

# 非理想流体中 Rayleigh-Taylor 和 Richtmyer-Meshkov 不稳定性气泡速度研究\*

霍新贺<sup>1)</sup> 王立锋<sup>2)</sup> 陶焯晟<sup>1)</sup> 李英骏<sup>1)†</sup>

1) (中国矿业大学, 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 北京 100083)

2) (北京大学应用物理与技术研究中心, 高能量密度物理数值模拟教育部重点实验室, 北京 100871)

(2013年1月4日收到; 2013年3月25日收到修改稿)

在随气泡顶端运动的坐标系中, 通过将理想流体模型推广到非理想流体的情况, 研究了流体黏性和表面张力对 Rayleigh-Taylor (RT) 和 Richtmyer-Meshkov (RM) 不稳定性气泡速度的影响. 首先得到了 RT 和 RM 不稳定性气泡运动的控制方程 (自洽的微分方程组); 其次给出了二维平面坐标和三维柱坐标中气泡速度的数值解和渐近解, 并定量分析了流体黏性和表面张力对 RT 和 RM 气泡速度和振幅的影响. 结果表明: 从线性阶段到非线性阶段的全过程中, 非理想流体中的气泡速度和振幅小于理想流体中的气泡速度和振幅. 也就是说, 流体黏性和表面张力对 RT 和 RM 不稳定性的发展都具有致稳作用.

**关键词:** Rayleigh-Taylor 不稳定性, Richtmyer-Meshkov 不稳定性, 气泡速度, 非理想流体

**PACS:** 47.20.Ma, 52.35.Py, 52.57.Fg

**DOI:** 10.7498/aps.62.144705

## 1 引言

由于对惯性约束核聚变 (ICF)、煤岩瓦斯突出、天体演化等过程的重要基础性影响, 以及在自然界流体力学过程中的普遍存在性, 流体中的 Rayleigh-Taylor (RT) 不稳定性<sup>[1,2]</sup> 和 Richtmyer-Meshkov (RM) 不稳定性<sup>[3,4]</sup> 研究一直是流体力学研究中的热点问题. 在流体不稳定性发展的中后期, 尖钉和气泡逐渐出现<sup>[5,6]</sup>. 因此, 从理论上研究不稳定性过程中气泡的演化过程和物理影响无论在物理基础研究方面还是 ICF 应用方面都具有重要意义.

对于 RT 和 RM 不稳定性的小扰动 ( $k\eta \ll 1$ ) 线性化阶段, 人们对其已经进行了大量的研究<sup>[2,3]</sup>, 取得很好的成果. 随着小扰动振幅的增大 ( $k\eta \sim 1$ ), 流体界面会出现上钝下尖的结构. 上钝的结构由轻流体物质组成, 最终发展成为“气泡”. 下尖的结构由重流体物质组成, 最终发展成为“尖钉”. 在非线性

发展后期, RT 不稳定性气泡以恒定的速度运动, RM 不稳定的气泡则随时间衰减. 为了研究非线性发展后期 RT 和 RM 不稳定性的发展变化, 人们提出了各种模型来进行研究. Layzer<sup>[7]</sup> 在 1955 年提出 Layzer 势流理论模型, 由于 Layzer 模型直接给出了轻重流体的速度势, 可以直接代入伯努利方程求解. Zufiria<sup>[8]</sup> 于 1988 年提出点源模型来研究 RT 和 RM 不稳定性, Zufiria 点源模型给出的是复数势, 比较麻烦, 进展相对较少. 还有研究非线性阶段 RT 和 RM 的弱非线性理论<sup>[9-13]</sup>. 在 Layzer 模型的基础上, 很多学者对 RT 和 RM 不稳定性进行了大量的研究, 如 Zhang<sup>[14]</sup>, Goncharov<sup>[15]</sup> 和 Mikaelian<sup>[16]</sup> 等分别利用不同形式的速度势, 把 Layzer 模型运用到任意密度比的界面上, 给出的气泡解析结果与数值模拟结果和实验结果符合得非常好.

文献 [14-16] 所研究的流体都是理想的流体, 并没有考虑流体的黏性和表面张力对气泡速度的影响. 众所周知, 表面张力会产生一个截止波数, 流体黏性会引起流体高波数振荡解的阻尼作用.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11074300, 11274026, 11275031) 和国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2013CBA01504) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lyj@aphy.iphy.ac.cn

Young 和 Ham<sup>[17]</sup> 把 Goncharov 模型推广到考虑表面张力的不可压缩的流体, 结果表明表面张力阻碍线性阶段气泡的增长率, 并且表面张力对非线性阶段气泡的定常速度也有抑制作用. Niebling 等<sup>[18]</sup> 研究了流体可压缩性和黏性对 RT 不稳定性的结构和动力学运动的作用, 发现流体的质量对流体本身的压强很小. 流体黏性对流体的动力学运动有很大的作用, 流体间的混合率会随着流体黏性的增大而增大. Garnier<sup>[19]</sup> 运用统计多模弱非线性方法分析表面张力对 RT 不稳定性的作用, 发现三阶非线性估算对于捕捉非线性增长率是充分和必须的.

由于 Goncharov<sup>[15]</sup> 和 Sohn<sup>[20]</sup> 各自采用不同的速度势发展了任意 A 数下的速度势模型, 其中 Goncharov 模型与数值模拟结果符合得最好. 基于 Goncharov 模型, 本文将理想流体推广到非理想流体中, 并且提出轻重流体新的速度势, 着重在以气泡顶端为原点的动坐标系研究流体黏性和表面张力对 RT 和 RM 不稳定性气泡的作用. 本文在二维平面坐标系中, 给出了 RT 和 RM 气泡速度的数值解和渐近解, 定量分析流体黏性和表面张力对 RT 和 RM 气泡速度和振幅的作用. 在三维柱坐标中, 通过对比发现三维速度和振幅要大于二维速度和振幅, 并进一步通过无量纲化研究流体黏性和表面张力对 RT 和 RM 气泡渐近速度的作用. 发现表面张力和流体黏性共同阻碍 RT 气泡的渐近速度, RM 气泡的渐近衰减速度取决于流体表面张力和黏性的相对大小. 通过对二维和三维气泡速度的研究, 以便理解非理想流体中 RT 和 RM 不稳定性气泡的演化机理.

