非保守动力学系统 Noether 对称性的摄动与绝热不变量*

张毅†

(苏州科技学院土木工程学院, 苏州 215009)

(2013年4月8日收到; 2013年5月1日收到修改稿)

基于非保守系统的 El-Nabulsi 动力学模型, 研究了非保守动力学系统 Noether 对称性的摄动与绝热不变量问题. 首先, 引入 El-Nabulsi 在分数阶微积分框架下基于 Riemann-Liouville 分数阶积分提出的类分数阶变分问题, 列出非保守系统的 Euler-Lagrange 方程; 其次, 给出了 Noether 准对称变换的定义和判据, 建立了 Noether 对称性与不变量之间的关系, 得到了精确不变量; 最后, 提出并研究了该系统受小扰动作用后 Noether 对称性的摄动与绝热不变量问题, 证明了绝热不变量存在的条件及形式, 并举例证明结果的应用.

关键词: 非保守系统, El-Nabulsi 动力学模型, 对称性摄动, 绝热不变量

PACS: 45.10.Hj, 45.20.Jj, 02.30.Xx **DOI:** 10.7498/aps.62.164501

1 引 言

自然界中几乎所有可观测到的物理现象和动力学过程都是非保守的. 1996 年, Riewe[1,2] 在研究非保守系统的动力学建模问题时, 应用分数阶微积分将非保守力项纳入 Lagrange 函数和 Hamilton 函数之中, 发展了非保守系统的 Lagrange 力学和 Hamilton 力学. 此后, 关于分数阶变分问题和分数阶微积分对非保守力学系统的应用研究引起了高度重视并取得了重要进展 [3−20]. 2005 年, El-Nabulsi[21] 针对分数阶微积分框架下的非保守动力学建模提出了一种新的方法, 即基于 Riemann-Liouville 分数阶积分的类分数阶变分方法, 或称之为非保守系统的 El-Nabulsi 动力学模型. 该方法所得到的 Euler-Lagrange 方程形式简单且类似于经典的方程, 其新颖之处在于存在一个作用在系统上的广义分数阶外力, 且方程中不出现分数阶导数, 而仅仅依赖于分数阶积分的阶 α [22−25]. Frederico 和 Torres[26] 基于 El-Nabulsi 模型给出非保守系统的 Noether 定理, 并推广到 Lagrange 函数含有高阶导数情形 [27], 但是由于文中关于 Noether 准对称性的概念有误, 因此所得到的 Noether 定理是不正确的[28].

非保守力学系统在小扰动作用下对称性的改变及其不变量与系统的可积性之间有着密切关系[29], 因此研究非保守系统的对称性摄动与绝热不变量具有重要意义. 经典的绝热不变量是指在系统的某参数缓慢变化时, 相对该参数的变化而改变更慢的某一物理量. 绝热不变量又称缓渐不变量或浸渐不变量 [29,30]. 实际上, 参数缓慢变化等同于小扰动的作用. 关于约束力学系统对称性的摄动与绝热不变量的研究已取得了一些重要成果 [31−43]. 本文针对非保守系统的 El-Nabulsi 动力学模型, 研究非保守动力学系统 Noether 对称性的摄动与绝热不变量问题.

2 非保守系统的 El-Nabulsi 动力学模型

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_k(k=1,2,\cdots,n)$ 来确定, 系统的 Lagrange 函数为

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972151, 11272227) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhy@mail.usts.edu.cn

$L=L(\tau,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$. 按照 El-Nabulsi 提出的非保守系统动力学建模的类分数阶变分方法, 基于 Riemann-Liouville 分数阶积分的变分问题定义为 [21]:

求积分泛函

$$S=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b L\big(\tau,q_k(\tau),\dot{q}_k(\tau)\big)(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau, \quad (1)$$

在固定边界条件

$$q_k(a)=q_{k,a},\ \ q_k(b)=q_{k,b}\ \ (k=1,2,\cdots,n) \quad (2)$$

下的极值问题, 其中 $\dot{q}_k=\mathrm{d}q_k/\mathrm{d}\tau$, Γ 是 Euler-Gamma 函数, $0<\alpha\leqslant 1$, τ 为固有时间, t 是观察时间, $\tau\neq t$, Lagrange 函数 L 是其变量的 C^2 类函数.

