Broer-Kau-Kupershmidt 方程组的对称、约化和精确解*

李宁† 刘希强‡

(聊城大学数学科学学院, 聊城 252059)

(2013年5月10日收到; 2013年6月18日收到修改稿)

利用修正的 CK 直接方法得到了 Broer-Kau-Kupershmidt (简写为 BKK) 方程组的对称、约化, 通过解约化方程得到了该方程组的一些精确解, 包括双曲函数解、三角函数解、有理函数解、艾里函数解、幂级数解和孤立子解等.

关键词: 修正的 CK 直接方法, BKK 方程组, 对称、约化, 精确解

PACS: 02.30.Jr, 04.20.Jb, 05.45.Yv **DOI:** 10.7498/aps.62.160203

1 引言

非线性发展方程在描述自然现象中起着非常重要的作用, 研究非线性发展方程的解自然成为学者们关注的焦点. 因此很多有效的方法被提出, 如经典和非经典的李群方法、修正的 CK 方法、tanh 展开法、(G'/G) 展开法、齐次平衡法、反散射法、雅可比 (Jacobi) 椭圆函数展开法等 [1−10]. 其中, 修正的 CK 直接方法 [8,9] 是最重要的方法之一. 本文利用修正的 CK 直接方法考虑 BKK (Broer-Kau-Kupershmidt) 方程组

$$
\begin{aligned}
&H_{ty}-H_{xxy}+2(HH_x)_y+2G_{xx}=0,\\
&G_t+G_{xx}+2(HG)_x=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

的精确解. BKK 方程组是描述非线性和色散长重力波在浅海水平方向均匀的深度的模型. 当 $y=x$ 时, 方程组 (1) 可写成 $(1+1)$ 维 BKK 方程组. 在文献 [11] 中, 作者给出了该方程组的类似对称, 并得到了一些精确解.

本文分以下几部分: 在第二部分求出 BKK 方程组的对称; 在第三部分求出 BKK 方程组的约化方程, 并通过解约化方程得到该方程组的精确解; 在第四部分给出一个简短的结论.

2 BKK 方程组的对称

假设方程组 (1) 具有下述形式的对称群:

$$
\begin{aligned}
&H(x,t)=\alpha_1+\beta_1\tilde{H}(\xi,\eta,\tau)+\gamma_1\tilde{G}(\xi,\eta,\tau),\\
&G(x,t)=\alpha_2+\beta_2\tilde{G}(\xi,\eta,\tau)+\gamma_2\tilde{H}(\xi,\eta,\tau),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\ (i=1,2)$, ξ, η 和 τ 都是关于 $\{x,y,t\}$ 的待定函数.

在变换 $\{x,y,t,H,G\}\rightarrow\{\xi,\eta,\tau,\tilde{H},\tilde{G}\}$ 下要求 $\tilde{H}(\xi,\eta,\tau),\tilde{G}(\xi,\eta,\tau)$ 也满足方程组 (1), 即

$$
\begin{aligned}
&\tilde{H}_{\eta\tau}-\tilde{H}_{\xi\xi\eta}+2(\tilde{H}\tilde{H}_\xi)_\eta+2\tilde{G}_{\xi\xi}=0,\\
&\tilde{G}_\tau+\tilde{G}_{\xi\xi}+2(\tilde{H}\tilde{G})_\xi=0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

把 (2) 式代入方程组 (1), 并利用约束方程组 (3), 令 $\tilde{H}, \tilde{G}$ 和它们的同阶导数项的系数为零, 得到一个超定方程组, 解之得

$$
\begin{aligned}
&\xi=\frac{1}{2}\tau_1'(t)x+\tau_2(t),\quad \eta=\eta(y),\\
&\tau=\tau_1(t),\quad \alpha_1=-\frac{1}{4}\tau_1''(t)x-\frac{1}{2}\tau_2'(t),\\
&\beta_1=\frac{1}{2}\tau_1'(t),\quad \gamma_1=0,\quad \alpha_2=0,
\end{aligned}
$$

* 国家自然科学基金委员会 - 中国工程物理研究院联合基金 (批准号: 11076015) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: ln1011@163.com

‡ 通讯作者. E-mail: liuxiq@sina.com

© 2013 中国物理学会 Chinese Physical Society

$$\beta_2=\eta'(y)+\frac{1}{2}\tau_1'(t),\quad \gamma_2=0,\tag{4}$$

其中 $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ 是关于 t 的任意光滑函数, $\eta(y)$ 是关于 y 的任意光滑函数.