## 2 非理想流体中二维 RT 和 RM 气泡速度的研究

假设有一无限长竖直的管, 管中有两种密度不同的、不可压缩的、无旋的非理想流体. 重流体在界面上, 轻流体在界面下 ( $\rho_h > \rho_l$ ). 在本文中两种流体的流态主要考虑的是层流. 研究流体的表面张力和黏性对两种流体交界面的作用. 两种流体的交界面用  $y = \eta(x, t)$  描述. 只考虑交界面的单模耦合, 不考虑气泡间的吞并和非线性多模耦合.

考虑到两种流体界面上气泡顶端的形状近似抛物线, 故取

$$y = \eta(x, t) = \eta_2(t)x^2. \quad (1)$$

由于流体是无旋的, 则气泡顶端附近存在满足 Laplace 方程的速度势  $\phi$

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0. \quad (2)$$

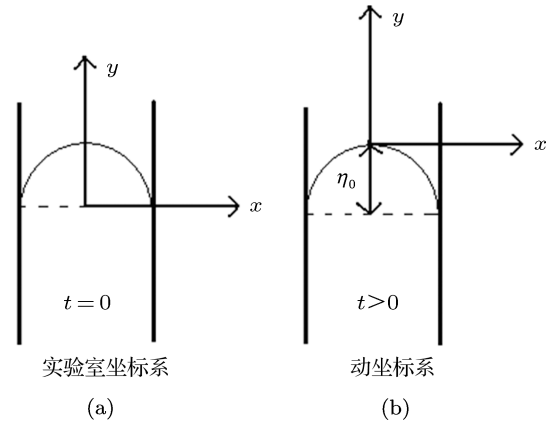


图1 实验室坐标系与动坐标系  $x$  和  $y$  轴相互平行, 动坐标系在气泡顶端处, 随着气泡一起运动

两种流体的交界面函数  $y = \eta(x, t)$  还必须满足法向速度连续条件和 Bernoulli 方程

$$\eta_t + \phi_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = \phi_y, \quad (3)$$

$$\left[ \rho \left( \phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta \right) \right] = f(t), \quad (4)$$

在这里,  $g$  是重力场的加速度,  $\phi_x$  和  $\phi_y$  分别是界面速度的  $x$  和  $y$  向分量. 由于所研究的流体是非理想流体, 即考虑流体的表面张力和流体黏性对两种流体界面的作用, 则黏性剪切应力  $\left( 2 \left[ \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right)$  和界面表面张力  $\left( -\sigma \frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}} \right)$  共同构成流体界面的法向应力. 这样流体界面  $y = \eta(x, t)$  上的法向应力为

$$[p] = 2 \left[ \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \sigma \frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}}, \quad (5)$$

式中  $\mu$  是流体的黏度系数,  $\sigma$  是流体界面的表面张力系数.

图1 以气泡的顶点为坐标原点, 建立动坐标系, 动坐标系的坐标轴分别与实验室坐标系的坐标轴平行, 并且方向相同. 在非惯性系中,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{a}$  是绝对加速度,  $\mathbf{a}_0$  是牵连加速度,  $\mathbf{a}'$  是相对加速度. 由于  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ , 方向竖直向下,  $\mathbf{a}_0 = -\ddot{\eta}_0(t)$ , 则有  $\mathbf{a}' = \mathbf{g} + \ddot{\eta}_0(t)$ . 所以得到动坐标系中 Bernoulli 方程

$$\left[ \rho \left( \phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + (g + \ddot{\eta}_0) \eta \right) \right] = f(t). \quad (6)$$

现在由气泡顶端的法向应力和 Bernoulli 方程可以得到动坐标系中流体界面的动力学方程

$$-\left[\rho\left(\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + (g + \dot{\eta}_0)\eta\right)\right] = 2\left[\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right] - \sigma\frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}}, \quad (7)$$

(7) 式中,  $[Q] = Q_1 - Q_h$ , 约束方程 (3) 和 (7) 共同决定着非理想流体交界面的发展演化. 为使轻重流体的速度势既满足 Laplace 方程, 又能满足无限远边界条件, 则本文中所取重(轻)流体的速度势分别为

$$\phi^h = a_1(t)\left[\cos(kx)e^{-ky} - 1\right] + a_1(t)ky, \quad (8)$$

$$\phi^l = b_1(t)\left[\cos(kx)e^{ky} - 1\right] + b_2(t)y. \quad (9)$$

由速度势的边界条件得到无穷远处重流体的速度

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u_y^h = ka_1(t) = -\dot{\eta}_0, \quad (10)$$

$$a_1(t) = -\frac{\dot{\eta}_0}{k}. \quad (11)$$

现在把方程 (1), (8), (9) 代入流体界面的约束方程 (3) 和 (7) 中, 并在气泡的顶端处对其进行  $x$  的二阶小量展开, 有

$$\dot{\eta}_2 = -k\left(3\eta_2 + \frac{k}{2}\right)\dot{\eta}_0, \quad (12)$$

$$\alpha_1\dot{\eta}_0 + \alpha_2\dot{\eta}_0^2 + \alpha_3\dot{\eta}_0^3 = -Ag\eta_2 + 6(1+A)\frac{\sigma}{\rho_h}\eta_2^3, \quad (13)$$

方程 (13) 式中系数为

$$\alpha_1 = \frac{k^2 - 4A\eta_2(k + 3\eta_2)}{2(k - 6\eta_2)}, \quad (14)$$

$$\alpha_2 = k^2\frac{(4A - 3)k^2 + 6(3A - 5)k\eta_2 + 36A\eta_2^2}{2(k - 6\eta_2)^2}, \quad (15)$$

$$\alpha_3 = \frac{(1+A)k^2}{2\rho_h(k - 6\eta_2)}\left[\mu_h(k + 2\eta_2)(k - 6\eta_2) + \mu_l(k + 6\eta_2)(k - 2\eta_2)\right], \quad (16)$$

其中  $A = \frac{\rho_h - \rho_l}{\rho_h + \rho_l}$ , 微分方程 (12) 和 (13) 与 Sohn<sup>[21]</sup> 在实验室坐标系得到的结论相符合, 也证明了我们的模型是正确的. 现在直接积分方程 (12), 有

$$\eta_2(t) = -\frac{k}{6} + \left[\frac{k}{6} + \eta_2(0)\right]e^{-3k[\eta_0(t) - \eta_0(0)]}, \quad (17)$$

