# 微平行管道内 Jeffrey 流体的非定常电渗流动\*

### 刘全生 杨联贵\* 苏洁

(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021) (2013年3月15日收到;2013年3月28日收到修改稿)

研究了微平行管道内线性黏弹性流体的非定常电渗流动,其中线性黏弹性流体的本构关系是由 Jeffrey 流体模型来描述的.利用 Laplace 变换法,求解了线性化的 Poisson-Boltzmann 方程、非定常的柯西动量方程和 Jeffrey 流体本构方程,给出了黏弹性 Jeffrey 流体电渗速度的解析表达式,分析了无量纲弛豫时间 $\lambda_1$ 和滞后时间 $\lambda_2$ 对速度剖面的影响.发现滞后时间为零时,弛豫时间越小,速度剖面图越接近牛顿流体的速度剖面图;随着弛豫时间和滞后时间的增加,速度振幅也变得越来越大,随着时间的增加,速度逐渐趋于恒定.

关键词:双电层,微平行管道, Jeffrey 流体,非定常电渗流动
 PACS: 47.50.-d, 47.61.-k, 47.57.jd
 DOI: 10.7498/aps.62.144702

### 1 引 言

微流体力学是指在微尺度管道内流体的流动 问题,近年来由于它在物理、生物、医学和化学等 多学科领域的广泛应用,如喷墨打印头、DNA分 析、样本检测和医学诊断等,使其成为快速发展的 科学前沿领域之一<sup>[1]</sup>.与宏观尺度流体流动相比, 微流体管道特征尺度的减小导致面力远远大于体 力,这使得微流体力学表现出不同于宏观尺度流体 流动的新的特性,如微尺度效应、滑移效应、表面 力及毛细效应、快速热传导效应等<sup>[2]</sup>.目前微流体 的驱动和控制技术种类很多,采用的原理不尽相同. 通常用来驱动微管道中流体流动的机制有压力梯 度、表面张力、外电场、外部磁场以及高频声波 驱动等<sup>[3]</sup>.利用外电场来控制微管道内流体流动是 目前微流体研究领域通常采用的形式.

一般而言,绝大多数物质与极性溶液相接触时, 往往在表面产生负电荷.这种现象会影响壁面附近 的离子在溶液内的分布,与壁面极性相反的异性离 子会被吸引到壁面;同性离子受到排斥而远离壁 面,从而形成双电层 (electric double-layer, EDL). 当 微管道两端施加外电场时,双电层中的离子将会受 到电场力的作用而运动. 这是由于流体黏性的作用, 移动的自由离子将会带动附近流体微团运动,最终 形成了电渗流 (electroosmotic flow, EOF)<sup>[4]</sup>. 由于其 操作简单、可控性好且流速剖面较为平整而减小 了轴向的扩散、不需要机械外力驱动等优点,近年 来得到了国内外广泛的研究和应用,主要被用于生 物、化学和制药领域.

在各种几何形状的微管道中,完全发展的牛顿流体 EOF 问题在理论与实验方面已有很多研究<sup>[5-10]</sup>.然而,这种定常的电渗流动问题要求较高电压和较大场强,可能给实验条件带来诸多困难.最近,利用交流电场驱动作为微流体力学驱动机制的 EOF 引起了很多学者的极大兴趣. Dutta 和 Beskok<sup>[11]</sup> 最早研究了两个平行板之间的周期 EOF,并且获得了解析解.他们阐述了平行板间周期电渗流和斯托克斯第二问题之间的异同点. Keh 和 Tseng<sup>[12]</sup> 研究了瞬时一维微管道中的电渗流动,给出了微管道中 EOF 速度和瞬时流率的解析表达式.