由上述过程, 对于 BKK 方程组的李点对称群, 有以下定理.

定理 1 若 $\tilde{H}=\tilde{H}(\xi,\eta,\tau),\tilde{G}=\tilde{G}(\xi,\eta,\tau)$ 是 (1) 式的解, 那么下列给定 H 和 G

$$H=-\left(\frac{1}{4}\tau_1''(t)x+\frac{1}{2}\tau_2'(t)\right)+\frac{1}{2}\tau_1'(t)\tilde{H},$$
$$G=\left(\eta'(y)+\frac{1}{2}\tau_1'(t)\right)\tilde{G}$$

也是方程组 (1) 的解, 其中 ξ,η 和 τ 由 (4) 式确定.

从而利用定理 1, 建立了 BKK 方程组的新、旧解之间的关系. 若选取参考文献 [11] 中的一组解

$$\tilde{H}=\frac{-\frac{1}{4}g_1'(t)x^2-\frac{1}{2}g_2'(t)x+g_3(t)}{g_1(t)x+g_2(t)},$$
$$\tilde{G}=\frac{g_1(t)x+g_2(t)}{q(y)},\tag{5}$$

则

$$\begin{aligned}H=&-\left(\frac{1}{4}\tau_1''(t)x+\frac{1}{2}\tau_2'(t)\right)\\&+\frac{1}{2}\tau_1'(t)\frac{-\frac{1}{4}g_1'(t)x^2-\frac{1}{2}g_2'(t)x+g_3(t)}{g_1(t)x+g_2(t)},\\G=&\left(\eta'(y)+\frac{1}{2}\tau_1'(t)\right)\frac{g_1(t)x+g_2(t)}{q(y)},\end{aligned}\tag{6}$$

也是方程组 (1) 的解. 重复此过程, 从而推广了文献 [11] 中的解.

根据定理 1, 若限制 $\tau_1(t)=t+\varepsilon F_1(t)$, $\tau_2(t)=\varepsilon F_2(t)$, $\eta(y)=y+\varepsilon W(y)$, 其中 ε 是无穷小参数, $F_1(t)$, $F_2(t)$ 是关于 t 的任意光滑函数, $W(y)$ 是关于 y 的任意光滑函数. 由此可以得到方程组 (1) 的对称为

$$\begin{aligned}\sigma=&F_1(t)H_t+\left(\frac{1}{2}F_1'(t)x+F_2(t)\right)H_x\\&+W(y)H_y+\frac{1}{2}F_1'(t)H\\&-\left(\frac{1}{4}F_1''(t)x+\frac{1}{2}F_2'(t)\right),\\\psi=&F_1(t)G_t+\left(\frac{1}{2}F_1'(t)x+F_2(t)\right)G_x\\&+W(y)G_y+\left(W'(y)+\frac{1}{2}F_1'(t)\right)G.\end{aligned}\tag{7}$$

利用经典李群分析方法, 可得上述对称的生成元为

$$\begin{aligned}v_1=&F_1(t)\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}F_1'(t)x+F_2(t)\right)\frac{\partial}{\partial x}+W(y)\frac{\partial}{\partial y}\\&-\left(\frac{1}{2}F_1'(t)H-\frac{1}{4}F_1''(t)x-\frac{1}{2}F_2'(t)\right)\frac{\partial}{\partial H},\\v_2=&F_1(t)\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}F_1'(t)x+F_2(t)\right)\frac{\partial}{\partial x}+W(y)\frac{\partial}{\partial y}\\&-\left(W'(y)+\frac{1}{2}F_1'(t)\right)\frac{\partial}{\partial G}.\end{aligned}\tag{8}$$

由 $F_1(t), F_2(t)$ 和 $W(y)$ 是任意函数, 这里取

$$F_1(t)=2c_1t+c_2,$$
$$F_2(t)=2c_3t+c_4,$$
$$W(y)=c_5y+c_6.$$

因此

$$\begin{aligned}V=&(2c_1t+c_2)\frac{\partial}{\partial t}+(c_1x+2c_3t+c_4)\frac{\partial}{\partial x}\\&+(c_5y+c_6)\frac{\partial}{\partial y}-(c_1H-c_3)\frac{\partial}{\partial H}\\&-(c_5+c_1)G\frac{\partial}{\partial G},\end{aligned}$$

