

基于电场数值加权的跨介质元胞共形新技术*

孙亚秀[†] 姜庆辉

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 哈尔滨 150001)

(2013年3月26日收到; 2013年4月24日收到修改稿)

针对时域有限差分法处理跨介质元胞现有共形技术中存在误差大、平行方向未被包含等问题, 提出一种利用电场数值加权法来进行跨介质元胞共形计算的新算法. 该算法不再对介电常数 ϵ 做加权平均处理, 而是根据中值定理对时域有限差分法真正的求解分量电场强度进行权值选择, 并将权值乘入积分路径中. 该方法同时考虑了跨介质安培环路元胞与跨介质法拉第环路元胞对结果带来的不连续影响, 而且对介质界面与元胞中场分量的各种位置关系均能应用, 通用性强、精度高且易于实现. 利用介质填充圆波导作为数值模型来进行理论数值计算和仿真验证, 比较不同共形方法的二维 TE 模式的特征根与理论值的偏差以及由共形技术所带来的各向相异性. 数值结果表明, 本文所提出算法求得的特征根最接近理论值, 而且造成的各向相异性更小, 从而验证了该算法在处理跨介质元胞时的有效性.

关键词: 时域有限差分, 电场数值加权法, 二维 TE 模式, 跨介质元胞

PACS: 41.20.Jb, 02.70.Bf, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.62.164101

1 引言

时域有限差分 (FDTD) 方法作为一种高效解决各类电磁问题和现象的数值方法, 已被广泛应用到工业、国防及材料等领域的各种电磁问题的数值模拟中^[1-8]. 由于 FDTD 是按照矩形的 Yee 元胞对电磁空间进行划分, 因此在包含带有相对介电常数的散射体的区域中, 会出现跨介质元胞.

对于跨介质 Yee 元胞, 因其内部各处介电常数 ϵ 不均匀, 故不能直接应用 FDTD 差分公式. 虽然可以通过修改 FDTD 模型在交界处的形状, 将所有元胞都划分为非跨介质元胞, 此种方法被称为阶梯近似法. 但阶梯近似误差较大, 结果不理想. 后来有些学者对阶梯近似法进行了一些改进, Ding 和 Chu 应用元胞扩大技术完成了对界面与坐标轴垂直情况和阶梯近似的精度提高, 但这种方法只能使用阶梯近似界面, 因此提升的精度有限^[9-11].

20 世纪 90 年代又提出了一种基于 Maxwell 积

分方程的 FDTD 环路法^[12,13], 文献 [13] 列出了一种应用环路公式处理弯曲介质体表面的方法. 该方法通过在介质表面附近建立不规则的元胞, 使结果的准确性相比阶梯近似有了一定的提高. 但另一方面, 不规则的元胞也使计算过程中需要取更多不规则元胞的分量和更为严格的 Courant 稳定条件, 导致运算过程耗时多, 求取难度大.

电介质可以分为非色散介质与色散介质, 色散介质相对比较复杂, 在对其进行模拟时需要进行一些额外处理^[14-17]. 以下讨论的共形技术主要是用于处理非色散介质的. 目前应用较普遍的一类共形技术是等效介电常数法^[18-20], 该类方法简单、稳定, 误差比阶梯近似法小. 文献 [18] 采用的是体积积分法, 无法找到对应的元胞环路. 文献 [19, 20] 对文献 [18] 的介电常数加权权值做了一定的修正. 文献 [19] 采用的是面积加权方法, 即按照元胞安培环路所围面积中不同介质所占的比例来进行加权, 但该文忽略了跨介质法拉第环路元胞所带来的影响. 文献 [20] 的 Yu-Mitra 方法采用的是法拉第环路元

* 国家自然科学基金(批准号: 51209055)、航空科学基金(批准号: 201207P6001)、中国博士后基金(批准号: 20100480966)、中央高校基本科研业务费(批准号: HEUCFR1124)和飞行器控制一体化技术重点实验室资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: sunyaxiu@hrbeu.edu.cn

胞的长度加权, 仅考虑了法拉第环路元胞对电场结果的影响, 但没有引入安培环路中跨介质对结果影响. 此外由于文献 [19] 和 [20] 的面积加权方法和长度加权需要有界面与积分路径的交点或界面与积分面积的交线, 但当介质界面与元胞中场分量平行或重合时, 这样的交点或交线不存在, 故无法得到加权平均中的不同介质所占的长度权值. 而此种情况只能应用误差较大的阶梯近似法. 总之, 以上几种方法分别通过体积、面积以及长度关系对介电常数 ϵ 做加权平均. 而非参与环路公式运算的不连续量——电场矢量 E 的权值, 这会导致共形后的电场值相对实际值发生偏差.

此后学者们又提出了一些通过提高精度减小误差的方法. Fujii 等 [21-23] 应用双正交内插值与小波变换结合的方法进行介质交界处理. Wang 等将具有二阶时间精度、四阶空间精度的 FDTD (2, 4) 方法 [24,25] 与等效介电常数方法进行结合 [26], 使结果具有更高的精度. 但以上方法是通过提高自身的 FDTD 算式精度来减少整体结果的误差, 其共形技术依然应用的是等效介电常数法, 故精度的提高只是针对 FDTD 算法本身, 而不是共形技术.

