

## 群论在对称结构电磁散射问题中的应用\*

徐常伟<sup>†</sup> 朱峰 刘丽娜 牛大鹏

(西南交通大学电气工程学院, 成都 610031)

(2012年12月25日收到; 2013年5月15日收到修改稿)

用 T 矩阵方法计算电磁散射问题时, 如果散射体的几何结构满足点群对称性, 即在群变换作用下保持不变, 可以利用群论找出散射体的几何对称性和 T 矩阵元的对称性之间的关系, 通过预知部分矩阵元的精确值以及它们之间的关系来达到数值求解过程中节约运行时间的目的.

**关键词:** 群论, 对称结构, 电磁散射, 对称算子

**PACS:** 41.20.Jb, 02.20.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.164102

## 1 引言

T 矩阵方法计算电磁散射问题的一个显著优点是散射体的对称特性可以表示为 T 矩阵的对称性. 已有文献阐述了在计算电磁学中引入对称关系可以节约运算时间. 文献 [1—3] 利用扩展广义镜像法处理具有对称特性的二维导体散射问题, 通过引入虚拟的对称源和反对称源, 将原问题的求解转化为只在其  $1/N$  ( $N$  为对称平面的个数) 的边界上进行, 最终实现了节省计算时间和内存的目的. 然而, 该方法不能系统地分析对称结构的散射问题, 对于三维散射问题也无能为力. 群论是系统地研究对称性的有效工具, 目前已广泛应用到物理的各个分支: 量子论、高能物理、相对论、原子与分子物理、晶体物理等 [4,5].

20 世纪 80 年代以后, 美国几位学者在将群论应用于对称结构电磁散射中的直接减元方面做了一些工作 [6,7], 但工作还不够系统, 局限于如何应用群论更为便捷地描述对称结构的散射问题, 没有涉及群的表示理论, 而且约化效果不明显. 最近几年, 欧洲有学者尝试将群的不可约表示理论应用到 T 矩阵的公式中 [8], 通过构造转换矩阵的方法将 T 矩阵分块对角化, 最终达到节约运行时间的目的. 但

是, 该方法的约化效果不理想, 以正六棱柱为例, 其运算时间仅仅缩短到原来的  $1/3.6$  左右.

本文将直接将群元作用到 T 矩阵公式中, 通过分析可知 T 矩阵中有部分矩阵元等于 0; T 矩阵中 0 以外的其他矩阵元之间有关系. 通过算例的对比, 在进行数值计算时该方法能节约大量的运行时间.

## 2 T 矩阵方法的基本公式

在三维电磁散射问题中, 入射场  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$ , 散射场  $\mathbf{E}^{\text{sca}}$  和散射体内部场  $\mathbf{E}^{\text{int}}$  满足  $\mathbf{E}^{\text{int}} = \mathbf{E}^{\text{inc}} + \mathbf{E}^{\text{sca}}$ . 它们可以展开成矢量球面波函数的级数形式:

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ a_{n,m}^{(1)} \mathbf{M}_{n,m}^{(1)}(k_0 \mathbf{r}) + a_{n,m}^{(2)} \mathbf{N}_{n,m}^{(1)}(k_0 \mathbf{r}) \right], \quad (1)$$

$$\mathbf{E}^{\text{sca}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ p_{n,m}^{(1)} \mathbf{M}_{n,m}^{(3)}(k_0 \mathbf{r}) + p_{n,m}^{(2)} \mathbf{N}_{n,m}^{(3)}(k_0 \mathbf{r}) \right], \quad (2)$$

$$\mathbf{E}^{\text{int}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ c_{n,m}^{(1)} \mathbf{M}_{n,m}^{(1)}(k \mathbf{r}) + c_{n,m}^{(2)} \mathbf{N}_{n,m}^{(1)}(k \mathbf{r}) \right], \quad (3)$$

这里的  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  以及  $k = 2\pi/\lambda$ , 分别为自由空间和介质散射体内的波数,  $\lambda$  为波长,  $\mathbf{M}^{(1)}$  和  $\mathbf{N}^{(1)}$

\* 国家自然科学基金(批准号: 60971041)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: love2008gan@163.com