由 V 可得

$$V_1=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-H\frac{\partial}{\partial H}-G\frac{\partial}{\partial G},$$
$$V_2=\frac{\partial}{\partial t},\quad V_3=2t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial H},\quad V_4=\frac{\partial}{\partial x},$$
$$V_5=y\frac{\partial}{\partial y}-G\frac{\partial}{\partial G},\quad V_6=\frac{\partial}{\partial 6}.$$

上述对称之间的算子关系见表 1, 由表 1 可知, 方程组 (1) 满足一个六维李代数.

表 1 李括号运算结果

$[V_i,V_j]$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	0	$-2V_2$	0	$-V_4$	0	0
V_2	$2V_2$	0	$2V_4$	0	0	0
V_3	0	$-2V_4$	0	0	0	0
V_4	V_4	0	0	0	0	0
V_5	0	0	0	0	0	$-V_6$
V_6	0	0	0	0	V_6	0

3 BKK 方程组的相似约化和精确解

为了求出方程组 (1) 的相似约化和精确解, 根据对称 (7) 式可得下述对应的特征方程组:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{F_1}=&\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}F_1'x+F_2}=\frac{\mathrm{d}y}{W}\\=&\frac{\mathrm{d}H}{-\frac{1}{2}F_1'H+\frac{1}{4}F_1''x+\frac{1}{2}F_2'}=\frac{\mathrm{d}G}{-[W'+\frac{1}{2}F_1']G}.\end{aligned}\tag{9}$$

表 2 方程组 (1) 的经典相似约化

情况	参数取值	不变量	相似约化方程
1	$F_2(t)\neq 0, F_1(t)=0,$	$\xi=y, \tau=t, G=\omega(\xi,\tau),$	$F_2\theta_{ty}+F_{2t}\theta_y=0,$
	$W(y)=0,$	$H=\theta(\xi,\tau)-xF_2'/2F_2,$	$F_2\omega_t+F_{2t}\omega=0.$
2	$W(y)\neq 0, F_1(t)=0,$	$\xi=x, \tau=t, H=\theta(\xi,\tau),$	$\omega_{xx}=0,$
	$F_2(t)=0,$	$G=\omega(\xi,\tau)W^{-1}$	$\omega_t+2\theta_x\omega+2\omega_x\theta=0.$
3	$F_1(t)\neq 0, F_2(t)=0,$	$\xi=y, \tau=F_1x^{-2}, G=\omega(\xi,\tau)F_1^{-\frac{1}{2}}$	$\xi\theta_{\xi\tau}-\theta_{\tau\tau\tau}+2\theta_{\tau\tau}+2\theta_{\tau\tau}\theta-2\omega_{\tau\tau}=0,$
	$W(y)=0,$	$H=\theta(\xi,\tau)x^{-1}+F_1''x/4F_1',$	$\tau\omega_{\xi\tau}+2\theta_\tau\omega+2\theta\omega_\tau=0.$
4	$F_1(t)=0, F_2(t)\neq 0,$	$\xi=t, \tau=x-F_2\int\frac{1}{W}\mathrm{d}y, G=\omega(\xi,\tau)W^{-1},$	$\theta_{\xi\tau}-\theta_{\tau\tau\tau}+2\theta_\tau^2+2\theta_{\tau\tau}+2\theta_{\tau\tau}\theta-2\omega_{\tau\tau}=0,$
	$W(y)\neq 0,$	$H=\theta(\xi,\tau)+\frac{1}{2}F_2'\int\frac{1}{W}\mathrm{d}y,$	$\omega_\xi+\omega_{\tau\tau}+2\theta_\tau\omega+2\theta\omega_\tau=0.$
5	$F_1(t)=C_1(\neq 0),$	$\xi=x, \tau=t-C_1\int\frac{1}{W}\mathrm{d}y,$	$\theta_{\tau\tau}-\theta_{\xi\xi\tau}+2\theta_\tau\theta_\xi+2\theta\theta_{\xi\tau}-2\omega_{\xi\xi}=0,$
	$F_2(t)=0, W(y)\neq 0$	$H=\theta(\xi,\tau), G=\omega(\xi,\tau)W^{-1}$	$\omega_\tau+\omega_{\xi\xi}+2\theta_\xi\omega+2\theta\omega_\xi=0.$
6	$F_1(t)=C_2(\neq 0),$	$\xi=y, \tau=C_2x-\int F_2\mathrm{d}t,$	$-\theta_{\xi\tau\tau}+2\theta_\tau\theta_\xi+2\theta\theta_{\xi\tau}+2\omega_{\tau\tau}=0,$
	$F_2(t)\neq 0, W(y)=0$	$H=\theta(\xi,\tau)+\frac{F_2(t)}{2C_2}, G=\omega(\xi,\tau)$	$\omega_{\tau\tau}+2\theta\omega_\tau+2\theta_\tau\omega=0.$