Liu 和 Chang 在文献 [27] 中通过与对角线垂直方向的介质界面反射、透射与入射的数值关系做二阶近似得出了倾斜界面的 TM 模式的基于距离加权平均方法, 该方法的误差较现有方法有了明显提高. 但对于 TE 模式, 该文献未给出具体推导和实现过程.

针对以上方法的问题, 本文提出一种在二维 TE 模式下同时考虑法拉第环路和安培环路的一种新的共形算法, 该算法是基于电场分量的数值加权来进行 FDTD 共形计算, 此算法对介质界面与元胞中场分量的各种位置关系均能应用, 而且有更高的计算精度.

2 电场分量的数值加权法

对于基于 Maxwell 积分方程形式的 FDTD 算法, 主要近似方法是用可以求得的乘积代替不可求得的积分. 图 1 为对连续分量与不连续分量近似的示意图. 这种近似方法的理论依据是微积分学中的中值定理, 对于连续的标量函数如图 1(a) 所示, 中值定理可以表述为

$$y = \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(m) = \Delta x \cdot f(m), \quad (1)$$

式中 $f(x)$ 为被积函数, $f(x)$ 连续. 积分区间为 (a, b) , m 是区间 (a, b) 当中的某一待定点, Δx 定义为积分区间长度, 即 $(b-a)$ 的值.

对于连续分量, 由于 (1) 式中的 m 值与被积函数 $f(x)$ 的函数值有关. 在被积函数未知时, 积分无法直接获得. 因此, FDTD 算法和其他一些算法对 (1) 式采用数值方法做了近似处理:

$$y = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(m_0) = \Delta x \cdot f(m_0), \quad (2)$$

式中的 m_0 是区间 (a, b) 内的一个固定点, 常见的取法为

$$m_0 = \frac{a+b}{2}. \quad (3)$$

将 (1) 式与 (2) 式做差得到近似算法的误差为

$$|\Delta y| = |(b-a)[f(m) - f(m_0)]| \leq \max(|f'(x)|) \cdot (m - m_0)\Delta x = O(\Delta x^2). \quad (4)$$

但是, (1) 式成立的前提是要求函数连续, 因此, 对于那些存在间断点的被积函数如图 1(b) 所示, 直接套用 (2) 式误差不一定是 $O(\Delta x^2)$ 级. 不过, 如果已知间断点左右函数值的关系, 可以通过将近似公式做一些调整, 得到在所求区间的积分值相同而被积函数连续的新函数. 如图 1(c) 所示, 当知道间断点 x_1 的函数左右极限值的倍数关系时, 就可以将此关系作为权值从函数值中移出, 即通过将一侧的函数值缩小 (或扩大) 相应的倍数, 使函数值与另一侧连续. 然后将调整的权值乘入到积分区间长度值中, 即将积分区间长度 Δx_1 做相反调整. 对于图 1(c) 情况, 调整后的近似公式为

$$y \approx \left[(b-x_1) + \frac{x_1-a}{k} \right] f(m_0) = \Delta x' \cdot f(m_0), \quad (5)$$

式中 x_1 为间断点的 x 值, k 为函数值在间断点左端扩大的倍数, $\Delta x'$ 为调整后的积分区间总长度, 由于调整后的函数为连续函数, 因此该种处理方法的误差可以用 (4) 式描述, 是 $O(\Delta x^2)$ 级.

电磁场是关于坐标的矢量函数, 通过矢量分解, 矢量函数可以用两个相互垂直方向标量函数表示. 介质交界面附近区域存在不连续的电场, 但可以获得介质交面的电场关系:

$$\begin{cases} E_{2T} - E_{1T} = 0, \\ \epsilon_1 E_{1N} - \epsilon_2 E_{2N} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

式中 E_{1T}, E_{2T} 是电场切向分量, E_{1N}, E_{2N} 是电场的法向分量. 如果将电场值看作坐标分量的函数, 通

过 (6) 式可以得出电场切向与法向倍数关系权值, 完成对切向和法向分量按照标量函数的近似方式进行近似, 即用电场的数值加权来对不同情况下的跨介质元胞进行共形处理. 例如, 可以依据 (6) 式的第二方程通过数值加权 E_{2N} 部分的电场值做修改使之与 E_{1N} 部分连续.

由于本文在基于电场数值进行加权时, 考虑了两种不同的环路, 而这两种环路的位置不同. 考虑到介电常数值在两组环路中的相同坐标处取相同值, 而等效路径长度可以根据各自路径取不同的值. 因此在进行加权时, 将相应的权值乘入到各路径的长度比用等效介电常数更能清楚地反映实际模型, 并且更易于实现. 故本文在对电场进行数值加权时, 将权值乘入到路径长度中, 具体的处理方法见第 3, 4 节.

