

Rabi 模型的光场压缩*

俞立先¹⁾²⁾ 梁奇锋²⁾ 汪丽蓉^{3)†} 朱士群¹⁾

1) (苏州大学物理科学与技术学院, 苏州 215006)

2) (绍兴文理学院数理信息学院, 绍兴 312000)

3) (山西大学激光光谱研究所, 太原 030006)

(2013年4月7日收到; 2013年4月25日收到修改稿)

电路量子电动力学的实验实现了光与人造原子的超强耦合相互作用, 相互作用强度与光场频率在同一个数量级. 在超强耦合区域, 著名的旋波近似失效, 因此系统的动力学必须用含有反旋波项的 Rabi 模型描述. 本文研究 Rabi 模型中的光场压缩. 数值模拟结果发现, 光场压缩不是随耦合强度线性增加, 而是在合适的超强区域获得最大值. 同时, 我们还发现, 较小的反旋波项有助于提高光场压缩. 所得结果有利于实验上在超强区域中制备所需的压缩态.

关键词: Rabi 模型, 超强耦合, 光场压缩

PACS: 03.65.-w, 42.50.Lc

DOI: 10.7498/aps.62.160301

1 引言

在特定的边界条件下, 光与原子产生强的相互作用, 形成腔量子电动力学, 简称腔 QED. 腔 QED 是实现量子制备、量子传输和量子通信的较好方案之一. 量子技术的关键是在单粒子水平上操纵量子态, 其核心在于控制光与原子相互作用的耦合强度. 当耦合强度满足 $g \ll \omega(\Omega)$ 时, 利用旋波近似的方法得到著名的 Jaynes-Cummings 模型 (简称 JC 模型)^[1], 其哈密顿可表示为

$$H_J = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\Omega}{2} \sigma_z + g(a^\dagger \sigma_- + \sigma_+ a), \quad (1)$$

其中, $\omega_0(\Omega)$ 表示光场频率 (原子跃迁频率), $a(a^\dagger)$ 表示湮灭 (产生) 算符, $\sigma_+(\sigma_-)$ 表示二能级原子升 (降) 算符. 虽然 JC 模型形式简单, 但却广泛应用于量子光学^[2]、凝聚态物理^[3]、量子信息科学^[4] 等领域中. 随着材料工艺的进步和实验手段的改进, 2004 年实现了基于超导约瑟夫森结的电流 QED^[5,6]. 最近的相似固态实验获得了人造原子与光子的超强耦合, 耦合强度达到 $g \geq 0.1\omega$ ^[7,8]. 而

且, 科学家还相继提出理论方案以便获得极强耦合区域 ($g \geq \omega$)^[9-11]. 当耦合强度接近或超过光场频率时, 旋波近似不再适用^[12], 因此, 系统的动力学必须用 Rabi 模型描述, 其哈密顿可表示为^[13]

$$H_R = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\Omega}{2} \sigma_z + g(a^\dagger + a)(\sigma_- + \sigma_+). \quad (2)$$

虽然该模型提出已经 70 多年, 但是其能谱和波函数一直未能有效解决. Irish^[14] 提出基于绝热表象建立广义旋波的方法, 较好地解决了满足任意耦合强度能谱问题. 我们以此为基础, 解决了广义旋波近似方法在正失谐情况下不够准确的问题^[15,16]. Braak^[17] 则利用 Bargmann 空间引进超越函数, 提出 Rabi 模型是第一个不可积但是可解的模型. 陈庆虎教授等^[18-20] 也提出拓展相干态方法, 进行了一系列研究, 不少学者也做了一些有意义的工作^[21-23]. 令人兴奋的是, 在超强耦合下出现了有别于 JC 模型的一些新奇的量子效应, 比如动力学不可逆性和量子混沌^[24]、在大失谐下的超辐射现象^[25]、一种新型的光子阻塞作用^[26]、超快的量子门^[27]、超长的 Zeno 时间^[28] 以及强共振效应^[29] 等.