通过解特征方程组 (9) 得到了方程组 (1) 的经典相似约化, 见表 2. 由表 2 可知经过李点对称变换, 这里得到了比文献 [11] 更多的约化形式.

以下考虑表 1 中的 6 组约化方程, 从而得到方程组 (1) 的精确解.

情况 1

$$F_2\theta_{ty}+F_{2t}\theta_y=0,\quad F_2\omega_t+F_{2t}\omega=0. \tag{10}$$

解方程组 (9) 可得,

$$\theta=\frac{1}{F_2(t)}\int P_1(y)\,\mathrm{d}y+Q(t),\quad \omega=\frac{P_2(y)}{F_2(t)},$$

此时方程组 (1) 的解为

$$H_1=\frac{1}{F_2(t)}\int P_1(y)\,\mathrm{d}y+Q(t)-\frac{xF_2'}{2F_2},\ \ G_1=\frac{P_2(y)}{F_2(t)},$$

其中 $P_1(y), P_2(y)$ 是关于 y 的任意光滑函数, $Q(t)$ 是关于 t 的任意光滑函数.

情况 2

$$\omega_{xx}=0,\ \ \omega_t+2\theta_x\omega+2\omega_x\theta=0. \tag{11}$$

解方程组 (11) 可得

$$\theta=L(t)(Ax+B),$$
$$\omega=-\frac{L'(t)\left(\frac{1}{2}Ax^2+Bx+D\right)}{2L(t)\,(Ax+B)},$$

此时方程组 (1) 的解为 $H_2=L(t)(Ax+B)$,

$$G_2=-\frac{L'(t)\left(\frac{1}{2}Ax^2+Bx+D\right)}{2L(t)\,(Ax+B)}W(y),$$

其中 $L(t)$ 是关于 t 的任意光滑函数, A, B, D 是任意的常数.

情况 3

$$\begin{aligned}&\xi\theta_{\xi\tau}-\theta_{\tau\tau\tau}+2\theta_{\tau\tau}+\theta_{\tau\tau}\theta-2\omega_{\tau\tau}=0,\\&\tau\omega_{\tau\tau}+2\theta_\tau\omega+2\theta\omega_\tau=0.\end{aligned} \tag{12}$$

这是一个 $(1+1)$ 维变系数偏微分方程组. 显然方程组 (12) 存在级数解, 详解过程参见本文情况 6.1, 这里省略.

情况 4

$$\begin{aligned}&\theta_{\xi\tau}-\theta_{\tau\tau\tau}+2\theta_\tau^2+2\theta_{\tau\tau}+2\theta_{\tau\tau}\theta-2\omega_{\tau\tau}=0,\\&\omega_\xi+\omega_{\tau\tau}+2\theta_\tau\omega+2\theta\omega_\tau=0.\end{aligned} \tag{13}$$

为了得到方程组 (12) 更多的解, 选用 (G'/G) 展开法和辅助函数 Riccati 展开法求解. 做行波变换 $\theta(\xi,\tau)=\theta(\eta)$, $\omega(\xi,\tau)=\omega(\eta)$, $\eta=\tau-l\xi$, 代入到 (13) 式中得

$$(2-l)\theta''-\theta'''+2\theta'^2+2\theta''\theta-2\omega''=0, \tag{14a}$$
$$-l\omega'+\omega''+2\theta'\omega+2\theta\omega'=0. \tag{14b}$$