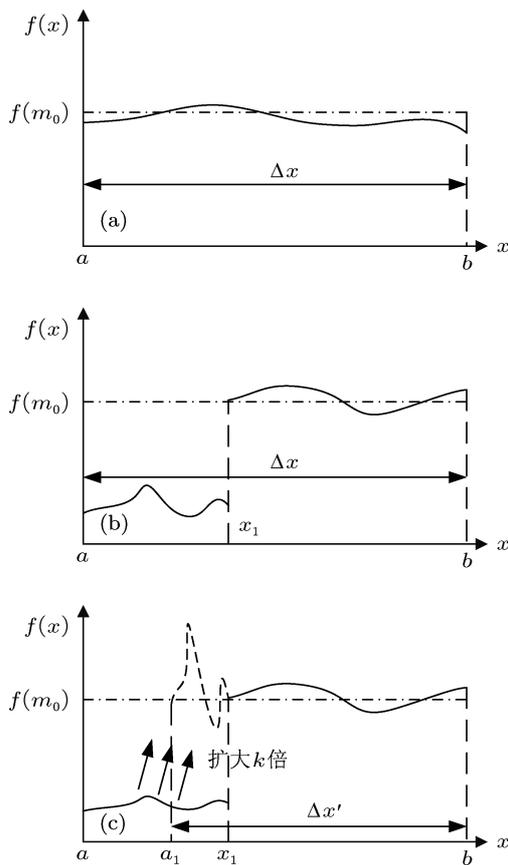


图 1 连续分量与不连续分量的近似 (a) 连续分量; (b) 不连续分量; (c) 将不连续分量处理为连续分量

3 跨介质法拉第环路元胞的处理

图 2 为跨介质法拉第元胞的示意图. 对于图 2 所示的元胞, 上端与左端路径与介质面有交点, 这里以处理上端路径为例说明电场数值加权. 上端的

路径被分割为 Δx_1 和 Δx_2 两部分. 两部分电场分量不连续, 应用数值加权法对其进行共形.

对于 Yee 元胞的法拉第定律的积分公式为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (7)$$

该式在 Yee 元胞中的离散形式为

$$\begin{aligned} & E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j \right) \Delta x - E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j + 1 \right) \Delta x \\ & + E_y^n \left(i, j + \frac{1}{2} \right) \Delta y - E_y^n \left(i + 1, j + \frac{1}{2} \right) \Delta y \\ & = \mu \frac{1}{\Delta t} \left[H_z^{n+1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. - H_z^{n-1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \right] \Delta x \Delta y. \quad (8) \end{aligned}$$

为了让跨介质的 Yee 元胞能够像常规元胞那样进行 FDTD 运算的结果比较准确, 应将图 2 中的介质 2 的电场分量做调整使之与介质 1 连续. 对图 2 上端的 E_x 分量调整方法如下.

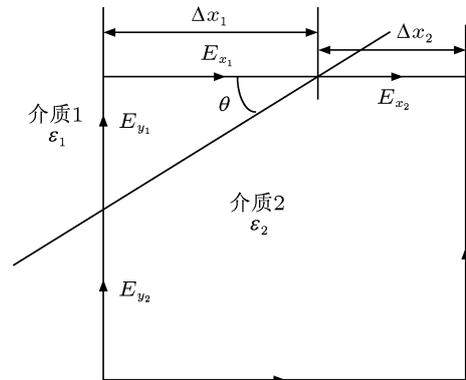


图 2 跨介质法拉第元胞

在理想介质中, 电场切向法向的边界关系为

$$\begin{cases} \epsilon_1 E_{1N} = \epsilon_2 E_{2N}, \\ E_{1T} = E_{2T}. \end{cases} \quad (9)$$

图 3 为图 2 中介质分界面处的电场关系. 对于图 3, 由于两种理想介质的介电常数不同, 故介质 1 中电场 E_{x1} 和介质 2 中电场 E_{x2} 不连续. 由 (9) 式可见, 电场的切向分量连续, 在介质 1 部分和介质 2 部分的权值都为 1. 法向分量在边界处具有 (9) 式中第一方程给出的倍数关系, 为保证调整后的分量连续, 定义在介质 1 部分的权值为 1, 介质 2 部分的权值为 ϵ_1/ϵ_2 , 依此将电场分量数值加权, 移去权值

后的分量关系为

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{x2} = E_{2N} \mathbf{e}_N + E_{2T} \mathbf{e}_T, \\ E'_{2N} = \frac{\epsilon_2 E_{2N}}{\epsilon_1}, \\ E'_{2T} = E_{2T}, \\ \mathbf{E}'_{x2} = E'_{2N} \mathbf{e}_N + E'_{2T} \mathbf{e}_T, \end{cases} \quad (10)$$

式中, $\mathbf{e}_N, \mathbf{e}_T$ 为介质交面法向与切向的单位矢量, $\mathbf{E}'_{x2}, E'_{2N}, E'_{2T}$ 为加权后的矢量和切向、法向分量. (10) 式的第二方程代表了法向分量如图 1(c) 形式的调整方法. 第一方程是对原始矢量电场的矢量分解, 第四方程是将加权后的分量做矢量合成. 同时, 为了保证结果不变, 将切向分量与法向分量的权值乘入积分路径的切向法向部分中:

$$\begin{cases} \Delta N_2 = \Delta x_2 \sin \theta, \\ \Delta T_2 = \Delta x_2 \cos \theta, \\ \frac{\Delta N'_2}{\Delta N_2} = \left(\frac{E'_{2N}}{E_{2N}} \right)^{-1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \\ \frac{\Delta T'_2}{\Delta T_2} = \left(\frac{E'_{2T}}{E_{2T}} \right)^{-1} = 1, \\ \Delta x'_2 = \sqrt{\Delta T_2'^2 + \Delta N_2'^2}, \end{cases} \quad (11)$$