光场压缩^[30] 是一种重要的非经典量子效应,

* 国家自然科学基金 (批准号: 11074184, 11275129, 61275211) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LY13A040001) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wlr@sxu.edu.cn

它是指在描述量子化光场正交分量 $X(P)$ 中一个小于海森堡不确定关系确定的真空涨落. 由于压缩态的量子涨落低于标准量子极限, 可以实现超越标准量子极限的光学测量、引力波的测量^[31], 并且量子涨落的降低有利于提高光场的量子相干性, 同纠缠态、EPR 对制备、量子传输和量子通信都有十分重要的关系^[32]. 因此, 研究光场压缩是一项非常有意义的工作^[33-38]. 在强耦合的腔 QED 中, 产生光场压缩都基于 JC 模型的动力学演化过程. 初始光子数^[39] 或者原子初始态^[40] 将深刻影响光场压缩. 但是在超强耦合区域的电流 QED 中, 关于光场的压缩还需要进行深入研究. 这正是本文的意义所在.

本文通过数值计算的方法研究 Rabi 模型的光场压缩并获得了一些有意义的结果. 第二节简单介绍了光场压缩; 第三节详细分析了 Rabi 模型的光场压缩; 比较 Rabi 模型和 JC 模型在原子和光场失谐、共振情况下的压缩的异同, 探讨光场压缩随耦合的变化情况, 讨论反旋波项对压缩的影响; 第四节是结论.

2 光场压缩

量子化电磁场可以用两个正交分量 X, P 表示, 其中 $X = a^\dagger + a, P = i(a^\dagger - a)$, 当方差 $\Delta X^2 < 1$ (或 $\Delta P^2 < 1$) 时, 光场就得到压缩, 因此, 可以将 ΔX^2 作为压缩的参考量^[41], 也可以将 ΔP^2 作为参考量^[25]. 更一般地, 引进 $X_\theta = a e^{-i\theta} + a^\dagger e^{i\theta}$ ^[39] 后, 由于 $X = X_0, P = X_{\pi/2}$, 则 $X_\theta = X \cos \theta + P \sin \theta$ 可以看作是在相空间中与 X 成 θ 角的物理量, 定义光场压缩系数为^[42]

$$\xi_B^2 = \lim_{\theta \in (0, 2\pi)} (\Delta X_\theta)^2. \quad (3)$$

这个定义是指在动力学演变过程中某一时刻取得最大压缩, ξ_B^2 还能表示成关于 X, P 的其他形式:

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \in (0, 2\pi)} (\Delta X_\theta)^2 \\ &= \lim_{\theta \in (0, 2\pi)} \text{Tr}_B (X \cos \theta + P \sin \theta)^2 \\ & \quad - (\text{Tr}_B (X \cos \theta + P \sin \theta))^2 \\ &= \frac{(\Delta X)^2 + (\Delta P)^2}{2} - \left[((\Delta X)^2 - (\Delta P)^2)^2 \right. \\ & \quad \left. + 4 (\text{Tr}_B (XP + PX) - \text{Tr}_B (X) \text{Tr}_B (P))^2 \right]^{1/2}, \quad (4) \end{aligned}$$

其中 Tr_B 就是对玻色系统求迹. 对于定义 (4), 我们

有 $\xi_B^2 \leq [(\Delta X)^2 + (\Delta P)^2]/2$. 而根据不等式^[43]

$$(\Delta X)^2 + (\Delta P)^2 < 4 \langle a^\dagger a \rangle + 2, \quad (5)$$

有 $\xi_B^2 < 4 \langle a^\dagger a \rangle + 2$, 对于相干态, $(\Delta X_\theta)^2 = \text{Tr}(a e^{-i\theta} + a^\dagger e^{i\theta})^2 - [\text{Tr}(a e^{-i\theta} + a^\dagger e^{i\theta})]^2 = 1$, 即, 对于相干态而言, 沿任意方向压缩都是一致的. 相对于相干态, $\xi_B^2 < 1$ 就意味着光场处在压缩态上, 值越小意味着越被压缩, 而对于 Fock 态 $|n\rangle$, $(\Delta X_\theta)^2 = 2n + 1 \geq 1$, 即单一的 Fock 态不存在压缩的问题.