设方程 (14a), (14b) 有如下形式的解:

$$\theta=\sum_{i=0}^{m}q_i\varphi(\eta)^i,\quad \omega=\sum_{i=0}^{m}p_j\varphi(\eta)^j,$$
$$q_i\neq 0,\ \ p_j\neq 0. \tag{15}$$

平衡 (14a) 式中的 θ''' 与 ω'', (14b) 式中的 ω'' 与 $\theta'\omega$ 得 $m+3=n+2, n+2=m+n+1$, 即有 $m=1$, $n=2$. 由 (15) 式得

$$\theta=q_0+q_1\varphi,\ \ \omega=p_0+p_1\varphi+p_2\varphi^2. \tag{16}$$

情况 4.1 当 $\varphi=\tilde{G}'/\tilde{G}$, $\tilde{G}=\tilde{G}(\eta)$, 而且 G 满足二阶的常微分方程

$$\tilde{G}''+\lambda\tilde{G}'+\mu\tilde{G}=0, \tag{17}$$

将 (16) 和 (17) 式代入 (14a), (14b) 式令 $(\tilde{G}'/\tilde{G})$ 相同次数的系数为零, 得到相关的代数方程组, 解之得

$$q_0=-\lambda+\frac{l}{2},\quad q_1=\frac{2-\lambda l}{\mu},$$

$$p_0=p_0,\quad p_1=0,\quad p_2=\frac{p_0+l}{\mu}. \tag{18}$$

情况 4.1.1 当 $\lambda^2-4\mu>0$, 方程组 (1) 有一组双曲函数解:

$$\begin{aligned}H_3=&-\lambda+\frac{l}{2}+\frac{2-\lambda l}{\mu}\bigg(-\frac{\lambda}{2}\\&+\frac{e_1\sinh\sqrt{\varDelta_1}\eta+e_2\cosh\sqrt{\varDelta_1}\eta}{e_1\cosh\sqrt{\varDelta_1}\eta+e_2\sinh\sqrt{\varDelta_1}\eta}\bigg),\\G_3=&\,p_0+\frac{p_0+l}{\mu}\bigg(-\frac{\lambda}{2}\\&+\frac{e_1\sinh\sqrt{\varDelta_1}\eta+e_2\cosh\sqrt{\varDelta_1}\eta}{e_1\cosh\sqrt{\varDelta_1}\eta+e_2\sinh\sqrt{\varDelta_1}\eta}\bigg)^2,\end{aligned}$$

其中 $\varDelta_1=\lambda^2-4\mu$.

情况 4.1.2 当 $\lambda^2-4\mu<0$, 方程组 (1) 有一组三角函数解:

$$\begin{aligned}H_4=&-\lambda+\frac{l}{2}+\frac{2-\lambda l}{\mu}\bigg(-\frac{\lambda}{2}\\&+\frac{e_1\sin\sqrt{\varDelta_2}\eta+e_2\cos\sqrt{\varDelta_2}\eta}{e_1\cos\sqrt{\varDelta_2}\eta+e_2\sin\sqrt{\varDelta_2}\eta}\bigg),\\G_4=&\,p_0+\frac{p_0+l}{\mu}\bigg(-\frac{\lambda}{2}\\&+\frac{e_1\sin\sqrt{\varDelta_2}\eta+e_2\cos\sqrt{\varDelta_2}\eta}{e_1\cos\sqrt{\varDelta_2}\eta+e_2\sin\sqrt{\varDelta_2}\eta}\bigg)^2,\end{aligned}$$

其中 $\varDelta_2=4\mu-\lambda^2$.

情况 4.1.3 当 $\lambda^2-4\mu=0$, 方程组 (1) 有一组有理函数解:

$$H_5=-\lambda+\frac{l}{2}+\frac{2-\lambda l}{\mu}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{e_2}{e_1+e_2\delta}\right),$$

$$G_5=p_0+\frac{p_0+l}{\mu}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{e_2}{e_1+e_2\delta}\right)^2,$$

其中 $\eta=x-F_2\int\frac{1}{W}\mathrm{d}y-lt$, e_1 和 e_2 是任意非零常数.