© 2013 中国物理学会 Chinese Physical Society

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:11062005,11202092)、非线性力学国家重点实验室开放基金、内蒙古自治区高等学校青年科技英才支持计划 (批准号:NJYT-13-A02)、内蒙古自治区自然科学基金(批准号:2010BS0107,2012MS0107)、内蒙古大学学科带头人科研启动基金(批准号: Z20080211)和内蒙古自治区自然科学基金重点项目(批准号:2009ZD01)、内蒙古自治区研究生教育创新计划项目和内蒙古大学提升综合实 力项目(批准号:1402020201)资助的课题.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: lgyang@imu.edu.cn

通过运用格林函数法, Kang 等<sup>[13]</sup>解析给出了瞬时 EOF 速度场. Wang 等<sup>[14]</sup>给出了矩形微管道中的 周期 EOF 流动的半解析解. 最近, Jian 等<sup>[15]</sup>给出了 环形微管道中周期 EOF 速度分布的解析解,并讨 论了平行板和圆形微管这两种极限情况下的周期 EOF. 一般来讲, 周期 EOF 的速度依赖于振荡雷诺 数、EDL 的属性和外加电场强度.

以上提及的研究考虑的都是牛顿流体,但微流 体装置常被用来研究生物流体,这些流体多是长链 分子的溶液,使得流体呈现出许多非牛顿流体的性 质. Das 和 Chakrabotry<sup>[16]</sup> 首次研究了非弹性幂律 流体的定常 EOF 流动, 他们获得了依赖于幂律流体 指数 n 的速度解析表达式. Vasu 和 De<sup>[17]</sup> 模拟了高 Zeta 势矩形微管道中幂律流体的 EOF 流动. Tang 等[18] 运用格子玻尔兹曼方法研究了微管道中幂律 流体的 EOF 问题. Wang 等<sup>[19]</sup> 数值模拟了变 Zeta 势情况下毛细管接口电渗流动问题,指出 Zeta 势的 变化将极大地影响流场和压力场分布. Zhang 等<sup>[20]</sup> 利用有限差分法对电场驱动微通道中脉冲样品的 浓度扩散进行了数值模拟. Lin 等<sup>[21]</sup>研究了非均 匀微通道不同表面势的混合样品,并进行了数值分 析. Liu 和 Jian<sup>[22]</sup> 讨论了平行板微管道中黏弹性流 体的周期 EOF 问题,首次得到了平行板微管道中 线性黏弹性广义 Maxwell 模型的解析解,并给出了 无量纲的速度解析表达式. Chang 和 Jian<sup>[23]</sup> 在平行 板微管道中研究了高 Zeta 势周期 EOF, 他们获得了 广义 Maxwell 模型速度剖面的半解析表达式. Jian 等<sup>[24]</sup> 在矩形微管道中研究了周期 EOF, 并获得了 广义 Maxwell 模型的速度剖面的解析表达式. 此外 Jian 等<sup>[25]</sup> 在圆形微管道中研究了 Jeffrey 流体的 EOF 问题,考虑了聚合物大分子的排斥效应,将流 动区域分为两层,给出了速度剖面解析表达式.同 样的流体模型, Jian 等<sup>[26]</sup> 在平行板微管道中研究 了高 Zeta 势周期 EOF, 他们获得了 Jeffrey 模型速 度剖面的半解析表达式. Deng 等<sup>[27]</sup> 在矩形微管道 中数值模拟了非定常幂律流体的 EOF. Jiang 等<sup>[28]</sup> 在微管道内研究了非对称电极表面微观形貌对交 流电渗流速的影响.

本文的目的是研究平行板微管道中 Jeffrey 流体模型的非定常 EOF 问题, 推广文献 [25] 的结果, 给出 EOF 速度解析表达式.本文的组织如下:在 第二部分提出非定常 EOF 物理描述并给出速度分 布的解析表达式; 第三部分讨论计算结果并研究 相关参数对速度剖面的影响;最后,在第四部分给 出结论.

#### 2 公式推导和解析解

考虑带负电荷的平行微管道中不可压缩 Jeffrey 流体的非定常 EOF. 微管道的长度为 *L*, 宽度 为 *W*, 两平板间距为 2*H*. 假设平板的长度和宽度 远远大于微管道的高度, 即 *L*,  $W \gg 2H$ . 建立二维 直角坐标系, 令 *x* 轴 *y* 轴相互垂直并且分别与带电 平面相切, 我们规定下板位于 y = -H 处, 上板位于 y = H 处. EOF 流动是被沿轴线方向施加的场强为 *E*<sub>0</sub> 的直流电场所驱动. 由于几何形体上的对称性, 我们仅研究管道的上半部分. 若忽略沿 *x* 方向的压 力梯度, 那么柯西动量方程可以表示为

$$\rho \partial u(y,t) / \partial t = -\partial (\tau_{yx}) / \partial y + \rho_{e}(y) E_{0}, \qquad (1)$$