在原点有意义,  $M^{(3)}$  和  $N^{(3)}$  满足辐射条件:

$$M_{n,m}^{(j)} = \nabla \times [\mathbf{r} \cdot \psi_{n,m}^{(j)}], \quad (4)$$

$$N_{n,m}^{(j)} = k^{-1} \cdot \nabla \times M_{n,m}^{(j)}, \quad (5)$$

$$\psi_{n,m}^{(j)} = \gamma_{n,m} P_n^{(m)}(\cos \theta) z_n^{(j)}(kr) \exp(im\phi). \quad (6)$$

由于在散射体表面  $\partial\Gamma$  上场的切向分量连续, 则有

$$\hat{\mathbf{n}}_+ \times [\mathbf{E}^{\text{inc}} + \mathbf{E}^{\text{sca}} - \mathbf{E}^{\text{int}}] |_{\partial\Gamma} = 0. \quad (7)$$

由于 (4) 式中的边界条件是线性的, 因此, 入射场、散射场和内部场的系数之间存在线性关系. 写成矩阵形式为

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}, \quad (8)$$

$$\mathbf{p} = -\text{Rg}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}, \quad (9)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}, \quad (10)$$

在 (9) 式中,  $\text{Rg}\mathbf{Q}$  是  $\mathbf{Q}$  的“正则表示”, 即  $\text{Rg}\mathbf{Q}$  将  $\mathbf{Q}$  中的所有球 Hankel 函数转化为第一类球 Bessel 函数. 这样

$$\mathbf{T} = -\text{Rg}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{-1}, \quad (11)$$

$$p_{n,m}^{(k)} = \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{k'=1}^2 T_{n,m,n',m'}^{(k,k')} a_{n',m'}^{(k')}, \quad (12)$$

由矩阵元  $T_{n,m,n',m'}^{(k,k')}$  构成的过渡矩阵  $\mathbf{T}$  就称为  $\mathbf{T}$  矩阵.  $\mathbf{T}$  矩阵只和散射体的尺寸、形状和材料属性有关 [9,10].

### 3 群算子对 $\mathbf{T}$ 矩阵元的作用

几何对称性可以用算子的形式表示为在转动、反射、转动 - 反射和反演等操作下不变. 所有的这些对称算子的集合构成一个群. 针对形状为正  $N$  棱柱 ( $N \geq 3$ ) 的散射体, 其对应的点群为  $D_{Nh}$  [11]. 该群有  $C_N$ ,  $\sigma_h$  和  $D$  三个生成元, 任一个群元可以由这三个生成元的组合得到. 这三个生成元分别对应的群变换如图 1 所示 (以五棱柱为例).

#### 3.1 转动算子 $C_N$

三维空间中任意转动可以分解为三个欧拉角  $\alpha$ ,  $\beta$  和  $\gamma$ . 在 Hilbert 空间, 可用一个幺正算子来表示转动, 即

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-i\alpha J_z) \exp(-i\beta J_y) \times \exp(-i\gamma J_z), \quad (13)$$

这里  $J_y$  和  $J_z$  是角动量算子的  $y$  和  $z$  分量 [12]. 由于算子“ $U$ ”和散度算子“ $\nabla \times$ ”互易, 因此对于 (4) 式 ((5) 式也同样满足),

$$UM_{n,m}^{(j)} = U\nabla \times [\mathbf{r} \cdot \psi_{n,m}^{(j)}] = \nabla \times [\mathbf{r} \cdot U\psi_{n,m}^{(j)}], \quad (14)$$

由 (14) 式可以看出, 标量函数 (6) 式的变换决定了其相应的矢量函数的变换. 函数 (6) 式中的角分量由球谐函数给出:

$$|n, m\rangle = Y_{n,m}(\theta, \phi) = \left[ \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^{(m)}(\cos \theta) \times \exp(im\phi), \quad (15)$$

在由 (15) 式中的球谐函数张成的空间中, 算子  $U$  的矩阵表示在量子数  $n$  下是一个对角矩阵, 对角元由 Wigner  $D$  函数给出:

$$D_{m',m}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle n, m' | U(\alpha, \beta, \gamma) | n, m \rangle = \exp(-im'\alpha) d_{m',m}^{(n)}(\beta) \exp(-im\gamma), \quad (16)$$

这里的 Wigner  $d$  函数定义为

$$d_{m',m}^{(n)}(\beta) = \langle n, m' | \exp(-iJ_y\beta) | n, m \rangle, \quad (17)$$

球谐函数的变换为

$$U(\alpha, \beta, \gamma) | n, m \rangle = \sum_{m'} D_{m',m}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) | n, m' \rangle. \quad (18)$$