上述变分问题称为类分数阶变分问题, 或 El-Nabulsi 变分问题. 泛函 (1) 可称为 El-Nabulsi-Hamilton 作用量. 当 $\alpha=1$ 时, 上述问题成为经典保守系统的变分问题.

如果 $q_k(\tau)$ 是 El-Nabulsi 变分问题的极值, 则满足如下的 Euler-Lagrange 方程 [21]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=-\frac{1-\alpha}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\quad(k=1,2,\cdots,n), \quad (3)$$

方程 (3) 是基于 El-Nabulsi 动力学模型的非保守系统的运动方程. 当 $\alpha=1$ 时, 方程 (3) 成为经典保守系统的 Euler-Lagrange 方程.

3 Noether 准对称变换与精确不变量

引进时间和广义坐标的无限小变换:

$$\begin{aligned}&\bar{\tau}=\tau+\Delta\tau,\\&\bar{q}_k(\bar{\tau})=q_k(\tau)+\Delta q_k\ \ (k=1,2,\cdots,n),\end{aligned} \quad (4)$$

其展开式为

$$\begin{aligned}&\bar{\tau}=\tau+\varepsilon\xi_0^0(\tau,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\&\bar{q}_k(\bar{\tau})=q_k(\tau)+\varepsilon\xi_k^0(\tau,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\\&\quad(k=1,2,\cdots,n),\end{aligned} \quad (5)$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0^0, ξ_k^0 为无限小变换的生成元或生成函数. 在 (5) 式的作用下, (1) 式变为

$$S(\bar{\gamma})=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}L(\bar{\tau},\bar{q}_k(\bar{\tau}),\dot{\bar{q}}_k(\bar{\tau}))\times(t-\bar{\tau})^{\alpha-1}\mathrm{d}\bar{\tau}, \quad (6)$$

其中 $\bar{\gamma}$ 为邻近曲线, 则变换前后

$$\Delta S=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\bigg[\frac{\partial L}{\partial\tau}\Delta\tau+\frac{\partial L}{\partial q_k}\Delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\Delta\dot{q}_k+L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau+\frac{1-\alpha}{t-\tau}\Delta\tau\right)\bigg](t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau. \quad (7)$$

注意到关系

$$\begin{aligned}&\delta q_k=\Delta q_k-\dot{q}_k\Delta\tau,\\&\Delta\dot{q}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta q_k-\dot{q}_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau,\end{aligned} \quad (8)$$

(7) 式可表示为

$$\begin{aligned}\Delta S=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\varepsilon\bigg\{&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bigg[\left(L\xi_0^0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\left(\xi_k^0-\dot{q}_k\xi_0^0\right)\right)\\&\times(t-\tau)^{\alpha-1}\bigg]+\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{1-\alpha}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\\&\times\left(\xi_k^0-\dot{q}_k\xi_0^0\right)(t-\tau)^{\alpha-1}\bigg\}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \quad (9)$$

定义 1 如果 El-Nabulsi-Hamilton 作用量 (1) 式是无限小变换的准不变量, 即对每一个无限小变换 (4) 式, 始终成立:

$$\Delta S=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G)\,\mathrm{d}\tau, \quad (10)$$

其中 $\Delta G=\varepsilon G^0$, $G^0=G^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 称为规范函数, 则称变换 (4) 式为 Noether 准对称变换.

由定义 1 和 (7) 式, 我们有如下定理.

定理 1 对于无限小变换 (4) 式, 如果满足

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial\tau}\Delta\tau+\frac{\partial L}{\partial q_k}\Delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\Delta\dot{q}_k\\&+L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau+\frac{1-\alpha}{t-\tau}\Delta\tau\right)\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G)(t-\tau)^{1-\alpha},\end{aligned} \quad (11)$$

则变换 (4) 式为非保守力学系统 (3) 式的 Noether 准对称变换.

