

# 色关联的色噪声驱动的分段非线性模型的平均首次穿越时间\*

李贝 靳艳飞<sup>†</sup>

(北京理工大学宇航学院力学系, 北京 100081)

(2013年1月31日收到; 2013年4月1日收到修改稿)

研究了色关联的乘性高斯色噪声和加性高斯色噪声驱动的分段非线性系统中, 噪声强度和相关时间对平均首次穿越时间的影响. 利用一致有色噪声近似方法和最速下降方法, 推导出系统平均首次穿越时间的表达式. 研究表明: 系统的平均首次穿越时间随着乘性噪声的增加会出现单峰结构, 即“共振”现象, 峰值会随着加性噪声强度和噪声之间关联强度的增加而减小. 而平均首次穿越时间作为加性噪声的函数呈单调曲线, 说明乘性噪声和加性噪声对平均首次穿越时间的影响不同. 此外, 乘性和加性噪声关联时间以及互关联时间在正关联时和负关联时对系统平均首次穿越时间的影响是不同的.

**关键词:** 色噪声, 分段非线性系统, 平均首次穿越时间

**PACS:** 05.40.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.150503

## 1 引言

近年来, 噪声诱导的逃逸已经成为许多领域的研究热点问题<sup>[1-7]</sup>. 通常情况下, 平均首次穿越时间用来刻画系统的逃逸过程, 并且采用高斯白噪声来近似描述系统受到的随机力或噪声. 然而, 白噪声是一种理想状态, 在实际问题中许多噪声的相关时间较长而不能当作白噪声处理, 在实际的动力系统中存在的大多是有色噪声<sup>[8-18]</sup>. Jung等<sup>[9]</sup>对乘性色噪声驱动的双稳模型进行了研究并推导出了一致有色噪声近似(UCNA). 利用UCNA和Novikov定理, Cao等<sup>[10,11]</sup>推导出了由相关色噪声驱动的双稳系统的稳态概率密度表达式. Liang等<sup>[12,13]</sup>研究了色相关的色噪声激励下的非线性动力学模型的稳态特性, 他们得到了近似福克普朗克方程的等式并且证明了这一结果. Luo等<sup>[14]</sup>讨论了由两种不同色噪声驱动的双稳系统的随机共振现象. 靳艳飞等<sup>[15,16]</sup>研究了两个不同色噪声激励的双稳模型的稳态特性及平均首次穿越时间.

Zhang等<sup>[17]</sup>研究了色相关的乘性和加性色噪声诱导的双稳系统的平均首次穿越时间. 宁丽娟等<sup>[18]</sup>研究了由色关联的乘性白噪声和加性白噪声驱动的非对称双稳系统中, 色关联及非对称性对平均首次穿越时间的影响.

上述文章主要研究的是双稳系统, 然而许多实际的工程系统、电子电路、超导器件、控制器等, 其基本的模型都是基于分段系统建立的. 分段非线性系统可描述含间隙、弹性约束和干摩擦的机械及弹塑性结构, 含这类元件构成的振动系统使动力学变得很复杂, 甚至会改变机构动力系统的结构, 并致使系统的精度降低, 因此其引起的振动、噪声等问题受到力学界的广泛重视<sup>[19,20]</sup>. Liang等<sup>[21]</sup>研究了色噪声激励的抛物线势能系统的随机共振现象. You等<sup>[22]</sup>和Xie等<sup>[23]</sup>考虑了噪声之间的相关性, 研究了对称和非对称分段锯齿系统的逃逸问题, 发现相关性能诱导平均首次穿越时间的曲线出现共振和抑制现象. Fiasconaro等<sup>[24]</sup>研究了高斯白噪声和分段噪声共同激励下, 非对称分段现象系统的激活共振现象. Simpson等<sup>[25]</sup>分析了分段线性

\* 国家自然科学基金(批准号: 11272051)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: jinyf@bit.edu.cn

FN 模型, 发现小噪声的加入能引起混合模振荡的出现. 对于分析色关联的色噪声对分段动力系统影响的研究甚少. 本文考虑了由色相关的乘性和加性高斯色噪声驱动的分段非线性系统, 分析了噪声强度及噪声相关参数对平均首次穿越时间的影响.