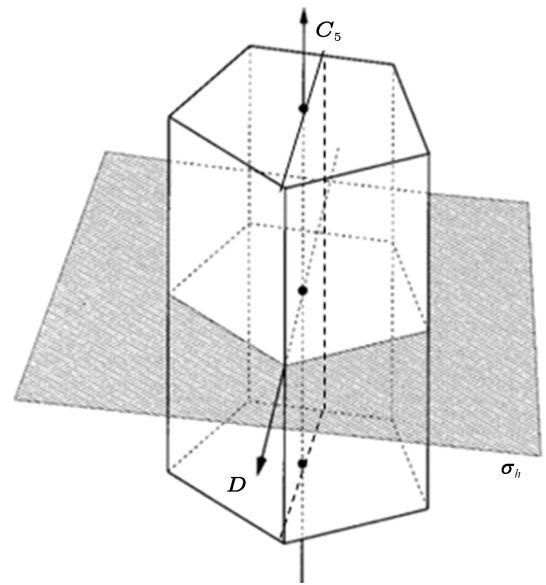


图 1  $D_{5h}$  群的生成元

因此, 在转动算子的作用下, T 矩阵的变换为

$$T_{n,m,n',m'}^{(k,k')}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1=-n}^n \sum_{m_2=-n'}^{n'} D_{m,m_1}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) T_{n,m_1,n',m_2}^{(k,k')}(0, 0, 0) \times (D^{-1})_{m_2,m'}^{(n')}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (19)$$

对于群  $D_{Nh}$ , 如果选择 Z 轴作为其  $N$  重旋转轴, 则在旋转算子  $C_N$  作用下, 相应的欧拉角为:  $\alpha = 2\pi/N$ ,  $\beta = \gamma = 0$ . 利用关系  $d_{m,m'}^{(n)}(0) = \delta_{m,m'}$ , 可将 (19) 式简化为

$$T_{n,m,n',m'}^{(k,k')}(2\pi/N, 0, 0) = \exp[-i2\pi(m-m')/N] T_{n,m,n',m'}^{(k,k')}(0, 0, 0). \quad (20)$$

由于群元  $C_N, C_N^2, C_N^3, \dots, C_N^{N-1}$  都是散射体的对称元, 那么

$$T_{n,m,n',m'}^{(k,k')}(2\pi l/N, 0, 0) = T_{n,m,n',m'}^{(k,k')}(0, 0, 0) \quad (l = 1, 2, \dots, N-1), \quad (21)$$

因此,  $(m-m')l/N$  必须是整数, 最后得到 T 矩阵结构的如下性质:

$$T_{n,m,n',m'}^{(k,k')} = 0 \quad (\forall |m-m'| \neq 0, N, 2N, 3N, \dots). \quad (22)$$

### 3.2 反射算子 $\sigma_h$

如图 2 所示,  $x$ - $y$  平面为反射面. 在球坐标系中, 位置矢量  $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$  在反射算子  $\sigma_h$  作用下变换成  $\mathbf{r}' = (r, \pi - \theta, \phi)$ . 矢量函数  $\mathbf{A}$  定义在由  $\hat{r}, \hat{\theta}$  和  $\hat{\phi}$  这三个局部单位矢量构成的坐标系上. 在算子  $\sigma_h$  作用下有

$$\begin{bmatrix} A_r(r, \theta, \phi) \\ A_\theta(r, \theta, \phi) \\ A_\phi(r, \theta, \phi) \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_h} \begin{bmatrix} A_r(r, \pi - \theta, \phi) \\ -A_\theta(r, \pi - \theta, \phi) \\ A_\phi(r, \pi - \theta, \phi) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

将算子  $\sigma_h$  作用在 (4) 式和 (5) 式, 则  $M_{n,m}^{(j)}$  和  $N_{n,m}^{(j)}$  变换成

$$M_{n,m}^{(j)} \xrightarrow{\sigma_h} -(-1)^{n+m} M_{n,m}^{(j)}, \quad (24)$$

$$N_{n,m}^{(j)} \xrightarrow{\sigma_h} (-1)^{n+m} N_{n,m}^{(j)}. \quad (25)$$

将 (24) 和 (25) 式代入到入射场  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  的级数表示 (1) 式中, 可得

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} \xrightarrow{\sigma_h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^{n+m} \left[ -a_{n,m}^{(1)} \mathbf{M}_{n,m}^{(1)}(k_0 \mathbf{r}) \right.$$

$$\left. + a_{n,m}^{(2)} \mathbf{N}_{n,m}^{(1)}(k_0 \mathbf{r}) \right], \quad (26)$$