情况 4.2 当 φ 满足 Riccati 方程

$$\varphi'=A+B\varphi+C\varphi^2, \tag{19}$$

将 (16) 和 (19) 式代入 (14a), (14b) 式, 令 φ 相同次数的系数为零, 得到相关的代数方程组, 解之得:

$$B=0,\ q_0=q_0,\ q_1=\frac{p_0C+2l}{2(p_0+C)},$$

$$p_0=p_0,\ p_1=0,\ p_2=\frac{p_0lC^2}{2(p_0+C)}. \tag{20}$$

情况 4.2.1 当 $A=1/2$, $C=-1/2$ 时, 方程组 (1) 有四组双曲函数解:

$$H_6=q_0+\frac{p_0C+2l}{2(p_0+C)}(\coth(\eta)\pm\operatorname{csch}(\eta)),$$

$$G_6=p_0+\frac{p_0lC^2}{2(p_0+C)}(\coth(\eta)\pm\operatorname{csch}(\eta))^2.$$

$$H_7=q_0+\frac{p_0C+2l}{2(p_0+C)}(\tanh(\eta)\pm\mathrm{i}\,\operatorname{sech}(\eta)),$$

$$G_7=p_0+\frac{p_0lC^2}{2(p_0+C)}(\tanh(\eta)\pm\mathrm{i}\,\operatorname{sech}(\eta))^2.$$

$$H_8=q_0+\frac{p_0C+2l}{2(p_0+C)}\left(\frac{\tanh(\eta)}{1\pm\operatorname{sech}(\eta)}\right),$$

$$G_8=p_0+\frac{p_0lC^2}{2(p_0+C)}\left(\frac{\tanh(\eta)}{1\pm\operatorname{sech}(\eta)}\right)^2.$$

$$H_9=q_0+\frac{p_0C+2l}{2(p_0+C)}\left(\frac{\coth(\eta)}{1+\mathrm{i}\csc(\eta)}\right),$$

$$G_9=p_0+\frac{p_0lC^2}{2(p_0+C)}\left(\frac{\coth(\eta)}{1+\mathrm{i}\csc(\eta)}\right)^2.$$

情况 4.2.2 当 $A=C=1/2$ 时, 方程组 (1) 有四组三角周期解

$$H_{10}=q_0+\frac{p_0C+2l}{2(p_0+C)}(\sec(\eta)\pm\tan(\eta)),$$

$$G_{10}=p_0+\frac{p_0lC^2}{2(p_0+C)}(\sec(\eta)\pm\tan(\eta))^2.$$

$$H_{11}=q_0+\frac{p_0C+2l}{2(p_0+C)}\frac{\tan\eta}{1\pm\sec\eta},$$

$$G_{11}=p_0+\frac{p_0lC^2}{2(p_0+C)}\left(\frac{\tan\eta}{1\pm\sec\eta}\right)^2.$$

$$H_{12}=q_0+\frac{p_0C+2l}{2(p_0+C)}(\cot(\eta)\pm\csc(\eta)),$$

$$G_{12}=p_0+\frac{p_0lC^2}{2(p_0+C)}(\cot(\eta)\pm\csc(\eta))^2.$$

$$H_{13}=q_0+\frac{p_0C+2l}{2(p_0+C)}\left(\frac{\cot(\eta)}{1+\sec(\eta)}\right),$$

$$G_{13}=p_0+\frac{p_0lC^2}{2(p_0+C)}\left(\frac{\cot(\eta)}{1+\sec(\eta)}\right)^2.$$

其中 $\eta=x-F_2\int\frac{1}{W}\mathrm{d}y-lt$, $\mathrm{i}^2=-1$.

情况 5 与情况 4 类似, 这里省略.

情况 6

$$\begin{aligned}-\theta_{\xi\tau\tau}+2\theta_\tau\theta_\xi+2\theta\theta_{\xi\tau}+2\omega_{\tau\tau}=0,&\\\omega_{\tau\tau}+2\theta\omega_\tau+2\theta_\tau\omega=0.&\end{aligned} \tag{21}$$

做行波变换 $\theta(\xi,\tau)=\theta(\eta)$, $\omega(\xi,\tau)=$

$\omega(\eta), \eta = \tau - k\xi$, 代入到 (20) 式中得到

$$-k\theta''' + 2k\theta'^2 + 2k\theta\theta'' + 2\omega'' = 0, \tag{22a}$$

$$\omega'' + 2\theta\omega' + 2\theta'\omega = 0. \tag{22b}$$

由 (22a) 得

$$\omega'' = k\left(\frac{1}{2}\theta''' - \theta'^2 - \theta\theta''\right),$$
$$\omega' = k\left(\frac{1}{2}\theta'' - \theta\theta'\right) + K,$$
$$\omega = \frac{1}{2}k\left(\theta' - \theta^2\right) + K\eta, \tag{23}$$

其中 K 是积分常数.