3 Rabi 模型的光场压缩

根据定义 (3), 要得到 Rabi 模型的最大压缩, 关键是获得其动力学演化形式, 对于 Rabi 模型, 其波函数可以写成:

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) |n\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t) |n\rangle \otimes |\downarrow\rangle. \quad (6)$$

另外波函数的演化满足薛定谔方程,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) = H \phi(t). \quad (7)$$

将 (6) 式带入 (7) 式, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c_m(t) &= -i \left(\left(\omega m + \frac{\Omega}{2} \right) c_m(t) + g d_{m-1}(t) \sqrt{m} \right. \\ & \quad \left. + g d_{m+1}(t) \sqrt{m+1} \right), \\ \frac{d}{dt} d_m(t) &= -i \left(\left(\omega m - \frac{\Omega}{2} \right) d_m(t) + g c_{m-1}(t) \sqrt{m} \right. \\ & \quad \left. + g c_{m+1}(t) \sqrt{m+1} \right). \quad (8) \end{aligned}$$

从 (8) 式可以看出, 一个对应自旋态向上态的演化直接与光子数相差 1 的自旋向下态有关, 反过来也成立. 这样一个扁担型的结构, 实际上反映 Rabi 模型具有 Z_2 对称的结构^[17]. 将 (8) 式代入 (3) 式中, 便可得光场压缩随时间的演化.

首先, 比较一下 Rabi 和 JC 两种模型在强耦合区对光场压缩的异同. 图 1 表示 Rabi 模型和 JC 模型光场压缩随时间演化的动力学, 初始时刻二能级原子处在激发态上^[41], 光场处在相干态 $|\alpha\rangle$. 从图中看到, 从初始时刻起压缩系数随时间逐渐增大, 而经过一段时间, 在 $gt = 25$ 时, 正失谐情况下, JC 模型压缩系数 $\xi_B^2 < 1$, 意味着有光场压缩, Rabi 模型压缩系数 $\xi_B^2 > 1$, 即还没有产生压缩, 在负失谐情况下, 虽然两种模型都产生了压缩, 但是 Rabi 模型压缩较大, 而共振情况几乎一致, 在这一时刻并没有产生压缩.