散射场和内场的变换与入射场相同. 对比 (1) 和 (26) 式发现

$$a_{n,m}^{(k)} \xrightarrow{\sigma_h} (-1)^{n+m+k} a_{n,m}^{(k)}, \quad (27)$$

写成矩阵形式为  $\mathbf{a} \xrightarrow{\sigma_h} \Sigma \cdot \mathbf{a}$ , 这里  $\Sigma$  是抽象群元  $\sigma_h$  的矩阵表示, 而且是一个对角矩阵, 矩阵元为

$$(\Sigma)_{n,m,n',m'}^{k,k'} = (-1)^{n+m+k} \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \delta_{k,k'}, \quad (28)$$

T 矩阵在算子  $\sigma_h$  作用下的变换为

$$\mathbf{T} \xrightarrow{\sigma_h} \Sigma \cdot \mathbf{T} \cdot \Sigma^{-1}, \quad (29)$$

矩阵元为

$$T_{n,m,n',m'}^{(k,k')} \xrightarrow{\sigma_h} (-1)^{n+n'+m+m'+k+k'} T_{n,m,n',m'}^{(k,k')}. \quad (30)$$

因此, 根据反射对称性  $\sigma_h$  可以得到 T 矩阵结构的第二个性质:

$$T_{n,n',m,m'}^{(k,k')} = 0, \quad \forall n+n'+m+m'+k+k' \text{ 是奇数}. \quad (31)$$

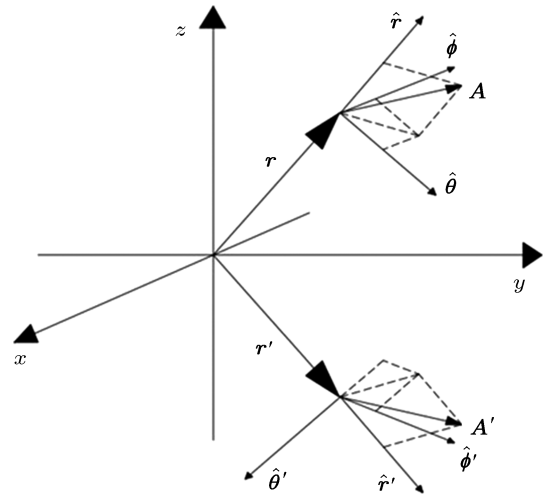


图 2 矢量函数  $\mathbf{A}$  关于  $x$ - $y$  平面的反射变换

### 3.3 反射算子 $D$

在图 1 中, 由通过正五棱柱的中心轴线和上/下底面的对称线构成的平面是该结构的  $D$  反射面. 如果将图 2 中的  $y$ - $z$  面作为  $D$  反射对称面, 则与算子  $\sigma_h$  类似, 可以得到

$$M_{n,m}^{(j)} \xrightarrow{D} -M_{n,-m}^{(j)}, \quad (32)$$

$$N_{n,m}^{(j)} \xrightarrow{D} N_{n,-m}^{(j)}, \quad (33)$$

$$T_{n,-m,n',-m'}^{(k,k')} = (-1)^{k+k'} T_{n,m,n',m'}^{(k,k')}. \quad (34)$$

如果以图 2 中的  $x-z$  面作为  $D$  反射对称面, 则能得到

$$M_{n,m}^{(j)} \xrightarrow{D} -(-1)^m M_{n,-m}^{(j)}, \quad (35)$$

$$N_{n,m}^{(j)} \xrightarrow{D} (-1)^m N_{n,-m}^{(j)}, \quad (36)$$

$$T_{n,-m,n',-m'}^{(k,k')} = (-1)^{m+m'+k+k'} T_{n,m,n',m'}^{(k,k')}. \quad (37)$$

(34) 式或 (37) 式就是  $T$  矩阵结构的第三个性质.

对于上面的这三个  $T$  矩阵的性质,  $Q$  矩阵和  $RgQ$  矩阵也同样具备.