式中: $\Delta x_2, \Delta N_2$ 和 ΔT_2 为原始路径的总长度和切向与法向部分的长度, $\Delta x'_2, \Delta N'_2$ 和 $\Delta T'_2$ 为对场分量做连续调整路径的总长度和切向与法向部分的长度. (11) 式反映了将权值乘入切向与法向分量的过程, 各分量在元胞中的位置关系如图 3 所示. 根据 (11) 式可知, 调整后的路径 $\Delta x'_2$ 为

$$\begin{aligned} \Delta x'_2 &= \sqrt{\Delta T_2'^2 + \Delta N_2'^2} \\ &= \sqrt{\Delta T_2^2 + \left(\Delta N_2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2} \\ &= \Delta x_2 \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

对上述元胞进行 FDTD 运算时, 用 (8) 式中的 $E_x^n(i+1/2, j)$ 近似该部分等效后的实际电场, 将 (8) 式中 FDTD 标准形式中的 $E_x^n(i+1/2, j) \cdot \Delta x$ 替换为电场加权后的值 $E_x^n(i+1/2, j) \cdot \Delta x'$, 以保证积分结果与原值更接近. $\Delta x'$ 是修改后的各部分路径长度的总和, 定义为

$$\Delta x' = \Delta x_1 + \Delta x'_2$$

$$= \Delta x_1 + \Delta x_2 \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2}, \quad (13)$$

式中 θ 为图 2 和图 3 中电场 E_x 与介质交界面的夹角. 通常, 介质界面的解析式已知, 此时, θ 的正切值也就是界面解析式的斜率, 因此, 获取 θ 的正切值通常比获取 θ 值容易:

$$\tan \theta = dy/dx. \quad (14)$$

而 (12) 式与 (13) 式中, θ 的正余弦平方可以用正切值表示求取, 具体公式如下:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \frac{1}{1 + (dy/dx)^2}, \\ \sin^2 \theta &= \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \frac{(dy/dx)^2}{1 + (dy/dx)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

将 (15) 式代入 (13) 式即可得到加权后的长度 $\Delta x'$ 的值. 但有时界面解析式获取较困难, 对于这种情况可以用界面上的离散已知点的差分值得来代替 (15) 式里 (dy/dx) 中的微分值.

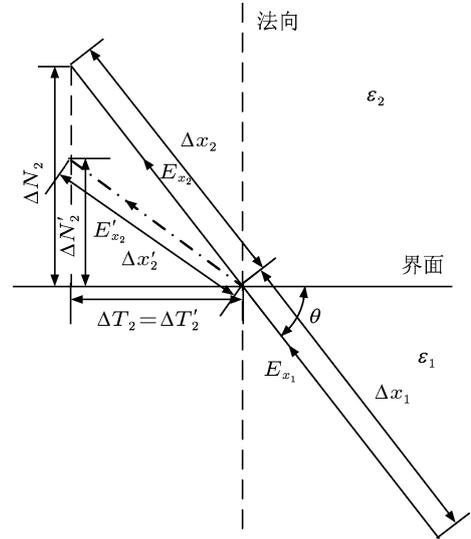


图 3 法拉第环路中对路径的共形处理

4 跨介质安培环路元胞的处理

对于二维 TE 情况, 在三维中的面积积分对应于二维的线积分. 同时在二维 TE 中 H_y 和 H_x 分量为 0, 故安培环路的磁场分量只有 z 方向一个分量.

故二维 TE 模式下, Yee 元胞的安培环路 TE 积分公式如下:

$$H_z = \int_y \frac{\partial D_x}{\partial t} dy. \quad (16)$$

(16) 式在 Yee 元胞中的离散形式为

$$\begin{aligned} & H_z^{n-1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - H_z^{n-1/2} \left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \\ & = \Delta y \cdot \left(\frac{\partial D_x}{\partial t} \right)_{i+1/2, j}^n. \end{aligned} \quad (17)$$

与第二节中对法拉第环路元胞处理的方法类似, 这里的跨介质元胞处理也基于切向与法向的边界条件. 图 4 为跨介质安培元胞的示意图.

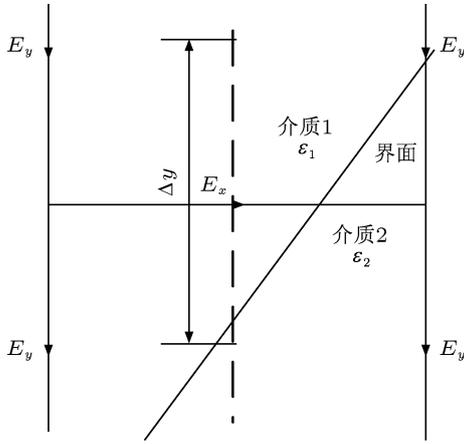


图 4 跨介质安培环路元胞

对于图 4 描述的元胞, 该元胞垂直于 x 方向, 图 4 列出了其在 xoy 平面的投影, 元胞中的 Δy 与介质交界面有交点. 图 5 为安培环路中对路径的共形处理示意图. 理想介质电位移的边界条件关系为

$$\begin{cases} D_{1N} = D_{2N}, \\ \frac{D_{1T}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2T}}{\epsilon_2}, \end{cases} \quad (18)$$

为使图 5 中介质 2 的电位移量与介质 1 中的连续, 根据 (18) 式, 电位移的法向分量连续, 在介质 1 和介质 2 中的权值都为 1, 对于切向, 定义分量介质 1 部分的权值为 1, 介质 2 部分的权值为 ϵ_2/ϵ_1 , 因此移去权值后的分量关系为

$$\begin{cases} D'_{2N} = D_{2N}, \\ D'_{2T} = \frac{\epsilon_1 D_{2T}}{\epsilon_2}, \end{cases} \quad (19)$$