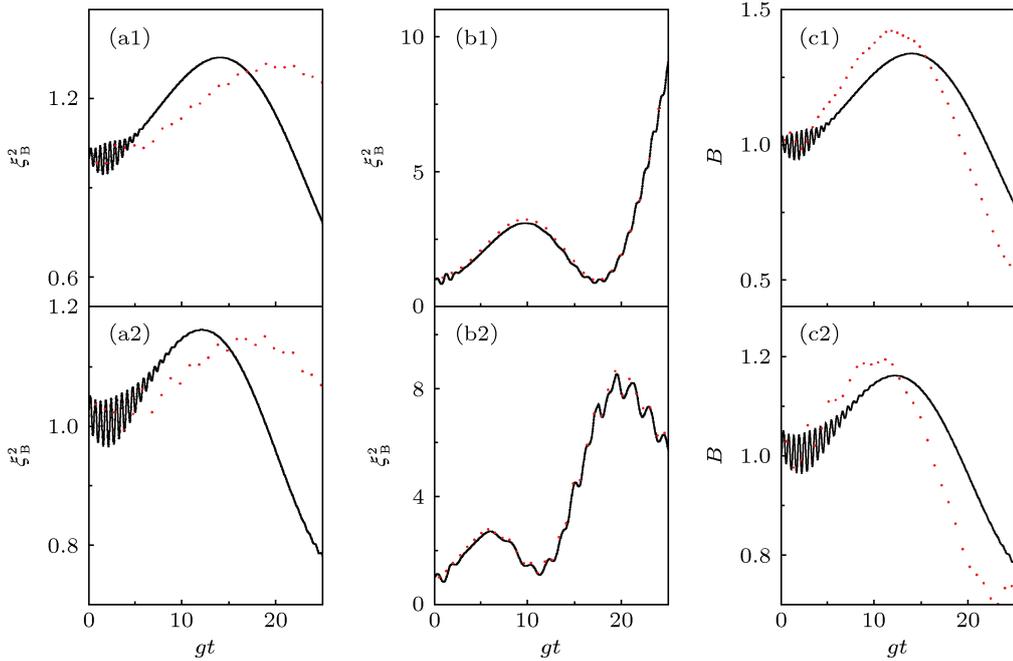


图1 Rabi模型和JC模型光场压缩的时间演化对比 其中JC模型压缩为实线,Rabi模型压缩为圆圈;初始态设为 $|e\rangle \otimes |\alpha\rangle$;系统参数设置为:(a) $\omega = 1, \Omega = 0.5$;(b) $\omega = \Omega = 1$;(c) $\omega = 1, \Omega = 1.5, g = 0.05$;(a1), (b1), (c1) $\alpha = 4$;(a2), (b2), (c2) $\alpha = 10$

动力学图表明 JC 模型和 Rabi 模型的光场压缩依赖于正负失谐. 负失谐 ($\Omega < \omega$) 时 JC 模型更容易压缩, 在正失谐 ($\Omega > \omega$) 情况下, 则情况相反, 而在共振情况下两者的压缩较为一致. 这实际上反映出旋波近似在弱耦合下在近共振情况下是很好的近似, 而在失谐情况下, 旋波近似对动力学有比较大的影响. 图 2 进一步显示失谐对压缩的影响, 这里 $\Delta \xi_B^2 = \xi_{BJ}^2 - \xi_{BR}^2$, ξ_{BJ}^2 (ξ_{BR}^2) 指 JC 模型 (Rabi 模型) 的光场压缩, 如图 2 所示, 在接近 $|\Delta| = 0.5\omega$ 左右时, 两种模型的压缩取得最大的差异; 在负失谐时, JC 模型相比于 Rabi 模型更容易压缩; 而在正失谐时, Rabi 模型反而更容易压缩. 并且增加初始光子数有助于失谐情况下的两种光场压缩的差异放大.

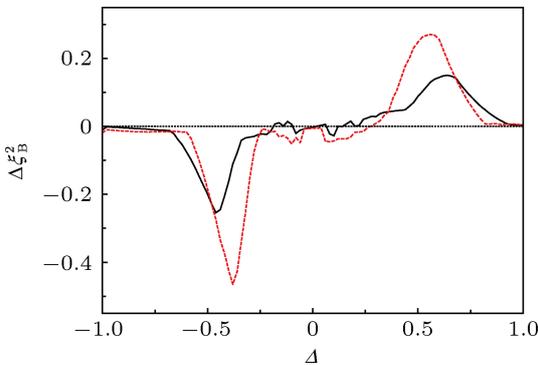


图2 Rabi模型和JC模型在失谐下光场压缩差, 其中 $\Delta = \Omega - \omega$, $\Delta \xi_B^2$ 表示 JC 模型与 Rabi 模型压缩的差值, 初始态设为 $|e\rangle \otimes |\alpha\rangle$, $\alpha = 4$ (实线), $\alpha = 10$ (虚线)