条件 (11) 式也可表为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial\tau}\xi_0^0+\frac{\partial L}{\partial q_k}\xi_k^0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\left(\dot{\xi}_k^0-\dot{q}_k\dot{\xi}_0^0\right)\\&+L\left(\dot{\xi}_0^0+\frac{1-\alpha}{t-\tau}\xi_0^0\right)\\&=-\dot{G}^0(t-\tau)^{1-\alpha},\end{aligned} \quad (12)$$

(12) 式可称为 El-Nabulsi-Noether 等式.

于是有:

定理 2 如果无限小变换的生成元 ξ_0^0, ξ_k^0 满足 El-Nabulsi-Noether 等式 (12) 式, 则未受扰的非保守力学系统 (3) 式的 Noether 对称性直接导致守恒量

$$\begin{aligned}I_0=&\left[L\xi_0^0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\left(\xi_k^0-\dot{q}_k\xi_0^0\right)\right](t-\tau)^{\alpha-1}+G^0\\&=\mathrm{const.}\end{aligned} \quad (13)$$

守恒量 (13) 式是精确不变量, 它揭示了未受扰非保守力学系统 (3) 式的 Noether 对称性与不变量之间的关系. 当 $\alpha=1$ 时, 守恒量 (13) 式成为经典的 Noether 守恒量.

4 Noether 对称性的摄动与绝热不变量

本节研究非保守力学系统 (3) 式在受到小扰动作用后, 对称性的摄动与相应的不变量问题. 引入绝热不变量的概念.

定义 2[30] 若 $I_z(\tau,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},v)$ 是力学系统的一个含有小参数 v 的最高次幂为 z 的物理量, 其对时间 τ 的一阶导数正比于 v^{z+1}, 则称 I_z 为力学系统的 z 阶绝热不变量.

假设非保守力学系统 (3) 式受到小扰动 vQ_k 的作用, 则该系统的运动正轨满足运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=-\frac{1-\alpha}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}+vQ_k \quad (k=1,2,\cdots,n), \tag{14}$$

在小扰动 vQ_k 的作用下, 系统原有的对称性与不变量相应地会发生改变, 假设扰动后的无限小生成元 ξ_0,ξ_k 是在系统未受扰时的对称变换生成元基础上发生的小摄动, 有

$$\begin{aligned}\xi_0&=\xi_0^0+v\xi_0^1+v^2\xi_0^2+\cdots,\\ \xi_k&=\xi_k^0+v\xi_k^1+v^2\xi_k^2+\cdots,\end{aligned} \tag{15}$$

相应的规范函数 G 同时也发生了小摄动, 即

$$G=G^0+vG^1+v^2G^2+\cdots. \tag{16}$$

则有如下定理.

定理 3 对于受到小扰动 vQ_k 作用的非保守力学系统 (3) 式, 如果存在规范函数 $G^j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, 使得无限小变换的生成元 $\xi_0^j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\xi_k^j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial \tau}\xi_0^j+\frac{\partial L}{\partial q_k}\xi_k^j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\dot{\xi}_k^j-\dot{q}_k\dot{\xi}_0^j\right)\\ &+L\left(\dot{\xi}_0^j+\frac{1-\alpha}{t-\tau}\xi_0^j\right)+Q_k\left(\xi_k^{j-1}-\dot{q}_k\xi_0^{j-1}\right)\\ =&-\dot{G}^j(t-\tau)^{1-\alpha}\quad (j=0,1,2,\cdots),\end{aligned} \tag{17}$$

其中, $j=0$ 时, 约定 $\xi_0^{-1}=\xi_k^{-1}=0$, 则

$$\begin{aligned}I_z=\sum_{j=0}^{z}v^j\bigg\{&\left[L\xi_0^j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\xi_k^j-\dot{q}_k\xi_0^j\right)\right]\\ &\times(t-\tau)^{\alpha-1}+G^j\bigg\}\end{aligned} \tag{18}$$

是该系统的一个 z 阶绝热不变量.