(17) 式中, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\eta_0(t) \gg \eta_0(0)$ , 那么有  $e^{-3k[\eta_0(t) - \eta_0(0)]} \rightarrow 0$ ,

$$\eta_2 \rightarrow -\frac{k}{6}. \quad (18)$$

现在从 (18) 和 (13) 式求得二维 RT 气泡渐近速度

$$U_{RT}^{2D} \rightarrow -\frac{2}{3}k\nu_h + \sqrt{\frac{2A}{3(1+A)}\frac{g}{k} - \frac{k}{9}\frac{\sigma}{\rho_h} + \frac{4}{9}k^2\nu_h^2}, \quad (19)$$

(19) 式中,  $\nu_h = \mu_h/\rho_h$  为重流体动力学黏性系数. 可以发现 RT 不稳定性气泡的渐近速度与轻流体黏性没有关系, 而与重流体动力学黏性系数有关. 在 (17) 式中气泡的渐近曲率取近似值  $\eta_2 \rightarrow -k/6$ , 这样在 (16) 式中轻流体的黏性被忽略了. 我们推断轻流体黏性对气泡速度的作用有可能出现在本模型的更高阶近似展开中. (19) 式显示表面张力和重流体黏性可以减小 RT 不稳定性气泡渐近速度.

RM 不稳定性气泡速度的处理方法与上面的是一样的, 只需在 (12) 和 (13) 式中令  $g \rightarrow 0$ ,  $\eta_2 \rightarrow -k/6$ . 对于 RM 不稳定性, 现在引入一个参数  $q = 4k^2\nu_h^2 - \frac{\sigma}{\rho_h}k$ , 来衡量流体黏性和表面张力的作用大小.

当  $q = 4k^2\nu_h^2 - \frac{\sigma}{\rho_h}k > 0$  时, 即流体黏性应力大于表面张力, 可得到二维 RM 气泡渐近速度

$$U_{RM}^{2D} \rightarrow -\frac{2}{3}k\nu_h + \frac{\sqrt{q}}{3}\coth\left(\frac{1+A}{3+A}k\sqrt{qt}\right), \quad (20)$$

方程 (20) 收敛于

$$U_{RM}^{2D} \rightarrow \frac{1}{3}(-2k\nu_h + \sqrt{q}) + \frac{\sqrt{q}}{3}e^{-\eta},$$

$$\gamma = \frac{2(1+A)}{3+A}k\sqrt{q}. \quad (21)$$

由 (21) 式知, RM 不稳定性气泡速度由于受到流体黏性的作用, 气泡速度随时间按指数衰减. 然而在理想流体中, RM 气泡速度随时间衰减为  $1/t$ , 所以在考虑流体黏性和表面张力的非理想流体中, RM 气泡衰减速度远远大于理想流体中气泡的衰减速度.

当  $q = 4k^2\nu_h^2 - \frac{\sigma}{\rho_h}k \rightarrow 0$  时, 即流体黏性应力等于表面张力, 可以得到二维 RM 气泡渐近速度

$$U_{RM}^{2D} \rightarrow -\frac{2}{3}k\nu_h + \frac{3+A}{3(1+A)}\frac{1}{kt}, \quad (22)$$

在 (22) 式中, 此时非理想流体 RM 气泡衰减速度和理想<sup>[15]</sup>流体  $\left(U_{RM} = \frac{3+A}{3(1+A)}\frac{1}{kt}\right)$  的衰减速度一样.

当  $q = 4k^2\nu_h^2 - \frac{\sigma}{\rho_h}k < 0$  时, 即表面张力占主导时, 可以得到二维 RM 不稳定性气泡速度

$$U_{RM}^{2D} \rightarrow -\frac{2}{3}k\nu_h + \frac{\sqrt{-q}}{3}\cot\left(\frac{1+A}{3+A}k\sqrt{-qt}\right), \quad (23)$$

由 (23) 式知道, RM 不稳定性中流体界面上表面张力大于黏性应力时, 流体界面上会产生振荡, 交界面上上下振动, 出现界面波. 这是由于 RM 不稳定性后期 ( $t > 0$ ), 流体交界面上没有外场的加速度 ( $g \rightarrow \Delta v \delta(t) \rightarrow 0$ ), 这样流体表面张力为界面提供了一个回复力, 流体界面才发生振荡.

将 (19) 式的二维 RT 不稳定性气泡渐近速度进行无量纲化处理, 定义弗劳德数有  $Fr = \frac{U}{\sqrt{\frac{Ag\lambda}{1+A}}}$ ,

重力雷诺数  $Re = \frac{1}{\nu_h} \sqrt{g \left( \frac{A\lambda}{1+\lambda} \right)^3}$ , 邦德数  $Bo = \frac{\rho_h g}{\sigma} \left( \frac{A\lambda}{1+A} \right)^2$ , 新定义的 Atwood 数  $A^* = \frac{2A}{1+A}$ , 则 (19) 式变为

$$Fr_{RT}^{2D} \rightarrow -\frac{2\pi A^*}{3 Re} + \sqrt{\frac{1}{3\pi} - \frac{\pi A^*}{9 Bo} + \left( \frac{2\pi A^*}{3 Re} \right)^2}. \quad (24)$$

将 (20), (22), (23) 式的二维 RM 不稳定性气泡渐近速度进行无量纲化处理, 定义初速度  $U_0$ , 弗劳德数  $\bar{U}^{2D} = U/U_0$ , RM 韦伯数  $We = \frac{\rho_h U_0^2}{\sigma} \left( \frac{A\lambda}{1+A} \right)$ ,

无量纲时间  $\bar{t} = kU_0 t$ , 雷诺数  $Re_{RM} = \frac{U_0 \left( \frac{A\lambda}{1+A} \right)}{\nu_h}$ . (20), (22), (23) 式分别变为

当  $\bar{q}^{2D} = 4 \left( \frac{2\pi}{Re_{RM}} \right)^2 - \frac{2\pi}{We} > 0$  时, 可以得到无量纲化的二维 RM 气泡渐近速度

$$\bar{U}^{2D} \rightarrow -\frac{4\pi}{3 Re_{RM}} + \frac{\sqrt{\bar{q}^{2D}}}{3} \coth \left( \frac{1+A}{3+A} \sqrt{\bar{q}^{2D} \bar{t}} \right), \quad (25)$$

当  $\bar{q}^{2D} = 4 \left( \frac{2\pi}{Re_{RM}} \right)^2 - \frac{2\pi}{We} \rightarrow 0$  时, 可以得到无量纲化的二维 RM 气泡渐近速度

$$\bar{U}^{2D} \rightarrow -\frac{4\pi}{3 Re_{RM}} + \frac{3+A}{3(1+A)} \frac{1}{\bar{t}}. \quad (26)$$