## 2 分段非线性系统的平均首次穿越时间

色关联的乘性和加性色噪声共同激励下的分段非线性系统可由下列随机微分方程表示:

$$\dot{x} = -U'(x) + x\xi(t) + \eta(t), \quad (1)$$

式中, 分段非线性系统的势函数为

$$U(x) = \begin{cases} U_1(x) = \frac{a}{2}(x+1)^2 + \frac{k}{2}, & x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ U_2(x) = \frac{b}{2}x^2, & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ U_3(x) = \frac{a}{2}(x-1)^2 + \frac{k}{2}, & x > \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \quad (2)$$

其中参数  $a > 0, b < 0, k$  为常数.  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  是具有零均值和非零自相关时间  $\tau_1, \tau_2$  ( $0 < \tau_1, \tau_2 < 1$ ) 的色噪声, 具有有以下的统计特性:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= \frac{p}{\tau_1} \exp\left[-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right], \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \frac{q}{\tau_2} \exp\left[-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right], \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \eta(t)\xi(t') \rangle \\ &= \frac{\lambda\sqrt{pq}}{\tau_3} \exp\left[-\frac{1}{\tau_3}|t-t'|\right], \end{aligned} \quad (3c)$$

在这里,  $p$  和  $q$  分别是乘性和加性噪声的噪声强度, 参数  $\lambda$  ( $-1 < \lambda < 1$ ) 为  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  之间的关联系数,  $\tau_3$  是  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  的互关联时间.

根据 (2) 式, 势函数  $U(x)$  有两个稳定点  $x_1 = -1, x_2 = 1$  和一个不稳定点  $x_3 = 0$ . 当相关时间  $\tau \rightarrow 0$  以及  $\tau \rightarrow \infty$  时, 应用 Novikov 理论和一致有色噪声近似, 可得相应的 FPK 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}A(x)P(x,t) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x)P(x,t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$A(x) = -U'(x) + \frac{1}{2}B'(x), \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{px^2}{1+2\tau_1} \\ &+ \frac{2\lambda\sqrt{pq}}{1+2\tau_3}x + \frac{q}{1+2\tau_2}. \end{aligned} \quad (5b)$$

由方程 (4) 可得系统的稳态概率密度函数为

$$P(x,t) = \frac{N}{\sqrt{B(x)}} \exp\left[-\frac{\tilde{U}(x)}{p}\right], \quad (6)$$

其中  $N$  是归一化常数, 广义势函数  $\tilde{U}(x)$  为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) &= -p \int \frac{-U'(x)}{B(x)} dx, \\ \tilde{U}(x) &= \begin{cases} pa \left( \frac{\ln(cx^2 + dx + m)}{2c} + \left(2 - \frac{d}{c}\right) \frac{\arctan\left(\frac{2cx + d}{\sqrt{4mc - d^2}}\right)}{\sqrt{4mc - d^2}} \right), & x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ pb \left( \frac{\ln(cx^2 + dx + m)}{2c} - \frac{d \arctan\left(\frac{2cx + d}{\sqrt{4mc - d^2}}\right)}{c\sqrt{4mc - d^2}} \right), & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ pa \left( \frac{\ln(cx^2 + dx + m)}{2c} - \left(2 + \frac{d}{c}\right) \frac{\arctan\left(\frac{2cx + d}{\sqrt{4mc - d^2}}\right)}{\sqrt{4mc - d^2}} \right), & x > \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} c &= \frac{p}{1+2\tau_1}, \quad d = \frac{2\lambda\sqrt{pq}}{1+2\tau_3}, \quad m = \frac{q}{1+2\tau_2}, \\ h &= \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{4mc-d^2}}{2\sqrt{3}m - (\sqrt{3}+1)d + 2c}, \end{aligned}$$

$$k = \frac{\sqrt{4mc-d^2} \left( d - \frac{2c}{\sqrt{3}} \right) d}{4mc - 2d^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}cd}.$$