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I_z}{\mathrm{d}\tau}=&\sum_{j=0}^{z}v^j\bigg\{\Big[\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}\xi_0^j+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\xi_k^j-\dot{q}_k\xi_0^j\right)+L\dot{\xi}_0^j\\ &+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\dot{\xi}_k^j-\dot{q}_k\dot{\xi}_0^j-\ddot{q}_k\xi_0^j\right)\Big](t-\tau)^{\alpha-1}\\ &+\dot{G}^j+\left[L\xi_0^j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\xi_k^j-\dot{q}_k\xi_0^j\right)\right]\\ &\times(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha-2}\bigg\}\\ =&\sum_{j=0}^{z}v^j\Big[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}+\frac{1-\alpha}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\\ &\times\left(\xi_k^j-\dot{q}_k\xi_0^j\right)+\frac{\partial L}{\partial \tau}\xi_0^j+\frac{\partial L}{\partial q_k}\xi_k^j\\ &+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\dot{\xi}_k^j-\dot{q}_k\dot{\xi}_0^j\right)+L\Big(\dot{\xi}_0^j+\frac{1-\alpha}{t-\tau}\xi_0^j\Big)\\ &+\dot{G}^j(t-\tau)^{1-\alpha}\Big](t-\tau)^{\alpha-1}\\ =&\sum_{j=0}^{z}v^j\Big[vQ_k\left(\xi_k^j-\dot{q}_k\xi_0^j\right)\\ &-Q_k\left(\xi_k^{j-1}-\dot{q}_k\xi_0^{j-1}\right)\Big](t-\tau)^{\alpha-1}\\ =&v^{z+1}Q_k\left(\xi_k^z-\dot{q}_k\xi_0^z\right)(t-\tau)^{\alpha-1},\end{aligned} \tag{19}$$

因此, I_z 为非保守力学系统 (3) 式的一个 z 阶绝热不变量. 证毕.

从 (19) 式可以推出, 如果 $Q_k=0$, 则 $\frac{\mathrm{d}I_z}{\mathrm{d}\tau}=0$, 因此, 非保守力学系统 (3) 式的精确不变量是一个特殊的绝热不变量, 反之不然.

如果 $\alpha=1$, 则定理 3 给出完整保守系统的绝热不变量.

5 算 例

设非保守力学系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)+\mu\left(q_1^2+q_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

其中 $q_1^2+q_2^2\neq 0$, 试研究系统的类分数阶 Noether 对称性的摄动与绝热不变量.

El-Nabulsi-Noether 等式 (12) 给出:

$$\begin{aligned}&-\mu\left(q_1^2+q_2^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(q_1\xi_1^0+q_2\xi_2^0\right)+\dot{q}_1\left(\dot{\xi}_1^0-\dot{q}_1\dot{\xi}_0^0\right)\\ &+\dot{q}_2\left(\dot{\xi}_2^0-\dot{q}_2\dot{\xi}_0^0\right)+L\left(\dot{\xi}_0^0+\frac{1-\alpha}{t-\tau}\xi_0^0\right)\\ =&-\dot{G}^0(t-\tau)^{1-\alpha},\end{aligned} \tag{21}$$

方程 (21) 有解:

$$\xi_0^0=0,\ \ \xi_1^0=-q_2,\ \ \xi_2^0=q_1,\ \ G^0=0. \tag{22}$$

由定理 2, 系统有如下精确不变量:

$$I_0 = (q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2)(t-\tau)^{\alpha-1} = \text{const.} \tag{23}$$

下面研究系统的绝热不变量. 假设系统受到的小扰动为

$$\begin{aligned} \nu Q_1 &= \nu\mu\left(q_1^2+q_2^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \\ \nu Q_2 &= \nu\mu\left(q_1^2+q_2^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned} \tag{24}$$