当  $\bar{q}^{2D} = 4 \left( \frac{2\pi}{Re_{RM}} \right)^2 - \frac{2\pi}{We} < 0$  时, 可以得到无量纲化的二维 RM 气泡渐近速度

$$\bar{U}^{2D} \rightarrow -\frac{4\pi}{3 Re_{RM}} + \frac{\sqrt{-\bar{q}^{2D}}}{3} \cot \left( \frac{1+A}{3+A} \sqrt{-\bar{q}^{2D} \bar{t}} \right). \quad (27)$$

图 2 初始条件  $\sigma = 0.002, \rho_h = 1, \mu_l = 10^{-6}, A = 0.4, k = 2\pi, g = 1, \eta_0(0) = 0.001\lambda, v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 实线代表理想流体情况, 点划线代表  $\mu_h = 0.0001$

的情况, 虚线代表  $\mu_h = 0.001$  的情况, 点线代表  $\mu_h = 0.01$  的情况. 由图 2 知, RT 气泡速度在从线性阶段到非线性阶段的全过程, 由于流体黏性和表面张力的作用, 气泡速度一直小于理想流体的速度. 当初始条件相同时, 流体黏性愈大, 气泡的速度愈小, 到达稳恒速度的时间愈长. 气泡的速度趋近

$$U_{RT}^{2D} \rightarrow -\frac{2}{3} k\nu_h + \sqrt{\frac{2A}{3(1+A)} \frac{g}{k} - \frac{k}{9} \frac{\sigma}{\rho_h} + \frac{4}{9} k^2 \nu_h^2}.$$

图 3 初始条件  $\rho_h = 1, \mu_h = 0.005, \mu_l = 10^{-6}, A = 0.4, k = 2\pi, g = 1, \eta_0(0) = 0.001\lambda, v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 实线代表理想流体情况, 虚线代表  $\sigma = 0.002$  的情况, 点线代表  $\sigma = 0.02$ . 图 3 表明, 当初始条件相同时, 流体的表面张力系数愈大, 非理想流体气泡的速度愈小, 到达稳恒速度的时间愈短.

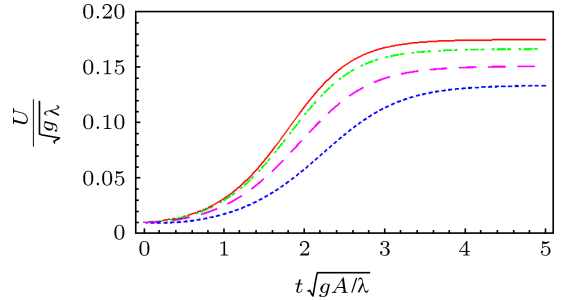


图 2 不同黏性系数情况下的气泡发展曲线 初始条件  $g = 1, \rho_h = 1, A = 0.4, k = 2\pi, \mu_l = 10^{-6}, \sigma = 0.002, \eta_0(0) = 0.001\lambda, v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 实线代表理想流体情况, 点划线代表  $\mu_h = 0.0001$  的情况, 虚线代表  $\mu_h = 0.001$  的情况, 点线代表  $\mu_h = 0.01$  的情况

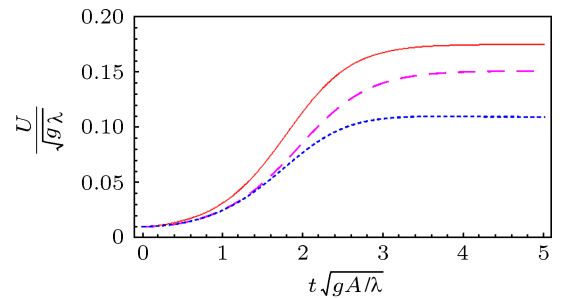


图 3 不同表面张力系数情况下的气泡发展曲线 初始条件  $\rho_h = 1, \mu_h = 0.005, \mu_l = 10^{-6}, A = 0.4, k = 2\pi, g = 1, \eta_0(0) = 0.001\lambda, v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 实线代表理想流体情况, 虚线代表  $\sigma = 0.002$  的情况, 点线代表  $\sigma = 0.02$  的情况

图 4 表示二维 RT 不稳定性无量纲化速度会随着雷诺数  $Re$  的增大而增大, 即流体黏性愈小, 气泡的渐近速度愈大. 在任意 Atwood 数  $A$  取值范围内, 模拟结果显示本文的理论与势流场理论和 Drag-Buoyancy 模型 [22] 的发展趋势一致. 点线是势流场理论理想流体 ( $Re = \infty, Bo = \infty$ ) 的渐近速度,

作为参照. 结合方程 (19) 可以知道重流体的黏性对气泡渐近速度的影响要远大于轻流体黏性的影响. 当  $A$  愈大, 气泡速度衰减的愈显著. 图 5 显示邦德数  $Bo$  对二维 RT 气泡渐近速度有很大的作用. 邦德数愈大, RT 气泡渐近速度愈大, 趋近于理想流体 ( $Re = \infty, Bo = \infty$ ) 的渐近速度. 这证明流体的表面张力愈大, RT 气泡渐近速度愈小. 流体表面张力对 RT 气泡渐近速度有阻碍作用, 尤其是  $A$  较大时, 这种阻碍作用会更明显.

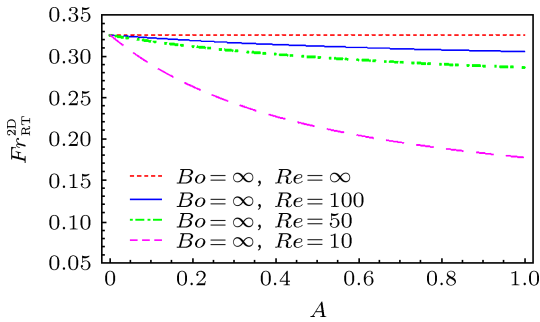


图 4  $Bo = \infty$ , 渐近速度  $Fr_{RT}^{2D}$  和  $A$  的关系以及 RT 无量纲渐近速度随  $Re$  的变化趋势