其中, u(y,t) 表示沿 x 轴方向的速度分量,  $\rho$  表示流体的密度, t 表示时间,  $\tau_{yx}$  是应力张量,  $\rho_e(y)$  表示流体的电荷体密度. 对于 Jeffrey 流体, 本构方程满足如下关系

$$\tau_{yx} + \frac{\lambda_1 \partial \tau_{yx}}{\partial t} = -\eta_0 \Big[ \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \Big], \qquad (2)$$

其中 $\lambda_1$ 表示流体的弛豫时间, $\lambda_2$ 表示流体的滞后时间, $\eta_0$ 是零剪切率黏度.

根据静电学理论, 电势  $\psi$  和流体单位体积的静 电荷密度  $\rho_{e}(y)$  之间的关系可由 Poisson-Boltzmann 方程描述

$$\frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} = -\frac{\rho_{\rm e}(y)}{\varepsilon},\tag{3}$$

$$\rho_{\rm e}(y) = -2n_0 z_{\rm v} e \sinh\left[\frac{z_{\rm v} e \psi(y)}{k_{\rm B} T}\right], \qquad (4)$$

其中,  $\varepsilon$  是电解质溶液的介电常数,  $n_0$  是液体离子的浓度,  $z_v$  是化合价, e 是电子所带的电荷量,  $k_B$  是 Boltzmann 常数, T 代表绝对温度. 代方程 (4) 到 (3), 得

$$\frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} = \frac{2n_0 z_v e}{\varepsilon} \sinh\left[\frac{z_v e \psi(y)}{k_{\rm B} T}\right],\tag{5}$$

相应的边界条件为

$$\Psi(y)|_{y=H} = \Psi_0, \quad \frac{\mathrm{d}\,\Psi(y)}{\mathrm{d}y}|_{y=0} = 0, \quad (6)$$

上式中  $\psi_0$  为壁面的 Zeta 势.

当双电层的电势分布较小时,应用 Debye-Hückel 近似,方程化解为

$$\frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} = \kappa^2 \psi(y),\tag{7}$$

求解上述问题,最终得到电荷密度分布

$$\rho_{e}(y) = -\varepsilon \kappa^{2} \psi_{0} \cosh(\kappa y) / \cosh(\kappa H),$$
  

$$\kappa = \left(2n_{0} z_{v}^{2} e^{2} / \varepsilon k_{B} T\right)^{1/2},$$
(8)

 $\kappa$ 称为 Debye-Hückel 参数, 其倒数  $1/\kappa$  具有长度因 子, 代表 EDL 的厚度, 称为 Debye 长度. 引入无量 纲变量:

$$u = \bar{u}U_{eo}, \quad y = \bar{y}H, (t, \lambda_1, \lambda_2) = (\bar{t}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)\eta_0\rho H^2,$$
  

$$\tau_{yx} = \bar{\tau}_{yx}H\eta_0 U_{eo}, \quad U_{eo} = -\varepsilon\psi_0 E_0/\eta_0,$$
  

$$K = \kappa H,$$
(9)

其中, U<sub>eo</sub> 表示牛顿流体稳定的 Helmholtz-Smoluchowski EOF 速度, *K*称作无量纲的电动宽度,它表征微管道的半宽度与 Debye 长度的比值. 为了方便起见,下面把所有无量纲的变量的上划线 去掉,控制方程化为

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial (\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{K^2 \cosh(Ky)}{\cosh(K)}, \quad (10)$$

$$\tau_{yx} + \lambda_1 \partial \tau_{yx} / \partial t = -(\partial u / \partial y + \lambda_2 \partial^2 u / \partial t \partial y), \quad (11)$$

通过 (10) 和 (11) 式消去 τ<sub>yx</sub>, 并给出相应的边界条 件

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t}$$
  
=  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} + \frac{K^2 \cosh(Ky)}{\cosh(K)},$  (12)  
 $du(0,t)/dy = 0, \quad u(1,t) = 0,$ 

$$u(y,0) = 0, \quad u_t(y,0) = 0.$$
 (13)