式中 D'_{2N} , D'_{2T} 为调整后的切向和法向分量. 将权值

乘入积分路径的切向法向部分中:

$$\begin{cases} \Delta T_2 = \Delta y_2 \cos \varphi, \\ \Delta N_2 = \Delta y_2 \sin \varphi, \\ \frac{\Delta N'_2}{\Delta N_2} = \left(\frac{D'_{2T}}{D_{2T}} \right)^{-1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \\ \frac{\Delta T'_2}{\Delta T_2} = \left(\frac{D'_{2N}}{D_{2N}} \right)^{-1} = 1, \\ \Delta y'_2 = \sqrt{\Delta N_2'^2 + \Delta T_2'^2}, \end{cases} \quad (20)$$

式中 Δy_2 , ΔN_2 和 ΔT_2 为原始路径的总长度和切向与法向部分的长度, $\Delta y'_2$, $\Delta N'_2$ 和 $\Delta T'_2$ 为对场分量做连续调整路径的总长度和切向与法向部分的长度. (20) 式反映了将权值乘入切向与法向分量的过程, 各分量在元胞中的位置关系示意图如图 5 所示. 根据 (20) 式可知, 调整后的路径 $\Delta y'_2$ 为

$$\begin{aligned} \Delta y'_2 &= \sqrt{\Delta T_2'^2 + \Delta N_2'^2} \\ &= \sqrt{\Delta T_2^2 + \left(\Delta N_2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2} \\ &= \Delta y_2 \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

改变后的路径如图 5 的点画线部分. 总路径长度 $\Delta y'$ 定义为

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \Delta y_1 + \Delta y'_2 \\ &= \Delta y_1 + \Delta y_2 \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2}}, \end{aligned} \quad (22)$$

用 $\Delta y'$ 替换 (17) 式右端的 Δy 进行该部分的 FDTD 运算.

对于 (22) 式中出现的角度 φ , 可以按照第三节中角度 θ 的处理方式, 用其正切值, 即解析式的斜率得到相应的正、余弦的平方值.

此处, 由于是跨介质, 而 (16) 式运算过程用到的是电位移而非电场强度. 但是 FDTD 方法是通过电场强度 \mathbf{E} 与磁场强度 \mathbf{H} 交替求解来进行计算和仿真的. 因此, 需要通过电位移导出电场强度转换为

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (23)$$

由于图 4 介质 2 中的介电常数 ϵ_2 已加权后折算为 ϵ_1 , 所以 (23) 式的 ϵ 用 ϵ_1 来代替.

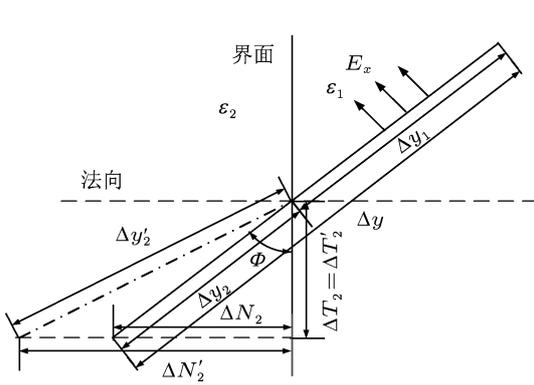


图5 安培环路中对路径的共形处理

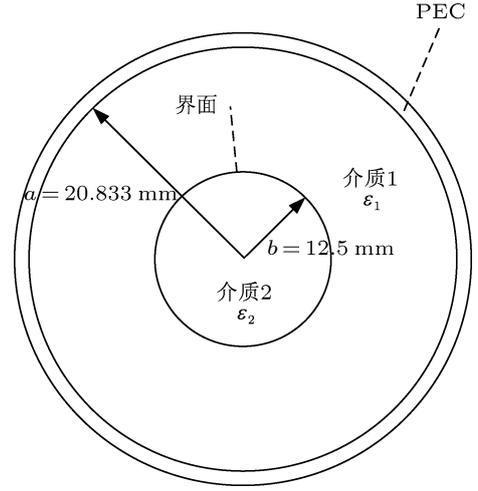


图6 数值实例介质填充波导

5 数值验证

5.1 理论结果

为了验证上述方法的有效性, 现用图6介质填充圆波导作为数值模型来进行理论数值计算和仿真验证. 该模型外层介质为真空, 介电常数为真空介电常数 $\epsilon_1 = \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, 内层介质相对介电常数 $\epsilon_2 = 3.00$. 介质交线为半径 $b = 12.5$ mm 的圆, 外层介质与波导边界 PEC 交线为半径 $a = 20.833$ mm 的圆, 几个圆的圆心重合, 下面进行 TE 模特征根的理论求解过程.

