** 1460  
 [6] Rotschild C, Cohen O, Manela O, Segev M, Carmon T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 213904  
 [7] Nikolov N I, Neshev D, Bang O 2003 *Phys. Rev. E* **68** 036614  
 [8] Larsen P V, Siensen M P, Bang O, Królkowski W Z, Trillo S 2006 *Phys. Rev. E* **73** 036614  
 [9] Buccoliero D, Desyatnikov A S, Królkowski W, Kivshar Y S 2007

*Phys. Rev. Lett.* **98** 053901  
 [10] Deng D M, Zhao X, Guo Q, Lan S 2007 *J. Opt. Soc. Am. B* **24** 2537  
 [11] Briedis D, Petersen D E, Edmundson D, Królkowski W Z, Bang O 2005 *Opt. Express* **13** 435  
 [12] Dai J H, Guo Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1752 (in Chinese) [戴继慧, 郭旗 2009 物理学报 **58** 1752]  
 [13] Lopez-Aguayo S, Desyatnikov A S, Kivshar Y S, Skupin S, Królkowski W, Bang O 2006 *Opt. Lett.* **31** 1100  
 [14] Lu D Q, Hu W 2009 *Phys. Rev. A* **79** 043833  
 [15] Lü B D 2003 *Laser Optics* (3rd Ed.) (Beijing: Higher Education Press) p163 (in Chinese) [吕百达 2003 激光光学 (第三版) (北京: 高等教育出版社) 第 163 页]  
 [16] Lu D Q, Hu W, Guo Q 2009 *Europhys. Lett.* **86** 44004

# Shape-variant astigmatic elliptical breathers in strongly nonlocal nonlinear medium\*

Lu Da-Quan<sup>†</sup>

(Laboratory of Nanophotonic Functional Materials and Devices, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

(Received 4 February 2013; revised manuscript received 26 March 2013)

## Abstract

The analytical solution for the shape-variant astigmatic elliptical breathers in strongly nonlocal nonlinear medium is obtained, and the propagation properties of this type of breather is investigated according to the solution. During propagation, the beam in  $x$ - and  $y$ -direction keeps Gaussian, the beam width and the curvature of the cophasal line vary periodically but asynchronously. For the two-dimensional off-waist input case, the initial convergence (divergence) makes the width narrowed (broaden) first near the entrance plane, no matter what the input power is; then varies periodically but asynchronously in  $x$ - and  $y$ -direction. For the one-dimensional on-waist input case, the beam might breathe only in one direction. The breather of the beam width induces the periodical variation of the curvature for the elliptically cophasal surface and the ellipticity of the pattern. If the location of the waist in  $x$ -direction and that in  $y$ -direction are identical with each other, the product of the maximum and the minimum of the ellipticity keeps equal to unify. In this case, the position of the entrance plane does not affect the maxima and the minima of the ellipticity, but affects the uniformity for the variation velocity of the ellipticity in a period.

**Keywords:** shape-variant breather, astigmatism, strongly nonlocal nonlinear media

**PACS:** 42.65.Tg, 42.65.Jx

**DOI:** 10.7498/aps.62.144209

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10804033, 11174090, 11174091).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: ludq@scnu.edu.cn