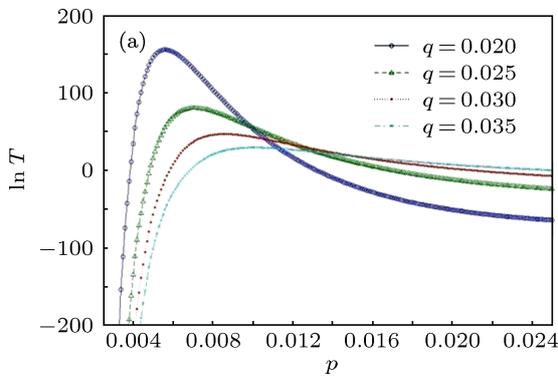
当噪声强度  $p, q \ll 1$  时, 根据平均首次穿越时

间的定义和最速下降近似理论,可推导得到粒子从  $x_1 = -1$  到  $x_2 = 1$  的平均首次穿越时间的表达式

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{ab}} \left\{ \left[ \frac{3(c-d+m)}{c-\sqrt{3d+3m}} \right]^{-a/2c} + \left( \frac{c-\sqrt{3d+3m}}{m} \right)^{-b/2c} + \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{4mc-d^2}} \times \left[ a \left( \frac{d}{c} - 2 \right) \operatorname{arctanh} - \frac{bd}{c} \operatorname{arctank} \right] \right\} \right\}, \quad (8)$$

### 3 系统参数对平均首次穿越时间的影响

图 1 给出了平均首次穿越时间作为乘性噪声



强度  $p$  的函数随不同加性噪声强度  $q$  和噪声关联系数  $\lambda$  变化的情况. 由图可见,平均首次穿越时间曲线出现了明显的单峰结构,即“共振”现象.同时,峰值随着  $q$  和  $\lambda$  的增加而逐渐减小,峰的位置随着  $q$  和  $\lambda$  的增大而向右移动.且当  $\lambda$  增加到 0.25 时,共振峰消失.

图 2 描绘了平均首次穿越时间作为加性色噪声强度的函数随不同噪声关联系数变化的情况. 由图可见,平均首次穿越时间随着色噪声强度  $q$  的增加单调增加,没有单峰出现,说明加性噪声和乘性噪声对平均首次穿越时间的影响是不同的.同时,平均首次穿越时间在负关联时的值小于正关联时的值.

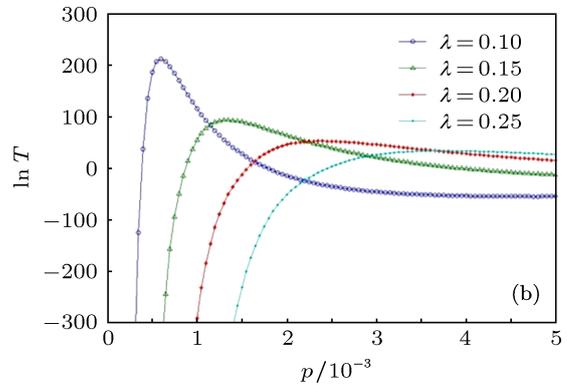


图 1 系统的平均首次穿越时间作为乘性色噪声强度  $p$  的函数 ( $\tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3, a = 0.01, b = -0.01$ ) 随着: (a) 不同加性噪声强度  $q$  变化的曲线 ( $\lambda = 0.5$ ); (b) 不同噪声关联系数  $\lambda$  变化的曲线 ( $q = 0.05$ )

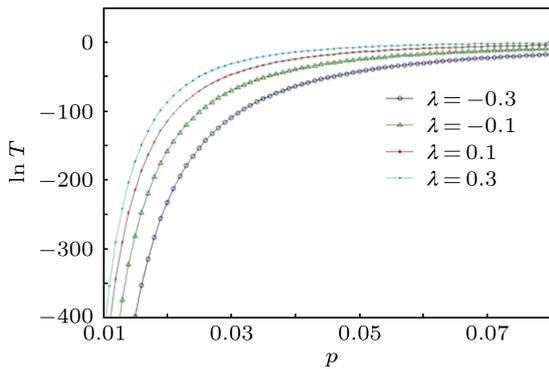


图 2 系统的平均首次穿越时间作为加性色噪声强度  $q$  的函数随着不同噪声关联系数变化的曲线 ( $\tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3, a = 0.01, b = -0.01, p = 0.05$ )