对于图6波导, 各处的 TE 模场分量分离变量后关于轴向坐标 r 的表达式如下:

$$\begin{cases} H_{z1}(r) = AJ_m(K_{c1}r) + BY_m(K_{c1}r), \\ E_{\phi 1}(r) = \frac{j\omega\mu}{K_{c1}} [AJ'_m(K_{c1}r) + BY'_m(K_{c1}r)], \\ H_{z2}(r) = CJ_m(K_{c2}r), \\ E_{\phi 2}(r) = \frac{j\omega\mu}{K_{c2}} CJ'_m(K_{c2}r), \end{cases} \quad (24)$$

式中, 场分量 H_{z1} , $E_{\phi 1}$ 位于介质1中, 场分量 H_{z2} , $E_{\phi 2}$ 位于介质2中; $J_m(x)$ 和 $J'_m(x)$ 为第一类贝塞尔函数及其导数, $Y_m(x)$ 和 $Y'_m(x)$ 为第二类贝塞尔函数及其导数; K_{c1} , K_{c2} 分别为两种介质中的波系数, $K_{c1} = \omega\epsilon_1\mu$, $K_{c2} = \omega\epsilon_2\mu$, 根据边界条件关系:

$$\begin{cases} E_{\phi 1}(K_{c1}a) = 0, \\ H_{z1}(K_{c1}b) = H_{z2}(K_{c2}b), \\ E_{\phi 1}(K_{c1}b) = E_{\phi 2}(K_{c2}b), \end{cases} \quad (25)$$

联合(24)式和(25)式得如下方程组:

$$\begin{cases} AJ_m(K_{c1}b) + BY_m(K_{c1}b) = CJ_m(K_{c2}b), \\ AJ'_m(K_{c1}b) + BY'_m(K_{c1}b) = CJ'_m(K_{c2}b), \\ AJ_m(K_{c1}a) + BY_m(K_{c1}a) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

约去上式中的 A, B, C 并用特征根形式表示结果得下式:

$$\frac{\epsilon_2 J_m\left(0.6 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} x_{mn}\right)}{\epsilon_1 J'_m\left(0.6 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} x_{mn}\right)} = \frac{J_m(0.6x_{mn})Y'_m(x_{mn}) - Y_m(0.6x_{mn})J'_m(x_{mn})}{J'_m(0.6x_{mn})Y'_m(x_{mn}) - Y'_m(0.6x_{mn})J'_m(x_{mn})}, \quad (27)$$

式中的数值 0.6 是内外两圆的半径比值 (12.5/20.833). (27) 式的特征根 x_{mn} 中的值 m, n 定义为: m 为贝塞尔函数及导数的阶数, n 为方程(27)在 x 轴正向的第 n 个根, 与之对应的模式为 TE_{mn} 模. 相应波的截止频率与特征根 x_{mn} 的关系式为

$$\begin{aligned} x_{mn} &= K_{cmn}a \\ f_{cmn} &= \frac{K_{cmn}}{2\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \\ &= \frac{x_{mn}}{50\delta} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \end{aligned} \quad (28)$$

式中 f_{cmn} 为 TE_{mn} 波的截止频率, K_{cmn} 为 TE_{mn} 波在介质1中的截止波数. 对于轴对称 TE 波, m 值为 0, 依据 0 阶贝塞尔函数导数关系:

$$\begin{cases} J'_0(x) = -J_1(x), \\ Y'_0(x) = -Y_1(x). \end{cases} \quad (29)$$

将 (29) 式代入 (27) 式可得:

$$\frac{\epsilon_2 J_0 \left(0.6 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} x_{mn} \right)}{\epsilon_1 J_1 \left(0.6 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} x_{mn} \right)} = \frac{J_0(0.6x_{mn})Y_1(x_{mn}) - Y_0(0.6x_{mn})J_1(x_{mn})}{J_1'(0.6x_{mn})Y_1(x_{mn}) - Y_1'(0.6x_{mn})J_1(x_{mn})}. \quad (30)$$

求出的特征根结果如下:

$$x_{01} = 2.5204, x_{02} = 5.0088, x_{03} = 7.2160, x_{04} = 9.0912, x_{05} = 11.4025, x_{06} = 13.8212.$$

5.2 仿真结果

在得到上述 TE 模特征根的理论结果后, 进行图 6 的仿真验证过程. 现用空间步长 $\Delta x = \Delta y = \delta = 0.41667 \text{ mm}$, 时间步长 $\Delta t = 0.5\delta/c = 6.9492 \times 10^{-13} \text{ s}$ 进行仿真. 在圆心点 (0,0) 处添加 (31) 式所示的 z 轴方向高斯脉冲磁流源作为激励源, 同时选取介质 2 中的采样点 (-17, 0), (-12, 12) 和真空中的采样点 (47, 0) 和 (-33, -33) 进行采样. 运行 20000 步后对采样数据进行离散傅里叶变换. z 轴方向高斯脉冲磁流源公式如下:

$$E_s = \exp \left\{ - \left[\frac{(n-150)\Delta t}{15\Delta t} \right]^2 \right\}. \quad (31)$$

在仿真过程中, 对介质交面共形部分依次应用阶梯近似、Yu-Mittra 方法以及本文所提出的方法进行仿真计算. 首先求解波导轴对称 TE 阶截止频率的数值结果, 并根据 (28) 式将其换算成对应的特征根 x_{0n} , 并与 4.1 节求出的理论特征根的解析值进行比较, 比较结果见表 1.

从表 1 的对比可以看出, 对于应用较为广泛的 TE_{01} 模, 本文所提出的方法在计算结果上更接近理论求解值, 精度上比 Yu-Mittra 方法提高了 1.30%, 在高次轴对称模上, 本文提出的方法结果与 Yu-Mittra 方法相同, 均好于阶梯近似法.