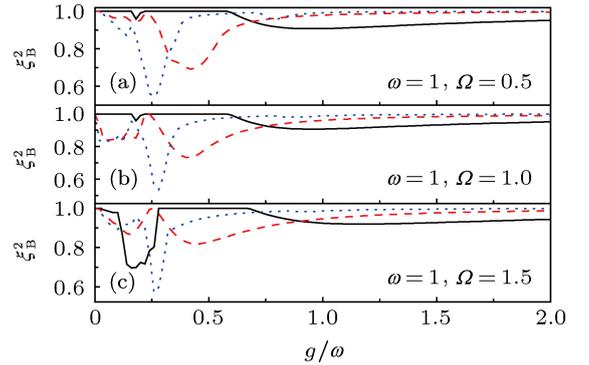


图3 Rabi模型中不同光场初始态光场压缩随耦合强度变化 初始态设为 $|e\rangle \otimes |\alpha\rangle$;系统参数设置为: $\alpha = 1$ (实线), $\alpha = 4$ (虚线), $\alpha = 10$ (点线)

在相同条件下, 耦合强度对光场压缩也会产生影响. 直观的理解是: 当原子和光场的相互作用增强后, 光场压缩应该有所增加. 但是从图 3 观察到, 初始强度不大时, 压缩伴随耦合强度从强到超强有所增加, 到了超强耦合区域之后 (约 $g = 0.2$), 获得最大的压缩, 继续增加耦合强度反而减少了压缩. 这可以理解为, 当耦合强度大之后, 二能级原子的对系统作用反而减小, 实际上导致了绝热近似^[44], 使得光场和原子系统的相互分离,

$$H = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\Omega}{2} \sigma_z + g(a^\dagger + a)(\sigma_+ + \sigma_-)$$

$$\xrightarrow{g \gg \omega, \Omega} H = \omega_0 a^\dagger a + g(a^\dagger + a)(\sigma_+ + \sigma_-),$$

可以看到当耦合强度到达一定值时, 原子的作用几乎消失, 并且可以通过推导得到这时的波函数演

化满足 $|\varphi_t\rangle = e^{i(g^2/\omega)t} e^{-(g/\omega)^2 \sin(\omega t)} |\pm, \beta(t)\rangle$, 其中 $\beta(t) = \pm g/\omega(e^{-i\omega t} - 1)$, 这里的 $|\pm\rangle$ 表示为 σ_x 的本征态. 由此可以看出, 对于初始相干态, 则在演化过程中保持着相干态, 则压缩系数 $\xi_B^2 = 1$. 另外值得注意的是, 无论是在共振还是失谐时, 获得最大压缩的耦合强度几乎是一样的, 如图 3 所示.

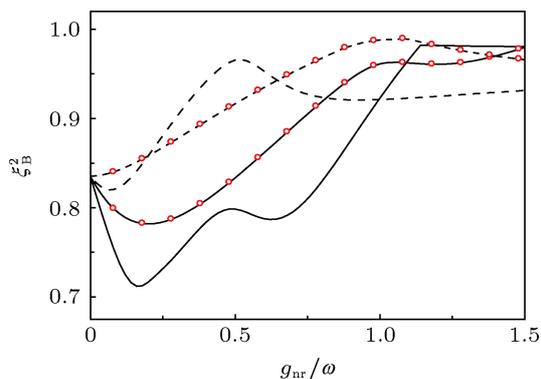


图 4 Rabi 模型中反旋波项对压缩的影响 初始态设为 $|e\rangle \otimes |\alpha\rangle$; 系统参数设置为: $g_r = 0.5, |\alpha| = 4$ (实线), $g_r = 0.5, |\alpha| = 10$ (虚线), $g_r = 1, |\alpha| = 4$ (实线圈), $g_r = 1, |\alpha| = 10$ (虚线圈)

最后, 为了进一步揭示反旋波项对压缩的影响, 将 Rabi 模型的哈密顿写成旋波项和反旋波项的形式, 即

$$H_R = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\Omega}{2} \sigma_z + g_r (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) + g_{nr} (a^\dagger \sigma_+ + a \sigma_-), \quad (9)$$

其中, g_r 表示旋波项系数, g_{nr} 表示反旋波项系数. 图 4 表示 Rabi 模型中反旋波项对压缩影响, 可清楚地显示较小的反旋波项能够获得更大的压缩, 而与旋波项系数一致时, 压缩反而降低了. 因此, 若不考虑 JC 模型的适用条件, 那么 JC 模型可以提供 Rabi 模型在超强耦合下的压缩大小的一个依据, Rabi 模型的光场压缩与初始光子数的关系仍满足关系 [45]: $\xi_B^2 \sim 1/n_0$.