### 4 原理分析

由 (22) 和 (31) 式可以看出, 对于满足  $D_{Nh}$  对称性的散射体, 其  $T$  矩阵中有一部分矩阵元等于 0, 如果不考虑该对称性关系, 等于 0 的矩阵元原本是数值积分后得到的近似为 0 的多位小数, 而且这些数值积分的计算很耗时; 由 (34) 或 (37) 式可以看出, 有些  $T$  矩阵元相等或者之间差一个负号, 这样在数值计算时, 就能利用该关系减少很多计算量. 因此, 综合考虑这些对称关系后, 在用  $T$  矩阵方法计算电磁散射问题时就能节约大量的运算时间.

把应用对称性和不用对称性这两种方法进行比较, 如表 1 和表 2 所示.

表 1 正三棱柱运算时间比较 (单位: s)

对称性	$RgQ \cdot Q$	$Q^{-1}$	$T$	总
无	1127	33	40	1200
$C_3$	340	10	4	354
$\sigma_h$	260	5	2	267
$D$	210	10	2	222
$D_{3h}$	131	5	1	137

表 2 正五棱柱运算时间比较 (单位: s)

对称性	$RgQ \cdot Q$	$Q^{-1}$	$T$	总
无	2431	57	73	2561
$C_5$	504	11	4	519
$\sigma_h$	355	6	2	363
$D$	262	10	2	264
$D_{5h}$	187	6	1	194

表 1 中计算的正三棱柱尺寸为  $a = h = 3\lambda$ , 表 2 中计算的正五棱柱尺寸为  $a = h = 2.5\lambda$ . 在表 1 和表 2 中, “无” 表示不考虑对称性的运算时间,  $C_3$  (或  $C_5$ ),  $\sigma_h$  和  $D$  表示仅考虑这一种对称性的运算时间,  $D_{3h}$  (或  $D_{5h}$ ) 表示综合考虑三种对称性的运算时间.

### 5 结论

该方法利用群论将  $T$  矩阵的矩阵元进行优化, 从而大大节约了运算时间. 这种方法对具有对称结构的光散射、声散射、多体结构电磁散射、分层材料电磁散射等问题也同样适用.

[1] Zhu F, Ren L 1997 *Sci. China Ser. E* **27** 249 (in Chinese) [朱峰, 任朗 1997 中国科学 E 辑 **27** 249]  
 [2] Zhu F, Ren L 1997 *Chin. J. Comput. Phys.* **14** 217 (in Chinese) [朱峰, 任朗 1997 计算物理 **14** 217]  
 [3] Zhu F, Ren L, Zhang S M 1997 *J. Microwaves* **13** 134 (in Chinese) [朱峰, 任朗, 张善谋 1997 微波学报 **13** 134]  
 [4] Liu X L, Zhu M Z, Lu L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220301 (in Chinese) [刘祥龙, 朱满座, 路璐 2012 物理学报 **61** 220301]  
 [5] Zhang H T, Gong M L, Wang D S, Li W, Zhao D Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2060 (in Chinese) [张海涛, 巩马理, 王东生, 李伟, 赵达尊 2004 物理学报 **53** 2060]  
 [6] Cohoon D K 1980 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **28** 104  
 [7] Stiles J M, Apte A V 2002 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **40** 1802  
 [8] Kahnert M 2005 *J. Opt. Soc. A* **22** 1187  
 [9] Ganesh M, Hawkins S C 2010 *J. Comput. Appl. Math.* **234** 1702  
 [10] Waterman P C 1965 *Proc. IEEE* **53** 805  
 [11] Ma Z Q 1998 *Group Theory in Physics* (Beijing: Science Press) p280 (in Chinese) [马中骥 1998 物理学中的群论 (北京: 科学出版社) 第 280 页]  
 [12] Varshalovich D A 1988 *Quantum Theory of Angular Momentum* (Singapore: World Scientific) p127

# Application of group theory in the problem of electromagnetic scattering of symmetry structures\*

Xu Chang-Wei<sup>†</sup> Zhu Feng Liu Li-Na Niu Da-Peng

(*Department of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

(Received 25 December 2012; revised manuscript received 15 May 2013)

## Abstract

When solving electromagnetic scattering problem with T-matrix method, if the scattering obstacles have point-group symmetry, i.e. remaining unchanged under the group transformation, we can obtain the relationship between geometric symmetry and symmetry of elements in T matrix by the usage of group theory. In this way we can foresee the exact values of some matrix elements, as well as relations between elements, which would save numerous running time in numerical calculation.

**Keywords:** group theory, symmetric structure, electromagnetic scattering, symmetric operator

**PACS:** 41.20.Jb, 02.20.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.164102

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60971041).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: love2008gan@163.com