其次, 对各向相异性进行比较, FDTD 算法本身会产生各向相异性, 但由于这里选取的空间步长 δ 值与波长 λ 比值在 TE_{01} 模式下为 $\delta/\lambda = 1/39.7$, 在上述 6 种模式中波长最小的 TE_{06} 模式下为 $\delta/\lambda = 1/7.24$, 比值都很小, 因此仿真过程中, FDTD 算法本身的各向相异性很小, 可以忽略不计. 而本

文仿真比较的各向相异性是由介质交面的各种共形处理方法所带来的, 因此, 可以通过比较介质交面的各种共形处理方法的各向相异性大小来反映各种方法的误差大小, 即各向相异性越小, 则误差越小.

表 1 各方法得到的特征根值与理论求解的特征根值比较

模式数	TE ₀₁	TE ₀₂	TE ₀₃	TE ₀₄	TE ₀₅	TE ₀₆
理论求解特征根	2.5204	5.0088	7.2160	9.0912	11.4025	13.8212
阶梯近似	2.4544	4.9087	7.0686	8.9339	11.1592	13.5154
Yu-Mittra 方法	2.4544	4.9415	7.1013	8.9339	11.2574	13.5808
本文的方法	2.4871	4.9415	7.1013	8.9339	11.2574	13.5808

图 7 为各模式下图 6 介质 2 中的采样点距原点距离为 17δ 处, 在坐标轴方向的点 (-17,0) 与偏转 45° 角方向的点 (-12, 12) 各向相异性比较结果图. 图 8 为介质 1(真空)中的采样点距原点距离为 47δ 处, 在坐标轴方向的点 (47, 0) 与偏转 45° 角方向的点 (-33, -33) 幅值的各向相异性比较结果图. 图中的纵坐标为相异百分比, 其定义为 45° 角采样点场分量幅值偏离 0° 角采样点场分量幅值的百分比:

$$w\% = \left| \frac{A(45^\circ) - A(0^\circ)}{A(0^\circ)} \right|, \quad (32)$$

(32) 式中的 $A(45^\circ)$ 为处在 45° 角的采样点在截止频率下的幅值, $A(0^\circ)$ 为处在坐标轴方向的采样点在截止频率下的幅值. 各向相异百分比的大小反映了不同算法的各向相异性的大小.

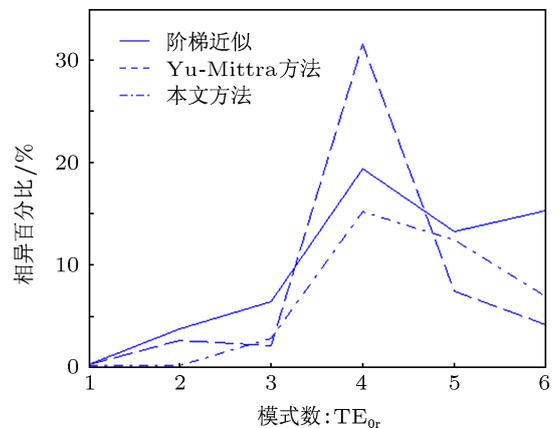


图 7 介质 2 中的相异百分比

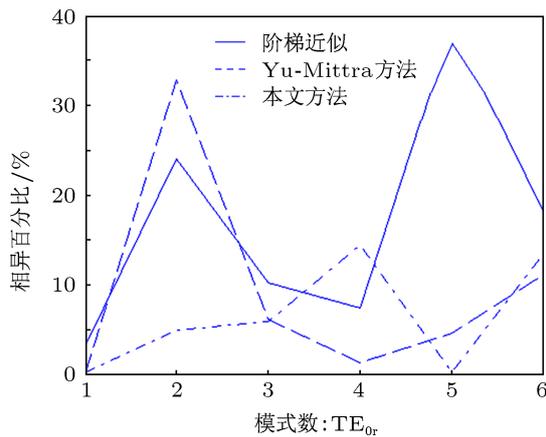


图8 介质1(真空)中的相异百分比

从图7与图8中不同模式下的相异百分比值可以看出,在介质2中,本文方法所求出的所有TE模式相异百分比均比阶梯近似少,而与Yu-Mittra方法比,除了 TE_{05} 和 TE_{06} 模式稍高于Yu-Mittra方法外,其他模式均比Yu-Mittra方法的相异百分比小.但Yu-Mittra方法在 TE_{04} 模上出现了约30%的

相异性.在介质1(真空)中本文的方法在抑制各向相异性方面总体好于其他两种方法,在 TE_{04} 模处,相异百分比值略高于其他两种方法,但低于15%.Yu-Mittra方法在 TE_{02} 模处达到了超过32%的相异性,阶梯近似法在 TE_{05} 模达到了超过35%的相异性.总体来看,本文的方法造成的平均相异百分比少,且不同模式的起伏不像其他两种方法那么明显.

6 结论

本文提出一种基于电场数值加权来处理跨介质元胞的共形新算法.该算法可以处理包括介质交界与电场分量平行情况的各种复杂界面情形.数值实例计算了各方法对介质填充圆波导的各TE模式截止频率计算与各向相异性比较.结果表明,与阶梯近似和介电常数加权平均方法相比,电场数值加权法的特征根结果更接近精确的特征根,抑制各向相异性的效果更明显.