利用 Laplace 变换求解控制方程, 令 L[u(y,t)] = W(y,s), 方程化为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \beta^2 W - K^2 \cosh(Ky) / s(1 + \lambda_2 s) \cosh(K),$$
  
其中

$$\beta^2 = s(1+\lambda_1 s)/(1+\lambda_2 s).$$
 (14)

求解该常微分方程,得到

$$W = 2C_1 \cosh(\beta y) + \frac{K^2(\cosh(\beta y) - \cosh(Ky))}{s(1 + \lambda_2 s)(K^2 - \beta^2)\cosh(K)}, \quad (15)$$

其中

$$C_1 = -K^2(\cosh(\beta) - \cosh(K))/2s(1 + \lambda_2 s)(K^2)$$

$$-\beta^2)\cosh(\beta)\cosh(K). \tag{16}$$

对W进行Laplace逆变换,

$$u(y,t) = 1 - \cosh(Ky) / \cosh(K) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta_{ni}K^2 \cosh(\beta_{ni}y) e^{s_{ni}t}}{s_{ni}(1 + \lambda_2 s_{ni})(K^2 - \beta_{ni}^2) \sinh(\beta_{ni})} \times \frac{(1 + \lambda_2 s_{ni})^2}{(1 + 2\lambda_1 s_{ni})(1 + \lambda_2 s_{ni}) - \lambda_2 s_{ni}(1 + \lambda_1 s_{ni})} \\ i = 1, 2, \qquad (17)$$

其中,

$$\alpha_{n} = (2n-1)^{2} \pi^{2}/4, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots,$$

$$s_{n1} = (-(1+\lambda_{2}\alpha_{n}) + \sqrt{(1+\lambda_{2}\alpha_{n})^{2} - 4\lambda_{1}\alpha_{n}})/2\lambda_{1},$$

$$s_{n2} = (-(1+\lambda_{2}\alpha_{n}) - \sqrt{(1+\lambda_{2}\alpha_{n})^{2} - 4\lambda_{1}\alpha_{n}})/2\lambda_{1},$$

$$\beta_{ni} = \sqrt{s_{ni}(1+\lambda_{1}s_{ni})/(1+\lambda_{2}s_{ni})} \quad i = 1, 2.$$
(18)

#### 3 结果与讨论

当 K = 20 和 y = 0.5, 对于给定的滞后时间 ( $\lambda_2 = 0$ ), 图 1(a) 给出了不同的弛豫时间  $\lambda_1$  (0.1, 0.5 和 1.0) 对应广义 Maxwell 流体的 EOF 速度剖面分 布. 弛豫时间  $\lambda_1$  越小, 速度剖面图越接近牛顿流体 的速度剖面图. 对于给定的弛豫时间 ( $\lambda_1 = 1$ ), 图 1(b) 给出了不同的滞后时间  $\lambda_2$  (0.1, 0.4, 0.8 和 0.9) 对应 Jeffrey 流体的 EOF 速度剖面分布. 滞后时间  $\lambda_2$  的增加, 速度振幅也变得越来越大, 这意味着外 电场驱动力对速度分布的影响更加显著. 从图 1 很 容易看出, 弛豫时间和滞后时间越小, EOF 速度剖 面越快接近恒定流动. 原因是弛豫时间或滞后时间 越小, 说明黏弹性流体的恢复时间越短, 流体越容 易达到恒定流动.

当 K = 20,对于给定的弛豫时间 ( $\lambda_1 = 1.5$ ),图 2 在不同的滞后时间  $\lambda_2$  (0.1, 0.4, 0.8 和 1.0)下,不 同的无量纲时间 t (0.001, 0.01, 0.1 和 1) 对应 Jeffrey 流体的半管道 EOF 速度剖面. 从图 2 可以看出,无 量纲 EOF 速度剖面在垂直方向的变化. 我们发现 随着无量纲时间的增加,速度逐渐趋于恒定,在不 同的滞后时间下,速度变化减小. 当时间一定时,速 度振幅随滞后时间的增大而增大. EOF 速度的最 大变化区域仅限于接近两个固体表面的薄层,即 EDL. 速度剖面在 EDL 范围从零急速增加到最大, 然后随着壁面的远离减少. 这些结果是由外部的电 场和 EDL 的相互作用造成的电动力驱动流所导致.