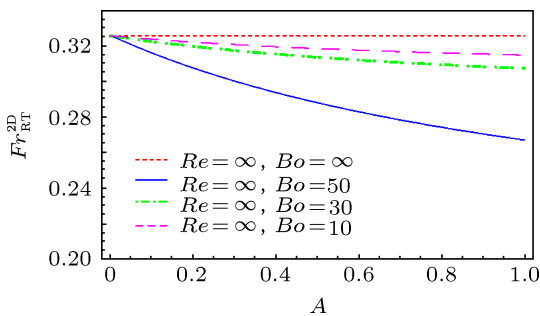


图 5  $Re = \infty$ , 渐近速度  $Fr_{RT}^{2D}$  和  $A$  的关系及 RT 无量纲渐近速度随  $Bo$  的变化趋势

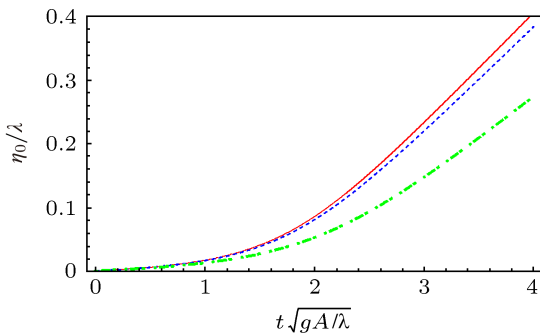


图 6 不同黏性系数情况下气泡振幅与时间关系曲线 初始条件  $g = 1, k = 2\pi, \rho_h = 1, \sigma = 0.002, \mu_l = 10^{-6}, A = 0.4, \eta_0(0) = 0.001\lambda, v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 实线代表理想流体情况, 点线代表  $\mu_h = 0.001$  的情况, 点划线代表  $\mu_h = 0.01$  的情况

图 6 实线代表理想流体情况, 点线代表  $\mu_h = 0.001$  的情况, 点划线代表  $\mu_h = 0.01$  的情况. 初始

条件  $\sigma = 0.002, \mu_l = 10^{-6}, \rho_h = 1, A = 0.4, k = 2\pi, g = 1, \eta_0(0) = 0.001\lambda, v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 理想流体的振幅发展曲线作为参考, 非理想流体 RT 气泡的振幅由于流体黏性和表面张力的作用, 小于理想流体的振幅. 流体的黏性愈大, RT 气泡振幅愈小. 图 7 初始条件  $\mu_h = 0.001, \mu_l = 10^{-6}, \rho_h = 1, A = 0.4, k = 2\pi, g = 1, \eta_0(0) = 0.001\lambda, v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 实线代表理想流体情况, 点线代表  $\sigma = 0.002$  的情况, 虚线代表  $\sigma = 0.02$  的情况. 非理想流体的振幅小于理想流体的振幅, 并且 RT 气泡振幅随着表面张力系数的增加而减小.

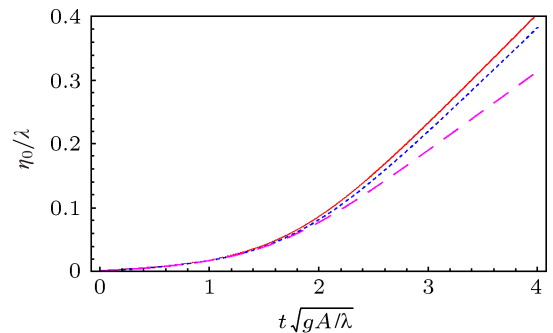


图 7 不同表面张力系数情况下气泡振幅与时间关系曲线 初始条件  $k = 2\pi, g = 1, \mu_l = 10^{-6}, \rho_h = 1, A = 0.4, \mu_h = 0.001, \eta_0(0) = 0.001\lambda, v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 实线代表理想流体情况, 点线代表  $\sigma = 0.002$  的情况, 虚线代表  $\sigma = 0.02$  的情况

### 3 非理想流体中三维柱坐标 RT 和 RM 气泡速度的研究

将  $Z$  轴选定为轻重流体密度梯度变化方向, 假设两种流体的交界面是以  $Z$  轴为对称轴的旋转曲面, 则气泡也关于  $Z$  轴对称. 在气泡顶端处分别取重 (轻) 流体的速度势 [23] 为

$$\varphi^h = a(t) \left[ J_0(kr) e^{-kz} - 1 \right] + a(t)kz, \quad (28)$$

$$\varphi^l = b_1(t) \left[ J_0(kr) e^{kz} - 1 \right] + b_2(t)z, \quad (29)$$

式中  $J_0(kr)$  是零阶 Bessel 函数. 把柱坐标重 (轻) 流体的速度势 (28) 和 (29) 式代入流体界面的约束方程 (3) 和 (7) 中, 对其进行  $r$  的二阶小量展开, 令二阶小量的系数为零, 得到

$$\dot{\eta}_2 = -k \left( 2\eta_2 + \frac{k}{4} \right) \eta_0, \quad (30)$$

$$\alpha_1 \dot{\eta}_0 + \alpha_2 \dot{\eta}_0^2 + \alpha_3 \dot{\eta}_0 = -Ag\eta_2 + 6(1+A) \frac{\sigma}{\rho_h} \eta_2^3. \quad (31)$$

方程 (31) 式系数

$$\alpha_1 = \frac{k^2 - 4A\eta_2(k + 8\eta_2)}{4(k - 8\eta_2)}, \quad (32)$$

$$\alpha_2 = k^2 \frac{(5A - 4)k^2 + 16(2A - 3)k\eta_2 + 64A\eta_2^2}{8(k - 8\eta_2)^2}, \quad (33)$$

$$\alpha_3 = \frac{(1+A)k^2}{4\rho_h(k - 8\eta_2)} [\mu_h(k + 4\eta_2)(k - 8\eta_2) + \mu_l(k + 8\eta_2)(k - 4\eta_2)]. \quad (34)$$

对 (30) 式进行直接积分有

$$\eta_2(t) = -\frac{k}{8} + \left[ \frac{k}{8} + \eta_2(0) \right] e^{-2k[\eta_0(t) - \eta_0(0)]}. \quad (35)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\eta_0(t) \gg \eta_0(0)$ , 那么有  $e^{-2k[\eta_0(t) - \eta_0(0)]} \rightarrow 0$ ,

$$\eta_2 \rightarrow -\frac{k}{8}. \quad (36)$$

从 (31) 和 (36) 式求得三维 RT 气泡渐近速度

$$U_{RT}^{3D} \rightarrow -kv_h + \sqrt{\frac{2A}{1+A} \frac{g}{k} - \frac{3k}{16} \frac{\sigma}{\rho_h} + k^2 v_h^2}. \quad (37)$$

三维柱坐标中 RM 不稳定性气泡速度的求解方法是, 在方程 (30) 和 (31) 式中, 令  $g \rightarrow 0$ ,  $\eta_2 \rightarrow -k/8$  就可以得到. 同样定义参数  $q = k^2 v_h^2 - \frac{3k}{16} \frac{\sigma}{\rho_h}$  来衡量三维情况流体黏性和表面张力的大小.