图 3 描述了平均首次穿越时间作为噪声关联系数的函数随不同乘性噪声和加性噪声自关联时间以及互相关时间变化的情况. 平均首次穿越时间是噪声自关联时间的非单调函数,曲线出现了单峰结构;平均首次穿越时间随着互相关时间的增大

而单调增大. 在图 3(a) 中,  $\tau_1$  的取值不会影响共振峰的位置,但是随着  $\tau_1$  的增大,峰值有轻微减小. 在图 3(b) 中,共振峰的位置随着  $\tau_2$  的增大而向左移动,峰值减小. 在图 3(c) 中,当噪声具有负关联 ( $-1 < \lambda < 0$ ) 时,平均首次穿越时间随着互相关时间的增加而增大;当噪声具有正关联 ( $0 < \lambda < 1$ ) 时,平均首次穿越时间随着互相关时间的增大而减小.

图 4 描述了平均首次穿越时间作为乘性噪声自相关时间  $\tau_1$  以及乘性和加性噪声互相关时间  $\tau_3$  的函数变化的曲线. 在图 4(a) 中,当乘性噪声强度大于加性噪声强度时,平均首次穿越时间随  $\tau_1$  的增大而增大;当乘性噪声强度小于加性噪声强度时,平均首次穿越时间随  $\tau_1$  的增大而减小;当乘性噪声强度等于加性噪声强度时,平均首次穿越时间随  $\tau_1$  的增大而出现非单调曲线. 在图 4(b) 中,平均首次穿越时间在  $p < q$  时的值要大于其他两种情况下的值.