图 1 无量纲 EOF 速度剖面随时间的变化 (K = 20, y = 0.5) (a)  $\lambda_2 = 0$ ; (b)  $\lambda_1 = 1$ 



图 2 不同滞后时间  $\lambda_2$  和 *t* 对无量纲 EOF 速度的剖面的影响 (*K* = 20,  $\lambda_1$  = 1.5) (a) *t* = 0.001; (b) *t* = 0.01; (c) *t* = 0.1; (d) *t* = 1

当 K = 20, 对于给定的滞后时间 ( $\lambda_2 = 0.1$ ), 图 3 在不同的弛豫时间  $\lambda_1$  (0.2, 0.4, 0.6 和 0.8) 下, 不 同的无量纲时间 t (0.001 和 0.1) 对应 Jeffrey 流体 的半管道 EOF 速度剖面. 从图 3 可以看出, 在小的 弛豫时间下, 速度的变化被限制在紧贴 EDL 的狭 窄区域. 随着弛豫时间的增长流体的弹性变得显著, 并且由于弹性是流体的整体物理性质, 速度变化可 以延伸到流动的全部区域. 此外, 容易看出速度振 幅随时间的增加而增大,同时速度振幅也随弛豫时间的增加而增大.流体的运动没有足够的时间扩散 到微管道的两壁面中间的平面,并且 EOF 的速度变 化被限制在紧贴两固体壁面的薄层中.对于 Jeffrey 流体,较长的弛豫时间意味着较大的弹性效应和较 小的恢复能力.由于 Jeffrey 的"衰退记忆"现象,增 加的弛豫时间导致 EOF 的速度剖面在外加电场的 作用下更加容易变化.



图 3 不同弛豫时间  $\lambda_1$  和 t 对无量纲 EOF 速度的剖面的影响 (K = 20,  $\lambda_2$  = 0.1) (a) t = 0.001; (b) t = 0.1

#### 4 结论

本文研究的是微平行管道内 Jeffrey 流体的电 渗流动,其中线性黏弹性流体的本构关系是由 Jeffrey 流体模型来描述.研究过程中需要求解线性化 的 Poisson-Boltzmann 方程,非定常的柯西动量方程 和 Jeffrey 流体本构方程.我们给出了 Jeffrey 流体 电渗速度的解析表达式.结果表明 Jeffrey 流体的速 度剖面强烈地依赖于无量时间 t, 弛豫时间  $\lambda_1$  和滯 后时间 λ<sub>2</sub>,并得出如下结论:

 1) 弛豫时间 λ<sub>1</sub> 越小, 速度剖面图越接近牛顿 流体的速度剖面图;

 2)随着弛豫时间 λ<sub>1</sub> 与滞后时间 λ<sub>2</sub> 的增加,速 度振幅也变得越来越大;

3) 随着无量纲时间的增加, 速度逐渐趋于恒定;

4) 速度的变化被限制在紧贴 EDL 的狭窄区 域内.

- [1] Stone H A, Stroock A D, Ajdari A 2004 Ann. Rev. Fluid Mech. 36 381
- [2] Bayraktar T, Pidugu S B 2006 Int. J. Heat Mass Trans. 49 815
- [3] Squires T M, Quake S R 2005 Rev. Mod. Phys. 77 977
- [4] Hunter R J 1981 Zeta Potential in Colloid Science (New York : Academic Press) p15
- [5] Levine S, Marriott J R, Neale G, Epstein N 1975 J. Colloid Interface Sci. 52 136
- [6] Tsao H K 2000 J. Colloid Interface Sci. 225 247
- [7] Hsu J P, Kao C Y, Tseng S J, Chen C J 2002 J. Colloid Interface Sci. 248 176
- [8] Yang C, Li D, Masliyah J H 1998 Int. J. Heat Mass Transfer 41 4229
- [9] Bianchi F, Ferrigno R, Girault H H 2000 Anal. Chem. 72 1987
- [10] Wang C Y, Liu Y H, Chang C C 2008 Phys. Fluids 20 063105
- [11] Dutta P, Beskok A 2001 Anal. Chem. 73 5097
- [12] Keh H J, Tseng H C 2001 J. Colloid Interface Sci. 242 450
- [13] Kang Y J, Yang C, Huang X Y 2002 Int. J. Eng. Sci. 40 2203
- [14] Wang X M, Chen B, Wu J K 2007 Phys. Fluids 19 127101
- [15] Jian Y J, Yang L G, Liu Q S 2010 Phys. Fluids 22 042001
- [16] Das S, Chakraborty S 2006 Anal. Chim. Acta 559 15
- [17] Vasu N, De S 2010 Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects 368 44