4 结论

本文通过对 Rabi 模型动力学的数值模拟, 研究了 Rabi 模型的光场压缩问题. 结果表明: 在强耦合区, 原子和光场频率若共振, 则 JC 模型和 Rabi 模型的光场压缩较为一致; 而在负失谐时, JC 模型更容易导致压缩, 在正失谐情况下, Rabi 模型则更易压缩; 随着耦合强度的提高, Rabi 模型对光场的压缩经历先增大后减小, 直至不再压缩的过程; 原子和光场的失谐对这个过程几乎没有影响, 在耦合强度 $g = 0.2\omega$ 左右产生最大的光场压缩; 反旋波项前的耦合强度对光场压缩具有明显的调制作用, 较小的值往往能获得更大的压缩, 而与旋波项前耦合强度一致时则出现一个压缩的极小值, 而更大的值则抑制压缩的产生.

- [1] Jaynes E T, Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [2] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Holstein T 1959 *Ann. Phys. (Amsterdam, Neth.)* **8** 325
- [4] Raimond J M, Brune M, Haroche S 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 565
- [5] Blais A, Huang R S, Wallraff A, Girvin S M, Schoelkopf R J 2004 *Phys. Rev. B* **69** 62320
- [6] Wallraff A, Schuster D, Blais A, Frunzio L, Huang R S, Majer J, Kumar S, Girvin S, Schoelkopf R 2004 *Nature* **431** 162
- [7] Niemczyk T, Deppe F, Huebl H, Menzel E P, Hocke F, Schwarz M J, Garcia-Ripoll J J, Zueco D, Hummer T, Solano E 2010 *Nat. Phys.* **6** 772
- [8] Fedorov A, Feofanov A K, Macha P, Forn-Díaz P, Harmans C J P M, Mooij J E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 060503
- [9] Crespi A, Longhi S, Osellame R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 163601
- [10] Ballester D, Romero G, García-Ripoll J, Deppe F, Solano E 2012 *Phys. Rev. X* **2** 021007
- [11] Arne G L 2013 *Phys. Rev. A* **87** 033814
- [12] Forn-Díaz P, Lisenfeld J, Marcos D, García-Ripoll J J, Solano E, Harmans C J P M, Mooij J E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 237001
- [13] Rabi I I 1936 *Phys. Rev.* **49** 324
- [14] Irish E K 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 173601
- [15] Zhang Y W, Chen G, Yu L X, Liang Q F, Liang J Q, Jia S T 2011 *Phys. Rev. A* **83** 065802
- [16] Yu L X, Zhu S Q, Liang Q F, Chen G, Jia S T 2012 *Phys. Rev. A* **86** 015803
- [17] Braak D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 100401
- [18] Zhang Y Y, Chen Q H, Wang K L 2010 *Phys. Rev. B* **81** 121105
- [19] Chen Q H, Wang C, He S, Liu T, Wang K L 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023822
- [20] Chen Q H, Liu T, Zhang Y Y, Wang K L 2011 *Europhys. Lett.* **96** 14003
- [21] Li X Q, Wang J, Wang F, Hu X M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2236 (in Chinese) [李晓奇, 王剑, 王飞, 胡响明 2008 物理学报 **57** 2236]
- [22] Jia F, Xie S Y, Yang Y P 2006 *Acta Phys. Sin.* **56** 5835 (in Chinese) [贾飞, 谢双媛, 羊亚平 2006 物理学报 **56** 5835]
- [23] Liao X, Cong H L, Jiang D L, Ren X Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5508 (in Chinese) [廖旭, 丛红璐, 姜道来, 任学藻 2010 物理学报 **59** 5508]
- [24] Bonci L, Roncaglia R, West B J, Grigolini P 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 2593
- [25] Ashhab S 2013 *Phys. Rev. A* **87** 013826
- [26] Ridolfo A, Leib M, Savasta S, Hartmann M J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 193602
- [27] Romero G, Ballester D, Wang Y M, Scarani V, Solano E 2012 *Phys.*