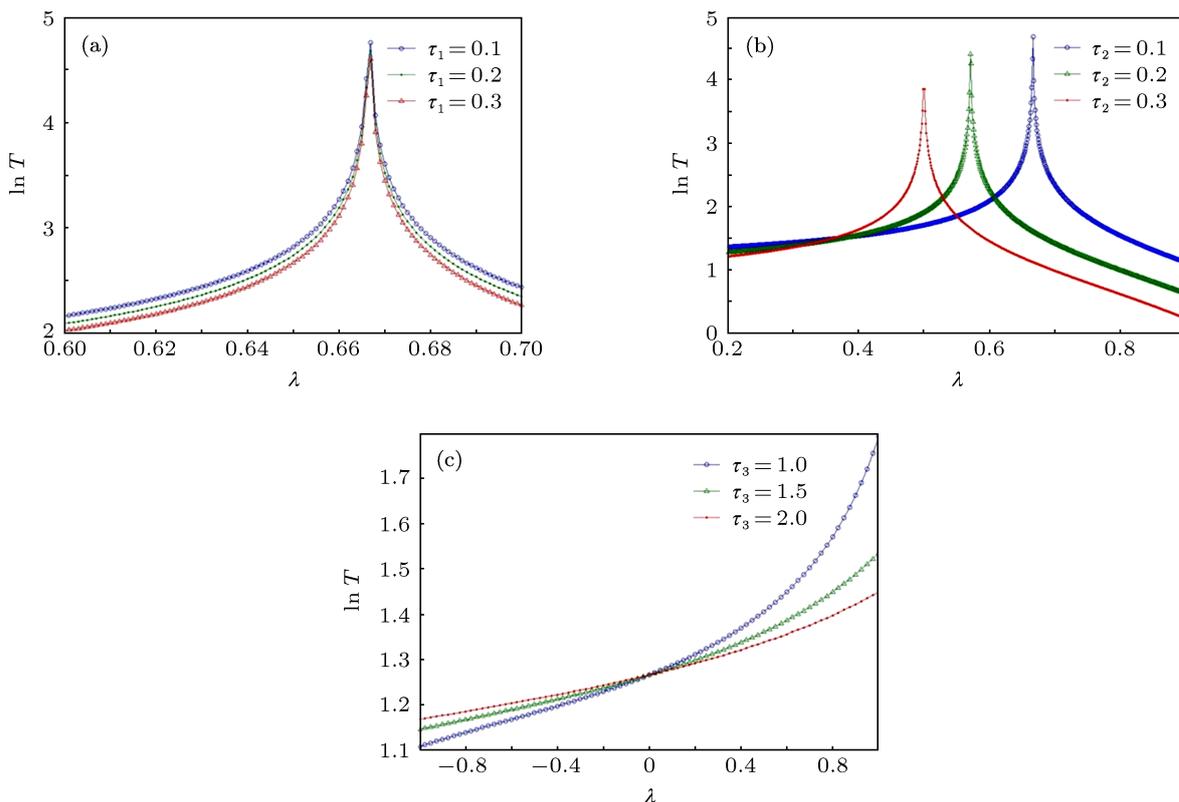


图3 系统的平均首次穿越时间作为噪声关联系数  $\lambda$  的函数 ( $p = q = 0.05, a = 0.01, b = -0.01$ ) 随着: (a) 不同乘性噪声自关联时间  $\tau_1$  变化的曲线 ( $\tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$ ); (b) 不同加性噪声自关联时间  $\tau_2$  变化的曲线 ( $\tau_1 = 0.2, \tau_3 = 0.3$ ); (c) 不同噪声互相关时间  $\tau_3$  变化的曲线 ( $\tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1$ )

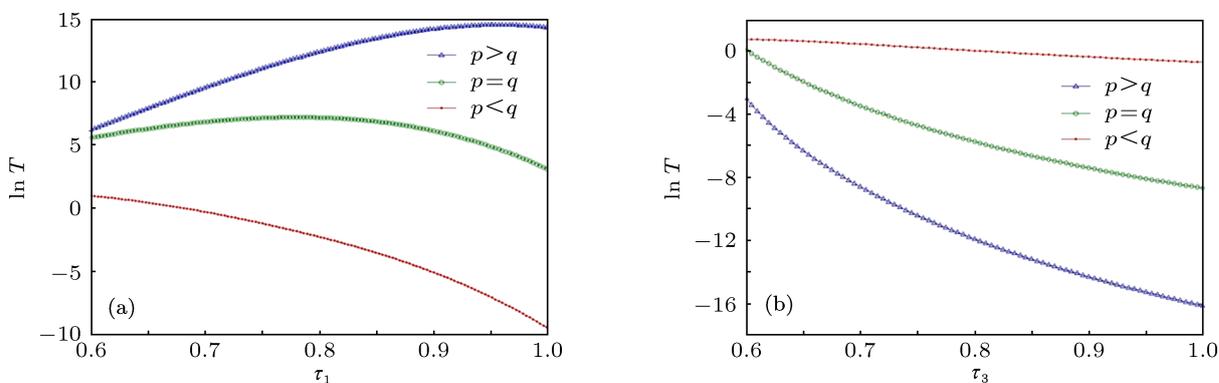


图4 系统的平均首次穿越时间 ( $\tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3, p = 0.05, a = 0.01, b = -0.01$ ) 作为: (a)  $\tau_1$  的函数; (b)  $\tau_3$  的函数 ( $\tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, p = 0.05, a = 0.01, b = -0.01$ )

### 4 结论

本文主要考虑了色相关的乘性色噪声和加性色噪声共同激励下, 噪声的有色性对分段非线性系统的平均首次穿越时间的影响. 推导出平均首次穿越时间的解析表达式. 研究结果表明: 系统参数在不同的取值条件下, 分段非线性系统的平均首次穿越时间作为乘性色噪声强度以及不同噪声关联系

数的曲线会出现单峰结构, 即“共振”现象, 乘性色噪声强度对系统有积极影响. 而平均首次穿越时间作为加性色噪声强度的函数是单调曲线, 说明乘性噪声和加性噪声对平均首次穿越时间的影响是不同的. 此外, 当噪声具有负关联时, 平均首次穿越时间随着互相关时间的增加而增大; 当噪声具有正关联时, 平均首次穿越时间随着互相关时间的增大而减小.