把 (23) 式代入到 (22b) 式中, 得

$$\theta''' - 6\theta^2\theta' - K\eta\theta' - K\theta = 0. \tag{24}$$

情况 6.1 设方程 (23) 有下述级数解:

$$\theta(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \eta^n, \tag{25}$$

由 (25) 式得

$$\theta'(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q_{n+1} \eta^n, \tag{26}$$

$$\theta'''(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) q_{n+3} \eta^n, \tag{27}$$

$$\theta^2\theta' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} (n+1-k) q_i q_{k-i} q_{n+1-k}\right] \eta^n, \tag{28}$$

把 (25)—(28) 式代入 (24) 式得

$$\begin{aligned} &6q_3 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) q_{n+3} \eta^n \\ &- 6\left\{q_0^2 q_1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} (n+1-k) q_i q_{k-i} q_{n+1-k}\right]\eta^n\right\} \\ &- K(q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n q_n \eta^n) - K\sum_{n=1}^{\infty} q_n \eta^n = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

在 (29) 式中比较系数可得

$$q_3 = \frac{6q_0^2 q_1 - q_0}{6}. \tag{30}$$

一般地, 当 $n \geqslant 1$, 由 (30) 式得

$$q_{n+3} = \frac{6\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} (n+1-k) q_i q_{k-i} q_{n+1-k} - (n+1) q_n}{(n+1)(n+2)(n+3)}. \tag{31}$$

由 (30) 和 (31) 式, 递推可得 $\{q_n\}_{n=3}^{\infty}$, q_0, q_1 和 q_2 取任意实数, q_n 就被惟一地确定下来. 显然, 方程 (24) 存在级数解, 此处不再证明. 由上述过程得, 方程 (24) 的级数解为

$$\begin{aligned} &\theta(\eta) \\ &= q_0 + q_1\eta + q_2\eta^2 + \frac{6q_0^2 q_1 - q_0}{6}\delta^3 + \sum_{n=1}^{\infty} q_{n+3}\eta^n \\ &= q_0 + q_1\eta + q_2\eta^2 + \frac{6q_0^2 q_1 - q_0}{6}\eta^3 \\ &\quad + \frac{6\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} (n+1-k) q_i q_{k-i} q_{n+1-k} - (n+1) q_n}{(n+1)(n+2)(n+3)}\eta^n, \end{aligned} \tag{32}$$

其中 $\eta = C_2 x - \int F_2\,\mathrm{d}t - ky$, $\omega(\eta)$ 由 (23) 式确定. 由此可得方程组 (1) 的级数解为

$$H_{14} = \theta\left(y, C_2 x - \int F_2\,\mathrm{d}t\right) + \frac{F_2(t)}{2C_2},$$
$$G_{14} = \omega\left(y, C_2 x - \int F_2\,\mathrm{d}t\right).$$

情况 6.2 在方程 (24) 中对 η 积分一次得

$$\theta'' = 2\theta^3 + K\eta\theta + \beta, \tag{33}$$

其中 β 是积分常数, 当 $K = 1$ 时, 方程 (33) 是 Painleve II 方程 [12], 此处列出感兴趣的几组解 (见表 3)

表 3 中, $\Phi(\eta) = \phi'(\eta)/\phi(\eta)$, 且 $\phi(\eta)$ 满足

$$\phi(\eta) = D_1 \mathrm{Ai}(\gamma) + D_2 \mathrm{Bi}(\gamma),$$
$$\gamma = -2^{-\frac{1}{3}}\eta, \quad \eta = C_2 x - \int F_2\,\mathrm{d}t - ky, \tag{34}$$