- Rev. Lett.* **108** 120501
- [28] Zheng H, Zhu S Y, Zubairy M S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 200404
- [29] Liang Q F, Yu L X, Chen G, Jia S T 2013 *Eur. Phys. J. D* **67** 21
- [30] Stoler D 1970 *Phys. Rev. D* **1** 3217
- [31] Hollenhorst J N 1979 *Phys. Rev. D* **19** 1669
- [32] Peng K C 2001 *Physics* **30** 300 (in Chinese) [彭堃掇 2001 物理 **30** 300]
- [33] Zhang Y, Wang H, Li X Y, Jing J T, Xie C D, Peng K C 2000 *Phys. Rev. A* **62** 023813
- [34] Zhang J, Ye C G, Gao F, Xiao M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 233602
- [35] Song J, Fan H Y, Zhou J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110302 (in Chinese) [宋军, 范洪义, 周军 2011 物理学报 **60** 110302]
- [36] Fan H Y, Pan X Y 1998 *Chin. Phys. Lett.* **15** 625
- [37] Zhao J G, Sun C Y, Liang B L, Su J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4635 (in Chinese) [赵建刚, 孙长勇, 梁宝龙, 苏杰 2009 物理学报 **58** 4635]
- [38] Li Z H, Yu M Z, Yang Y P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1693 (in Chinese) [李征鸿, 于明章, 杨亚平 2008 物理学报 **57** 1693]
- [39] Meystre P, Zubairy M S 1982 *Phys. Lett. A* **89** 390
- [40] Knight P L 1986 *Phys. Scr.* **86** 51
- [41] Kukliński J, Madajczyk J 1988 *Phys. Rev. A* **37** 3175
- [42] Ma J, Wang X G, Sun C P, Nori F 2011 *Phys. Rep.* **509** 89
- [43] Hillery M 1987 *Phys. Rev. A* **36** 3796
- [44] Casanova J, Romero G, Lizuain I, García-Ripoll J J, Solano E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 263603
- [45] Hillery M 1989 *Phys. Rev. A* **39** 1556

Photon squeezing of the Rabi model*

Yu Li-Xian¹⁾²⁾ Liang Qi-Feng²⁾ Wang Li-Rong^{3)†} Zhu Shi-Qun¹⁾

¹⁾ (School of Physical Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006, China)

²⁾ (Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)

³⁾ (Laser Spectroscopy Laboratory, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

(Received 7 April 2013; revised manuscript received 25 April 2013)

Abstract

Recent experiments about the circuit cavity quantum electrodynamics have realized the ultrastrong couplings between the artificial atom and the photon, in which the coupling strengths have the same order of the photon frequency. In such a regime, the well-known rotating wave approximation is invalid, and the system dynamics is thus governed by the Rabi model. In this paper, we investigate the photon squeezing of the Rabi model. We find numerically that with the increase of the atom-photon coupling strength, the photon squeezing does not increase linearly, but displays a maximum in the ultrastrong coupling regime. In addition, we also reveal that the photonsqueezing can be enhanced by the counter-rotating terms of the Rabi model. Our results are of benefit to preparing the required squeezing state of the photon in experiment.

Keywords: Rabi model, ultra-strong coupling, photon squeezing

PACS: 03.65.-w, 42.50.Lc

DOI: 10.7498/aps.62.160301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11074184, 11275129, 61275211) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LY13A040001).

† Corresponding author. E-mail: wlr@sxu.edu.cn