- [1] Reimann P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4576
- [2] Li J H, Hu B, Xing D Y, Dong J M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6443
- [3] Madureira A J R, Hanggi P, Wio H S 1996 *Phys. Lett. A* **271** 248
- [4] Wang J, Cao L, Wu D J 2003 *Phys. Lett. A* **308** 23
- [5] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [6] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in Chinese) [靳艳飞, 徐伟, 马少娟, 李伟 2005 物理学报 **54** 3480]
- [7] Zhang J J, Jin Y F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120501 (in Chinese) [张静静, 靳艳飞 2011 物理学报 **60** 120501]
- [8] Fox R F 1986 *Phys. Rev. A* **34** 4525
- [9] Jung P, Hanggi P 1987 *Phys. Rev. A* **35** 4464
- [10] Wu D J, Cao L, Ke S Z 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2496
- [11] Cao L, Wu D J, Ke S Z 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3228
- [12] Liang G Y, Cao L, Wu D J 2002 *Phys. Lett. A* **294** 190
- [13] Liang G Y, Cao L, Wu D J 2004 *Physica. A* **335** 371
- [14] Luo X Q, Zhu S Q 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
- [15] Jin Y F, Xu W, Li W, Ma S J 2005 *Journal of Dynamics and Control* **3** 60 (in Chinese) [靳艳飞, 徐伟, 李伟, 马少娟 2005 动力学与控制学报 **3** 60]
- [16] Jin Y F, Xu W 2005 *Chaos Solitons & Fractals* **23** 275
- [17] Zhang X Y, Xu W, Zhou B C 2009 *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **14** 4220
- [18] Ning L J, Xu W, Yang X L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6809 (in Chinese) [宁丽娟, 徐伟, 杨晓丽 2007 物理学报 **56** 6809]
- [19] Hu H Y 1996 *Acta Mech. Sin.* **28** 483 (in Chinese) [胡海岩 1996 力学学报 **28** 483]
- [20] Hu H Y 1995 *Vibr. Eng. Journal.* **8** 331 (in Chinese) [胡海岩 1995 振动工程学报 **8** 331]
- [21] Liang G Y 2003 *Chin. Phys.* **12** 0377
- [22] You J Y, Cao L, Ke S Z, Wu D J 2001 *Eur. Phys. J. B* **20** 397
- [23] Xie C W, Mei D C, Wu D J 2003 *Eur. Phys. J. B* **33** 83
- [24] Fiasconaro A, Spagnolo B 2011 *Phys. Rev. E* **83** 041122
- [25] Simpson D J W, Kuske R 2011 *Physica D* **240** 1189

# The mean first-passage time for piecewise nonlinear system driven by colored correlated additive and multiplicative colored noises\*

Li Bei Jin Yan-Fei<sup>†</sup>

(Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(Received 31 January 2013; revised manuscript received 1 April 2013)

## Abstract

In this paper, We have studied the effects of intensity and correlation time of noises on the mean first-passage time in a piecewise nonlinear system driven by multiplicative and additive colored noises with colored cross-correlation. We derived the expression of the mean first-passage time (MFPT) by applying the unified colored approximation method and the steepest-descent approximation. Results show that the MFPT of the system exhibits a mono-peak structure and the “resonance” phenomena enhance with the increase of multiplicative noise intensity. The value of the peak decreases with increasing additive noise intensity and the correlation between the additive and multiplicative noises. However, the MFPT of the system increases with the increase of additive noise intensity. That is, the effects of the additive noise and the multiplicative noise on MFPT are different. Moreover, the negative and passive correlations play different roles in the MFPT.

**Keywords:** colored noise piecewise nonlinear system, mean first-passage time

**PACS:** 05.40.—a

**DOI:** 10.7498/aps.62.150503

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.11272051).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: jinyf@bit.edu.cn