当  $q = k^2 v_h^2 - \frac{3k}{16} \frac{\sigma}{\rho_h} > 0$  时, 即流体黏性应力占主导, 可以得到三维柱坐标 RM 不稳定性气泡渐近速度

$$U_{RM}^{3D} \rightarrow -kv_h + \sqrt{q} \coth\left(\frac{1+A}{2} k\sqrt{qt}\right). \quad (38)$$

当  $q = k^2 v_h^2 - \frac{3k}{16} \frac{\sigma}{\rho_h} \rightarrow 0$  时, 即流体黏性应力等于表面张力, 可以得到三维柱坐标 RM 不稳定性气泡渐近速度

$$U_{RM}^{3D} \rightarrow -kv_h + \frac{2}{1+A} \frac{1}{kt}. \quad (39)$$

将 (37) 式的三维 RT 不稳定性气泡渐近速度进行无量纲化处理

$$Fr_{RT}^{3D} = -\frac{\pi A^*}{Re} + \sqrt{\frac{1}{\pi} - \frac{3\pi A^*}{16 Bo} + \left(\frac{\pi A^*}{Re}\right)^2}. \quad (40)$$

将 (38), (39) 式的三维 RM 不稳定性气泡渐近速度进行无量纲化处理, 当  $\tilde{q}^{3D} = \left(\frac{2\pi}{Re_{RM}}\right)^2 -$

$\frac{3\pi}{8We}$   $> 0$  时, 可以得到无量纲的三维 RM 气泡渐近速度

$$\bar{U}^{3D} \rightarrow -\frac{2\pi}{Re_{RM}} + \sqrt{\tilde{q} \coth\left(\frac{1+A}{2} \sqrt{\tilde{q}t}\right)}; \quad (41)$$

当  $\tilde{q}^{3D} = \left(\frac{2\pi}{Re_{RM}}\right)^2 - \frac{3\pi}{8We} \rightarrow 0$  时, 可以得到无量纲的三维 RM 气泡渐近速度

$$\bar{U}^{3D} \rightarrow -\frac{2\pi}{Re_{RM}} + \frac{2}{1+A} \frac{1}{\tilde{t}}. \quad (42)$$

图 8 实线代表二维情况, 虚线代表三维情况. 初始条件  $\mu_h = 0.01$ ,  $\mu_l = 10^{-6}$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\rho_h = 1$ ,  $A = 0.4$ ,  $g = 1$ ,  $\eta_0(0) = 0.001\lambda$ ,  $v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 本模型所展示的非理想流体气泡速度与理想流体的气泡速度 [23] 趋势一致, 但小于理想流体的速度. 由于受到流体黏性和表面张力的作用, 三维和二维的气泡速度在线性区域相互重合, 在非线性区, 三维的气泡速度大于二维的气泡速度. 图 9 初始条件  $\sigma = 0.002$ ,  $g = 1$ ,  $A = 0.4$ ,  $\mu_h = 0.001$ ,  $\mu_l = 10^{-6}$ ,  $k = 2\pi$ ,  $\rho_h = 1$ ,  $\eta_0(0) = 0.001\lambda$ ,  $v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 实线代表二维情况, 虚线代表三维情况. 三维的气泡振幅大于二维的气泡振幅.

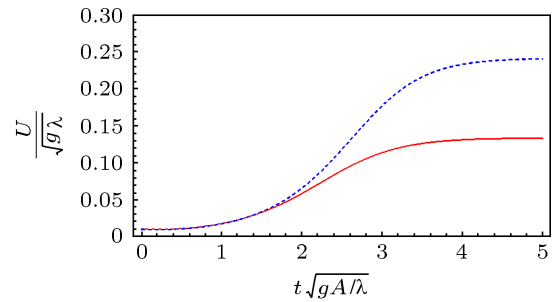


图 8 二维和三维情况下的气泡速度与时间关系曲线对比 初始条件  $\mu_h = 0.01$ ,  $\mu_l = 10^{-6}$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\rho_h = 1$ ,  $A = 0.4$ ,  $k = 2\pi$ ,  $g = 1$ ,  $\eta_0(0) = 0.001\lambda$ ,  $v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 实线代表二维情况, 虚线代表三维情况

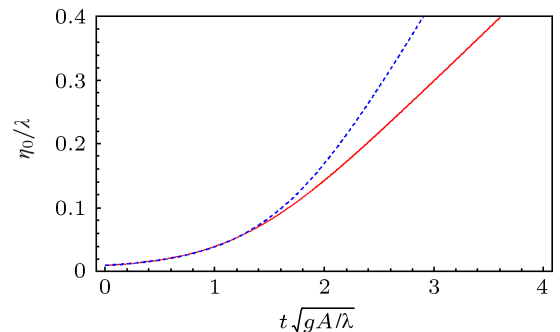


图 9 二维和三维情况下的气泡振幅与时间关系曲线对比 初始条件  $\mu_h = 0.001$ ,  $\rho_h = 1$ ,  $\sigma = 0.002$ ,  $A = 0.4$ ,  $k = 2\pi$ ,  $g = 1$ ,  $\eta_0(0) = 0.001\lambda$ ,  $v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ ,  $\mu_l = 10^{-6}$ , 实线代表二维情况, 虚线代表三维情况

图 10 二维和三维 RT 渐近速度与 A 的函数关系, 在任意 Atwood 数 A 下, 三维 RT 不稳定性渐近速度比二维的增长的快. 二维和三维 RT 不稳定性气泡速度都随着 A 增大而减小. 图 11 二维和三

维 RT 不稳定性气泡速度是流体黏性的减函数. 当  $Re < 10$  时, 气泡速度为线性增长. 当  $Re \sim 100$  时, 气泡的渐近速度达到饱和. 本文的模拟结果显示, 随着  $Re$  增加, 三维 RT 不稳定性气泡渐近速度的增长率大于二维气泡渐近速度的增长率.