条件 (17) 式给出:

$$\begin{aligned} &-\mu\left(q_1^2+q_2^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(q_1\xi_1^1+q_2\xi_2^1\right)+\dot{q}_1\left(\dot{\xi}_1^1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0^1\right) \\ &+\dot{q}_2\left(\dot{\xi}_2^1-\dot{q}_2\dot{\xi}_0^1\right)+L\left(\dot{\xi}_0^1+\frac{1-\alpha}{t-\tau}\xi_0^1\right) \\ &+Q_1\left(\xi_1^0-\dot{q}_1\xi_0^0\right)+Q_2\left(\xi_2^0-\dot{q}_2\xi_0^0\right) \\ =&-\dot{G}^1(t-\tau)^{1-\alpha}, \end{aligned} \tag{25}$$

由 (22) 式, (25) 式有解:

$$\xi_0^1=0,\ \ \xi_1^1=1,\ \ \xi_2^1=-1,\ \ G^1=0. \tag{26}$$

由定理 3, 系统有如下一阶绝热不变量:

$$\begin{aligned} I_1 = &\,(q_1\dot{q}_2-\dot{q}_1q_2)(t-\tau)^{\alpha-1} \\ &+\nu(\dot{q}_1-\dot{q}_2)(t-\tau)^{\alpha-1}, \end{aligned} \tag{27}$$

如果 $\alpha=1$, 则给出经典 Kepler 问题的一阶绝热不变量.

进一步可求得系统的更高阶绝热不变量.

6 结 论

对称性是力学系统的重要而又普遍的性质, 小扰动作用下对称性的摄动及其不变量与力学系统的可积性之间有着密切的关系. 绝热不变量来自于系统的本质特征, 它不仅仅只是 Hamilton 系统的产物 [31]. 本文提出并研究了 El-Nabulsi 动力学模型下非保守系统 Noether 对称性的摄动与绝热不变量问题, 建立了 Noether 准对称变换的定义和判据, 给出了非保守力学系统的精确不变量, 研究了高阶绝热不变量的构造方法, 揭示了非保守系统的高阶绝热不变量与无穷小对称变换的摄动之间的关系. 结果表明: 完整保守系统 Noether 对称性摄动导致的绝热不变量是其特例, El-Nabulsi 动力学模型是保守系统和非保守系统的统一. 本文方法和结果可进一步推广应用于各类约束力学系统, 如非完整约束系统、Birkhoff 系统等.