表 3 方程 (33) 的解

β	θ 的解
$\pm(1/2)$	$\theta_1 = \mp\Phi,$
$\pm(3/2)$	$\theta_2 = \mp\Phi \mp \frac{1}{2\Phi^2 + \Phi},$
$\pm(5/2)$	$\theta_3 = \pm\frac{2\delta\Phi^2 + \Phi + \delta^2}{4\Phi^3 + 2\delta\Phi - 1} \pm \frac{1}{2\Phi^2 + \delta},$
$\pm(7/2)$	$\theta_4 = \pm\frac{48\Phi^3 + 8\delta^2\Phi^2 + 28\delta\Phi + 4\delta^3 - 9}{\delta(8\delta\Phi^4 + 16\Phi^3 + 8\delta^2\Phi^2 + 8\delta\Phi + 2\delta^3 - 3)} \mp \frac{2\delta\Phi^2 + \Phi + \delta^2}{4\Phi^3 + 2\delta\Phi - 1} \mp \frac{3}{\delta}.$

$\mathrm{Ai}(\gamma)$ 和 $\mathrm{Bi}(\gamma)$ 是艾里函数, D_1 和 D_2 是任意常数, $\omega(\eta)$ 由 (23) 式确定. 由此可得方程组 (1) 的艾里函数解

$$H_{15\text{–}19} = \theta\left(y, C_2x - \int F_2\,\mathrm{d}t\right) + \frac{F_2(t)}{2C_2},$$
$$G_{15\text{–}19} = \omega\left(y, C_2x - \int F_2\,\mathrm{d}t\right).$$

注 1: 本文中得到的精确解均已经过 MAPLE 数学软件验证.

注 2: 本文情况 4 中得到的三角函数解和双曲函数解比文献 [11] 中更加丰富. 本文情况 6 中所得 BKK 方程组的级数解 H_{14}, G_{14} 及艾里函数解 H_{15-19}, G_{15-19} 均为新解.

4 结 论

利用修正的 CK 直接方法得到了 BKK 方程组的对称以及六组约化方程, 通过解约化方程得到了该方程的很多精确解. 希望这些解在物理工程及动力学中能起到作用. 本文也客观地说明了修正的 CK 直接方法能有效的约化偏微分方程, 并得到精确解, 同时建立偏微分方程新、旧解之间的关系.

[1] Lü D Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4501 (in Chinese) [吕大昭 2005 物理学报 **54** 4501]

[2] Wu J P 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 060207

[3] Liang L W, Li X D, Li Y X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2159 (in Chinese) [梁立为, 李兴东, 李玉霞 2009 物理学报 **58** 2159]

[4] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **20** 765

[5] Lü D Z, Cui Y Y, Liu C H, Zhang Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6793 (in Chinese) [吕大昭, 崔艳英, 刘长河, 张艳 2010 物理学报 **59** 6793]

[6] Zuo J M, Zhang Y M 2011 *Chin. Phys.* B **20** 010205

[7] Pang J, Jin L H, Zhao Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 140201 (in Chinese) [庞晶, 靳玲花, 赵强 2012 物理学报 **61** 140201]

[8] Clarkson P A, Kruskal M D 1989 *Math. Phys.* **30** 2201

[9] Xin X P, Liu X Q, Zhang L L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 1

[10] Trikia H, Wazwazb A 2009 *Appl. Math. Comput.* **214** 370

[11] Wang T T, Yu J Q 2011 *Jounal of Liaocheng University.* **24** 1 (in Chinese) [王婷婷, 于金倩 2011 聊城大学学报 **24** 1]

[12] Clarkson P A 2003 *Appl. Math. Comput.* **153** 127

Symmetries, reductions and exact solutions of Broer-Kau-Kupershmidt system*

Li Ning† Liu Xi-Qiang‡

(*School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng* 252059, *China*)

(Received 10 May 2013; revised manuscript received 18 June 2013)

Abstract

In this paper, using the modified Clarkson–Kruskal direct method, the symmetries and the reductions of (2+1) dimensional Broer-Kau-Kupe-rshmidt (BKK) are obtained. At the same time, a great many of solutions are derived by solving the reduction equations, including the rational functions hyperbolic functions, the trigonometric functions, the power series solution, and the Airy function solution.

Keywords: the modified CK's direct method, the BKK system, symmetry reduction, exact solutions

PACS: 02.30.Jr, 04.20.Jb, 05.45.Yv **DOI:** 10.7498/aps.62.160203

* Project supported by the Joint Fund of the National Natural Science Foundation of China and the China Academy of Engineering Physics (Grant No. 11076015).

† Corresponding author. E-mail: ln1011@163.com

‡ Corresponding author. E-mail: liuxiq@sina.com