- [18] Tang G H, Li X F, He Y L, Tao W Q 2009 J. Non-Newtonian Fluid Mech. 157 133
- [19] Wang R J, Lin J Z, Li Z H 2005 Binmedical Microdevices 7 131
- [20] Zhang K, Lin J Z, Li Z H 2006 Appl. Math. Mech. (English Edition) 27 575
- [21] Lin J Z, Zhang K, Li H J 2006 Chin. Phys. 15 2688
- [22] Liu Q S, Jian Y J, Yang L G 2011 J. Non-Newtonian Fluid Mech. 166 478
- [23] Chang L, Jian Y J 2012 Acta Phys. Sin. 61 124702 (in Chinese) [长 龙, 菅永军 2012 物理学报 61 124702]
- [24] Jian Y J, Liu Q S, Yang L G 2011 J. Non-Newtonian Fluid Mech. 166 1304
- [25] Liu Q S, Jian Y J, Yang L G 2011 Phys. Fluids 23 102001
- [26] Jian Y J, Liu Q S, Duan H Z, Chang L, Yang L G 2011 The Sixth International Conference on Fluid Mechanics (ICFM6) Guang Zhou, June 30–July 3, 2011 p616
- [27] Deng S Y, Jian Y J, Bi Y H, Chang L, Wang H J, Liu Q S 2012 Mech. Res. Commun. 39 9
- [28] Jiang H Y, Li S S, Hou Z X, Ren Y K, Sun Y J 2011 Acta Phys. Sin. 60 020702 (in Chinese) [姜洪源, 李姗姗, 侯珍秀, 任玉坤, 孙永军 2011 物理学报 60 020702]

# Transient electroosmotic flow of general Jeffrey fluid between two micro-parallel plates\*

Liu Quan-Sheng Yang Lian-Gui<sup>†</sup> Su Jie

(School of Mechanical Science, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China) (Received 15 March 2013; revised manuscript received 28 March 2013)

#### Abstract

In this study, analytical solutions are presented for the unsteady electroosmotic flow of linear viscoelastic fluid between microparallel plates. The linear viscoelastic fluid used here is described by the general Jeffrey model. Using Laplace transform method, the solution involves analytically solving the linearized Poisson-Boltzmann equation, together with the Cauchy momentum equation and the general Jeffrey constitutive equation. By numerical computations, the influences of the dimensionless relaxation time  $\lambda_1$  and retardation time  $\lambda_2$  on velocity profile are presented. In addition, we find that when the retardation time is zero, the smaller the relaxation time, the more close to the Newtonian fluid velocity profile the velocity profile is. With the increases of the relaxation time and the retardation time, the velocity amplitude also becomes bigger and bigger. As time goes by, the velocity tends to be stable gradually.

Keywords: electric double-layer, micro-parallel plates, Jeffrey fluids, unsteady electroosmotic flow

**PACS:** 47.50.-d, 47.61.-k, 47.57.jd

**DOI:** 10.7498/aps.62.144702

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11062005, 11202092), Opening Fund of State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, the Program for Young Talents of Science and Technology in Universities of Inner Mongolia Auton Omous Region of China (Grant No. NJYT-13-A02), the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant Nos. 2010BS0107, 2012MS0107), the Research Start up Fund for Excellent Talents at Inner Mongolia University, China (Grant No. Z20080211), the Natural Science Key Fund of Inner Mongolia, China (Grant No 2009ZD01), the Innovative programs funded projects of Postgraduate Education in Inner Mongolia Autonomous Region of China, and the Inner Mongolia University of enhancing the comprehensive strength funding, China (Grant No. 1402020201).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: lgyang@imu.edu.cn