[1] Riewe F 1996 *Phys. Rev.* E **53** 1890
[2] Riewe F 1997 *Phys. Rev.* E **55** 3581
[3] Agrawal O P 2001 *J. Appl. Mech.* **68** 339
[4] Klimek M 2001 *Czech. J. Phys.* **51** 1348
[5] Klimek M 2002 *Czech. J. Phys.* **52** 1247
[6] Baleanu D, Avkar T 2004 *Nuovo Cimento* B **119** 73
[7] Rabei E M, Alhalholy T S, Taani A A 2004 *Turk. J. Phys.* **28** 213
[8] Narakari Achar B N, Hanneken J W, Clarke T 2004 *Physica* A **339** 311
[9] Baleanu D 2006 *Czech. J. Phys.* **56** 1087
[10] Tarasov V E 2006 *J. Phys.* A **39** 8409
[11] Baleanu D, Muslih S I 2008 *J. Vib. Contr.* **14** 1301
[12] Baleanu D, Trujillo J J 2009 *Phys. Scr.* **80** 055101
[13] Atanacković T M, Konjik S, Pilipović S 2008 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **41** 095201
[14] Wang Z H, Hu H Y 2009 *Sci. China* G **39** 1495 (in Chinese) [王在华, 胡海岩 2009 中国科学 G 辑 **39** 1495]
[15] El-Nabulsi R A 2011 *Centr. Eur. J. Phys.* **9** 250
[16] Cresson J, Inizan P 2009 *Phys. Scr.* **T136** 014007
[17] Almeida R, Malinowska A B, Torres D F M 2010 *J. Math. Phys.* **51** 033503
[18] Zhou S, Fu H, Fu J L 2011 *Sci. China*: *Phys. Mech. Astron.* **54** 1847
[19] Golmankhaneh A K, Golmankhaneh A K, Baleanu D, Baleanu M C 2010 *Int. J. Theor. Phys.* **49** 365
[20] Shen Y J, Yang S P, Xing H J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110505 (in Chinese) [申永军, 杨绍普, 邢海军 2012 物理学报 **61** 110505]
[21] EI-Nabulsi A R 2005 *Fizika* A **14** 289
[22] El-Nabulsi A R, Torres D F M 2008 *J. Math. Phys.* **49** 053521
[23] El-Nabulsi A R 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **42** 52
[24] El-Nabulsi A R 2011 *Centr. Eur. J. Phys.* **9** 250
[25] El-Nabulsi A R 2011 *Appl. Math. Comput.* **217** 9492
[26] Frederico G S F, Torres D F M 2006 *Int. J. Appl. Math.* **19** 97
[27] Frederico G S F, Torres D F M 2007 *Int. J. Ecol. Econ. Stat.* **9(F07)** 74
[28] Zhang Y, Zhou Y 2013 *Nonlinear Dyn.* DOI: 10.1007/s11071-013-0831-x
[29] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p728 (in Chinese) [梅凤翔, 刘端, 罗勇 1991 高等分析力学 (北京: 北京理工大学出版社) 第 728 页]
[30] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p164 (in Chinese) [赵跃宇, 梅凤翔 1999 力学系统的对称性与守恒量 (北京: 科学出版社) 第 164 页]
[31] Zhao Y Y, Mei F X 1996 *Acta Mech. Sin.* **28** 207 (in Chinese) [赵跃宇, 梅凤翔 1996 力学学报 **28** 207]
[32] Chen X W, Shang M, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 997
[33] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1666 (in Chinese) [张毅 2002 物理学报 **51** 1666]
[34] Chen X W, Wang X M, Wang M Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 2003
[35] Chen X W, Li Y M 2005 *Chin. Phys.* **14** 663
[36] Zhang Y, Fan C X, Mei F X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3237 (in Chinese) [张毅, 范存新, 梅凤翔 2006 物理学报 **55** 3237]
[37] Zhang Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3833 (in Chinese) [张毅 2006 物理学报 **55** 3833]
[38] Luo S K, Guo Y X 2007 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **47** 25
[39] Zhang Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 1935

[40] Zhang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1855 (in Chinese) [张毅 2007 物理学报 **56** 1855]

[41] Zhang Y, Fan C X 2007 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **47** 607

[42] Ding N, Fang J H, Wang P, Zhang X N 2008 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **49** 57

[43] Zhang M J, Fang J H, Lu K, Pang T, Lin P 2009 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **51** 961

Perturbation to Noether symmetries and adiabatic invariants for nonconservative dynamic systems*

Zhang Yi†

(*College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou* 215009, *China*)

(Received 8 April 2013; revised manuscript received 1 May 2013)

Abstract

The problem of perturbation to Noether symmetry and adiabatic invariant for a nonconservative dynamic system is studied under a dynamic model presented by El-Nabulsi. First of all, the fractional action-like variational problem proposed by El-Nabulsi under the framework of the fractional calculus and based on the definition of the Riemann-Liouville fractional integral is introduced, and the Euler-Lagrange equations of the nonconservative system are given. Secondly, the definition and criterion of the Noether quasi-symmetric transformation are given, the relationship between the Noether symmetry and the invariant is established, and the exact invariant is obtained. Finally, the perturbation to the Noether symmetry of the system after the action of a small disturbance and corresponding adiabatic invariant are proposed and studied, the conditions for the existence of adiabatic invariant and the formulation are given. An example is given to illustrate the application of results.

Keywords: nonconservative system, El-Nabulsi dynamic model, perturbation of Noether symmetry, adiabatic invariant

PACS: 45.10.Hj, 45.20.Jj, 02.30.Xx

DOI: 10.7498/aps.62.164501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972151, 11272227).

† Corresponding author. E-mail: zhy@mail.usts.edu.cn