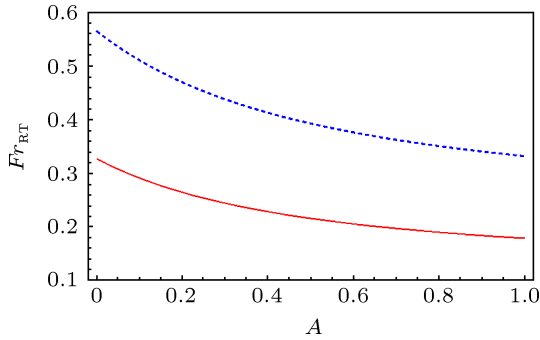


图 10 初始条件  $Re = 10, Bo = \infty$ , 渐近速度  $Fr_{RT}$  和  $A$  的关系 实线是二维情况, 虚线是三维情况

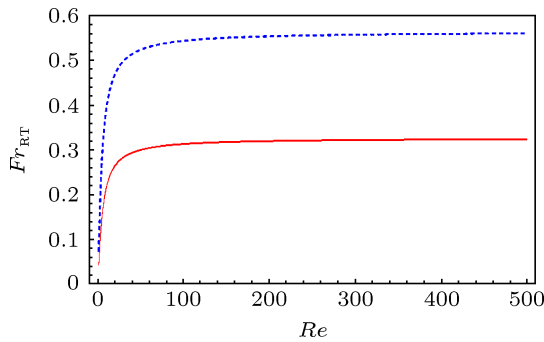


图 11 初始条件  $A = 0.5, Bo = \infty$ , 渐近速度  $Fr_{RT}$  和  $Re$  的关系 实线是二维情况, 虚线是三维情况

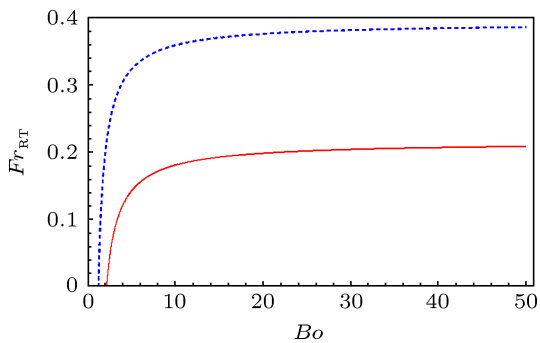


图 12 初始条件  $A = 0.5, Re = 10$ , 渐近速度  $Fr_{RT}$  与  $Bo$  的关系 实线是二维情况, 虚线是三维情况

图 12 为二维和三维 RT 渐近速度与  $Bo$  的关系图. 表明 RT 不稳定性气泡渐近速度在  $Bo < 10$  时, 增长率呈线性增长; 在  $Bo \rightarrow 10$  时, 气泡渐近速度达到饱和. 二维和三维 RT 不稳定性气泡渐近速度随着  $Bo$  的增大而增大, 即流体的表面张力愈小, 非

理想流体的渐近速度愈趋近理想流体的渐近速度. 随着  $Bo$  的增大, 三维 RT 不稳定性气泡渐近速度始终大于二维气泡渐近速度. 图 13 为二维和三维 RM 气泡渐近速度与  $kU_0t$  的关系. 模拟结果显示, RM 不稳定性气泡渐近速度随时间衰减, 是  $t$  的减函数, 与本文的理论推导相符合. RM 气泡速度在二维情况下比三维情况衰减的快. 在线性初始阶段, 二维和三维 RM 不稳定性气泡渐近速度衰减速度几乎一致.

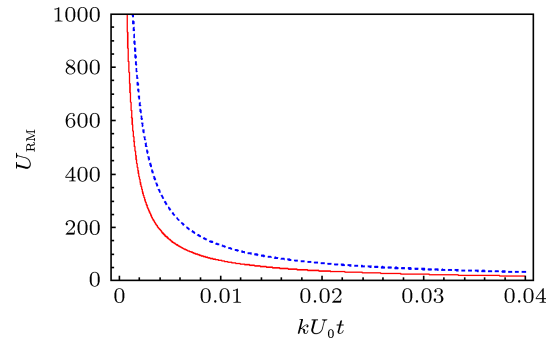


图 13 初始条件  $A = 0.5, Re = 100$ , 渐近速度  $U_{RM}$  的随时间演化曲线 实线是二维情况, 虚线是三维情况

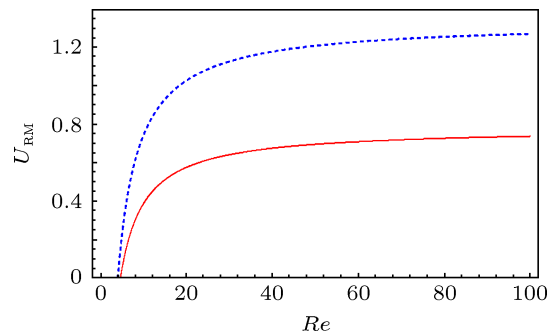


图 14 初始条件  $A = 0.5, kU_0t = 1$ , 渐近速度  $U_{RM}$  和  $Re$  的关系 实线是二维情况, 虚线是三维情况

图 14 为二维和三维 RM 渐近速度与  $Re$  的关系, 可知 RM 不稳定性气泡渐近速度是  $Re$  的增函数, 流体黏性愈小, RM 气泡渐近速度愈大. 在  $Re < 40$  时, RM 气泡增长率呈线性增长. 在  $Re \rightarrow 40$  时, RM 气泡速度达到饱和. RM 气泡速度在三维情况下比二维情况增加的快. 图 15 初始条件  $\mu_h = 0.005, \mu_l = 10^{-6}, \rho_h = 1, \sigma = 0.002, k = 2\pi, g = 1, \eta_0(0) = 0.001\lambda, v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 从线性阶段到非线性阶段, RT 气泡速度是  $A$  的增函数, 到达稳恒速度的时间是  $A$  的减函数, 气泡速度趋近于

$$U_{RT}^{2D} \rightarrow -\frac{2}{3}kv_h + \sqrt{\frac{2A}{3(1+A)}\frac{g}{k} - \frac{k}{9}\frac{\sigma}{\rho_h} + \frac{4}{9}k^2v_h^2}$$