- [1] Yee K S 1966 *IEEE Trans. Antenna. Propagat.* **14** 302
- [2] Liu S B, Zhu C X, Yuan N C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2804 (in Chinese) [刘少斌,朱传喜,袁乃昌 2005 物理学报 **54** 2804]
- [3] Liu S B, Yuan N C, Xu L J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4789 (in Chinese) [刘少斌,袁乃昌,徐利军 2005 物理学报 **54** 4789]
- [4] Wang G, Wen J H, Han X Y, Zhao H G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1943 (in Chinese) [王刚,温激鸿,韩小云,赵宏刚 2003 物理学报 **52** 1943]
- [5] Shibayama J, Muraki M, Takahashi R, Yamauchi J, Nakano H 2006 *IEEE/OSA J. Lightw. Tech.* **24** 2465
- [6] Zhang X Q, Wang J H, Li Z 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 051301 (in Chinese) [张雪芹,王均宏,李铮 2011 物理学报 **60** 051301]
- [7] Wei B, He Q, Li J, Ge D B, Guo L X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 104102 (in Chinese) [魏兵,何琼,李杰,葛德彪,郭立新 2011 物理学报 **60** 104102]
- [8] Zhuang F, Xiao S S, He J P, He S L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2167 (in Chinese) [庄飞,肖三水,何江平,何赛灵 2002 物理学报 **51** 2167]
- [9] Chu Q X, Ding H 2005 *Proceedings of the IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium* Washington, USA, July 3–8, 2005 p205
- [10] H Ding, Chu Q X 2005 *Proceedings of Asia-Pacific Microwave Conference 2005* Suzhou, China, December 4–7, 2005
- [11] H Ding, Chu Q X 2008 *Proceedings of Asia-Pacific Microwave Conference 2008* Macau, China, December 16–20, 2008 p1
- [12] Taflove A, Umashankar K R, Beker B, Harfoush F, Yee K S 1988 *IEEE Trans. Antenna. Propagat.* **36** 247
- [13] Jurgens T G, Taflove A, Umashankar K, Moore T G 1992 *IEEE Trans. Antenna. Propagat.* **40** 357
- [14] Fan G X, Liu Q H 2000 *IEEE Trans. Antenna. Propagat.* **8** 637
- [15] Zhang Y Q, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4573 (in Chinese) [张玉强,葛德彪 2009 物理学报 **58** 4573]
- [16] Zhang Y Q, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8243 (in Chinese) [张玉强,葛德彪 2009 物理学报 **58** 8243]
- [17] Ramadan O 2011 *IEEE Microw. Wireless Comp. Lett.* **21** 513
- [18] Kaneda N, Houshmand B, Itoh T 1997 *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **45** 1645
- [19] Dey S, Mittra R 1999 *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **47** 1737
- [20] Yu W, Mittra R 2001 *IEEE Microw. Guided Wave Lett.* **11** 25
- [21] Fujii M, Hofer W J R 2001 *IEEE Microw. Wireless Comp. Lett.* **11** 22
- [22] Fujii M, Hofer W J R 2001 *IEEE J. Quantum Electron.* **37** 1015
- [23] Fujii M, Lukashevich D, Sakagami I, Russer P 2003 *IEEE Microw. Wireless Comp. Lett.* **13** 469
- [24] Georgakopoulos S V, Birtcher C R, Balanis C A, Renaut R A 2003 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **45** 293
- [25] Zygiaris T T, Tsioukous T D 2004 *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **52** 1321
- [26] Wang J, Yin W Y, Liu P G, Liu Q H 2010 *IEEE Trans. Antenna. Propagat.* **58** 2946
- [27] Liu D C, Chang H C 2012 *IEEE Trans. Antenna. Propagat.* **60** 5259

A new conformal technique of inhomogeneous cells based on electric field strength weighted values*

Sun Ya-Xiu[†] Jiang Qing-Hui

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

(Received 26 March 2013; revised manuscript received 24 April 2013)

Abstract

In this paper, a new method of using the electric field numerical weight to process the inhomogeneous cells is proposed, which is to resolve the problems such as high errors and parallel direction excluded in the existing finite-difference time-domain method. Instead of deriving average dielectric constant, the new method weights the electric field strength, which is the true solving variables, according to the mean value theorem, and then the length of the integral path is multiplied by the weight. In the new method both the discontinuous effects of inhomogeneous Ampere cell and the ones of inhomogeneous Faraday cell are taken into account, so it is accurate, easy to implement, versatile, and applicable to any of the various positional relationships between the dielectric interface and the electric field strength variable. A numerical model of dielectric filled circular waveguide is used for the numerical calculation and simulation, in which the deviations of the characteristic roots in two-dimensional TE mode solved by different methods from the theoretical ones are compared, and the anisotropies of different methods are also compared. The numerical result shows that the characteristic roots solved by the presented method are closer to the theoretical ones and the anisotropy caused by the proposing method is lower, which proves that this method is more efficient to process the inhomogeneous cells.

Keywords: finite-difference time-domain, electric field numerical weighting method, two-dimensional TE mode, inhomogeneous cell

PACS: 41.20.Jb, 02.70.Bf, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.62.164101

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51209055), the Aeronautic Science Foundation, China (Grant No. 201207P6001), the Post Doctorate Science Foundation, China (Grant No. 20100480966), the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. HEUCFR1124), and the Laboratory of Science and Technology on Aircraft Control, China.

[†] Corresponding author. E-mail: sunyaxiu@hrbeu.edu.cn