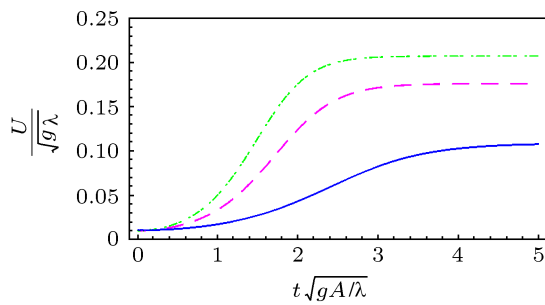


图 15 不同  $A$  数情况下的气泡发展曲线 初始条件  $\mu_h = 0.005$ ,  $\mu_l = 10^{-6}$ ,  $\rho_h = 1$ ,  $\sigma = 0.002$ ,  $k = 2\pi$ ,  $g = 1$ ,  $\eta_0(0) = 0.001\lambda$ ,  $v_0 = 0.001\sqrt{g\lambda}$ , 点划线代表  $A = 1$  的情况, 虚线代表  $A = 0.6$  的情况, 实线代表  $A = 0.2$  的情况

## 4 结论

本文在随气泡顶端运动的参考系中, 将理想流体模型推广到非理想流体模型中, 推导出了非理想流体中单模 **RT** 和 **RM** 不稳定性中气泡速度从线性到非线性的发展演化方程, 给出了二维平面坐标和

三维柱坐标中气泡速度的数值解和渐近解, 并定量分析了流体黏性和表面张力对 **RT** 和 **RM** 气泡速度和振幅的作用. 结果表明: 流体黏性和表面张力系数愈大, 气泡速度和振幅愈小. 从线性阶段到非线性阶段的全过程, 非理想流体的 **RT** 和 **RM** 气泡速度小于对应过程的理想流体的情况. 对于 **RT** 不稳定性, 研究发现重流体运动黏性系数可以很明显地降低气泡的渐近速度, 轻流体的黏性对气泡渐近速度没有影响. 对于 **RM** 不稳定性, 研究表明气泡的渐近衰减速度取决于流体黏性和表面张力的相对大小. 也就是说, 流体黏性和表面张力对 **RT** 和 **RM** 气泡都有致稳作用. 本文的研究结果对理解 **ICF** 点火过程中的流体不稳定具有实际参考价值.

作者衷心感谢北京应用物理与计算数学研究所的张广财研究员和叶文华研究员对本研究工作的无私指导和有益讨论.

- [1] Taylor G I 1950 *Proc. R. Soc. London A* **201** 192
- [2] Ramaprabhu P, Andrews M J 2004 *J. Fluid Mech.* **502** 233
- [3] Richtmyer R D 1960 *Commun. Pure Appl. Math.* **13** 297
- [4] Meshkov E E 1969 *Sov. Fluid Dyn.* **4** 101
- [5] Ye W H, Wang L F, He X T 2010 *Phys. Plasmas* **17** 122704
- [6] Wang L F, Ye W H, He X T, Zhang W Y, Sheng Z M, Yu M Y 2012 *Phys. Plasmas* **19** 100701
- [7] Layzer D 1955 *Astrophys. J.* **122** 1
- [8] Zufiria J 1988 *Phys. Fluids* **31** 440
- [9] Wang L F, Ye W H, Sheng Z M, Don W S, Li Y J, He X T 2010 *Phys. Plasmas* **17** 122706
- [10] Wang L F, Ye W H, Li Y J 2010 *Phys. Plasmas* **17** 052305
- [11] Wang L F, Ye W H, Fan Z F, Li Y J 2010 *EPL* **90** 15001
- [12] Liu W H, Wang L F, Ye W H, He X T 2012 *Phys. Plasmas* **19** 042705
- [13] Wang L F, Ye W H, Li Y J 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 025203
- [14] Zhang Q 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3391
- [15] Goncharov V N 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 134502
- [16] Karnig O, Mikaelian 2010 *Phys. Rev. E* **81** 016325
- [17] Young Y N, Ham F E 2006 *J. Turbul.* **7** 1
- [18] Niebling M J, Flekkøy E G, Måløy K J, Toussaint R 2010 *Phys. Rev. E* **82** 051302
- [19] Garnier J 2003 *Phys. Rev. E* **68** 036401
- [20] Sohn S I 2004 *Phys. Rev. E* **70** 045301
- [21] Sohn S I 2009 *Phys. Rev. E* **80** 055302(R)
- [22] Oron D, Arazi L, Kartoon D, Rikanati A, Alon U, Shrarts D 2001 *Phys. Plasmas* **8** 2883
- [23] Tao Y S, Wang L F, Ye W H, Zhang G C, Zhang J C, Li Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 075207 (in Chinese) [陶焯晟, 王立锋, 叶文华, 张广财, 张建成, 李英骏 2012 物理学报 **61** 075207]



# Bubble velocities in the nonlinear Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities in non-ideal fluids\*

Huo Xin-He<sup>1)</sup> Wang Li-Feng<sup>2)</sup> Tao Ye-Sheng<sup>1)</sup> Li Ying-Jun<sup>1)</sup>†

1) (State Key Laboratory for GeoMechanics and Deep Underground Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China)

2) (HEDPS, Center for Applied Physics and Technology, Peking University, Beijing 100871, China)

(Received 4 January 2013; revised manuscript received 25 March 2013)

## Abstract

In a reference system moving with the bubble vertex we investigate the effects of fluid viscosity and surface tension on the bubble velocity in the nonlinear Rayleigh-Taylor (RT) and Richtmyer-Meshkov (RM) instabilities, by extending the ideal fluid model [Goncharov V N, *Phys. Rev. Lett.* **88** 134502 (2002)] to the non-ideal fluid case. First of all, the governing equation (i.e. self-consistent differential equations) describing the dynamic of the bubble front in RT and RM instabilities is obtained. Then, the numerical and asymptotic solutions of the bubble velocity in two-dimensional planar geometry and three-dimensional cylindrical geometry are obtained. Moreover, we quantitatively study the effects of fluid viscosity and surface tension on the RT and RM bubble velocities. It is found that in the fully nonlinear evolutions of RT and RM instabilities, the bubble velocity and amplitude in the non-ideal fluid are both less than those in its ideal fluid counterpart. That is to say, the effects of fluid viscosity and surface tension tend to stabilize the RT and RM instabilities.

**Keywords:** Rayleigh-Taylor instability, Richtmyer-Meshkov instability, bubble velocity, non-ideal fluids

**PACS:** 47.20.Ma, 52.35.Py, 52.57.Fg

**DOI:** 10.7498/aps.62.144705

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11074300, 11274026, 11275031) and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2013CBA01504).

† Corresponding author. E-mail: lyj@aphy.iphy.ac.cn