

## 一种双正交心音小波的构造方法\*

成谢锋 张正†

(南京邮电大学电子科学与工程学院, 南京 210003)

(2013年4月12日收到; 2013年4月26日收到修改稿)

为了提高小波分析在心音信号处理中的性能, 在分析小波构造理论的基础上, 构造了一种专门用于心音信号处理的小波基. 首先提出一种构造滤波器长度为偶数的紧支撑双正交小波的一般方法; 然后根据心音信号的特点, 讨论心音小波的构造原则和一种基于心音小波族的心音信号合成模型, 并且在此基础上构造出心音小波. 为了突出使用心音小波处理心音信号的先进性和实用性, 对心音小波进行了比较全面的理论和数值仿真分析. 实验结果表明, 相比常用的 db, bior 系列小波, 运用心音小波对心音信号进行处理, 能够获得更好的去噪效果、更精确的心音分类信息以及更小的重构误差率, 为心音特征提取和身份识别的深入研究提供了一种新方法, 在表征心音个体特征细节方面具有积极的意义. 本文根据应用对象设计专用小波的方法也为工程应用中小波基的选择提供了一种新途径.

**关键词:** 双正交小波, 心音小波, 构造方法, 心音合成模型

**PACS:** 87.19.ug, 43.60.Hj, 87.85.-d

**DOI:** 10.7498/aps.62.168701

## 1 引言

心音信号是人体中最重要的生理信号之一, 是心脏在舒张和收缩运动过程中心肌、血液和瓣膜等机械振动产生的复合音, 直接反映了大血管和心脏系统的机械运动状况和心脏各个部分的生理和病理信息. 心音信号与每个人的心脏位置、大小、胸部结构、年龄、性别、体重、情绪、运动状况等因素有关, 导致每一个人的心音信号必然不尽相同, 但总体上心音特征的共性明显, 个体差异细小.

近几年国内外许多学者对心音信号的分析做了大量的研究, 主要包括三个方面: 心音信号的预处理、特征提取、模式识别和分类. 由于小波分析在时域和频域都有表征信号局部信息的能力, 是非稳定信号处理的有效工具, 运用小波变换对心音信号进行分析处理的相关论文较多. 在心音信号的预处理方面, 文献 [1—5] 提出了基于不同小波的去噪方法, 通过对 haar, db, coif, sym 等多种正交小波的去噪效果分析, 认为 db6 小波分五层分解具有最佳的消噪效果 [2]. 在信号分析处理及特征提取方

面, 文献 [6—11] 主要论述了运用离散小波的分解和重构对心音信号进行特征提取. 心音信号的小波变换谱在不同尺度上的分布相应于心脏不同部分的振动信息, 尺度较大的部分相应于信号的低频部分, 这是大血管与心肌等心脏的质量较大的部分在瓣膜肌肉和血流的作用下产生的振动; 尺度较小的部分相应于信号的高频部分, 可以表示心脏瓣膜的血流、振动等信息; 文献 [6] 采用 coif5 小波对心音信号进行 6 层分解处理, 认为 coifN 小波相比 dbN 具有更好的对称性, 也具有更好的光滑性, 能更好地提取胎心音特征. 在模式识别及分类方面; 文献 [12—14] 主要论述基于小波变换和参数模型的心音信号分类算法, 研究心音信号在时域和频域上产生差异的原因, 探讨能充分体现心音特性细节差异的方法. 本课题组从 dbN, symN, coifN 小波基中选择两种以上的小波进行线性组合获取了一组心音子波, 并用它进行心音身份识别 [14], 但经过实验分析其构造的心音子波只适用于心音信号的分解, 不利于心音信号的重构. 综上所述, 在心音信号处理过程中, 为了获取最佳结果, 对心音信号去噪主要

\* 国家自然科学基金(批准号: 61271334, 61073115)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhangzhengycl@163.com

采用 db 系列小波, 对信号进行分类主要采用更具对称性的 coif 系列小波, 这种针对不同的功能选用不同小波基的方法柔性差, 表现为同一个心音采用不同的小波基处理, 不确定性因素会增多, 获得的结果往往稳定性差, 并且由于这些小波基都不具备完全对称性, 会在心音信号处理的过程中引入相位失真, 导致重构误码率增大. 在心音身份识别中, 希望能构造一种专门用于心音信号处理的小波基, 以更好地提取心音个体特征的细节信息. 因此本文在分析小波构造理论的基础上, 提出一种构造滤波器长度为偶数的紧支撑双正交小波的一般方法, 并且根据心音信号的特点, 在此基础上构造出一族心音 (heart sound, HS) 小波并建立了一种基于 HS 小波族的心音信号合成模型. 本文还重点讨论了 HS 小波的构造原则, 并对其进行了比较全面的理论和数值仿真分析, 为心音特征提取和身份识别的深入研究提供了一种新方法. 最后的四个仿真实验表明, 运用 HS 小波对心音信号进行处理, 能够获得更好的去噪效果和重构误差率, 在表征心音个体特征的细节方面具有积极的意义, 同时也为小波分析的特殊应用提供了一种新思路.

## 2 滤波器长度为偶数的紧支撑双正交小波的构造方法

### 2.1 小波基函数的选择

运用小波变换的方法对心音信号进行分析, 首先的工作要选择小波基, 通常是按相似性选择小波基, 不同的小波基时、频特性是不相同的, 对同一心音信号进行小波分解, 其结果也有所不同.

从目前对于心音的研究状况来看, db 小波, coif 小波以及 sym 小波都能对心音信号进行分解与重构, 这些正交基和正交小波变换在数学上具有良好的性质, 但是, 数学家 Daubechies 已经证明除了 haar 小波, 没有同时具有紧支撑性和对称性的正交小波<sup>[15]</sup>. 紧支撑决定小波滤波器的支集长度, 长度越短, 分辨率越高. 对称性决定小波滤波器的线性相位, 非对称会在心音信号的处理的过程中引入相位失真, 而 haar 小波由于平滑性较差, 也并不适用于分析心音这种连续的信号. 因此, 可以设计构造一种同时具有对称性和紧支撑性的双正交小波作为心音小波基函数.

### 2.2 双正交小波的构造

#### 2.2.1 双正交多分辨率分析理论

在小波分析中, 多分辨率分析是构造小波基的一种重要方法. 多分辨率分析方法定义<sup>[15]</sup>为

若  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  为满足如下条件的一个闭子空间序列:

①单调一致性:  $\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots \subset V_j \subset V_{j-1} \dots$ ;

②空间逼近性:  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$ ;

③平移不变性:  $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-n) \in V_0$ ;

④尺度伸缩性:  $f(t/2^j) \in V_j \Leftrightarrow f(t) \in V_0$ ;

⑤基的存在性: 存在  $\varphi(t) \in V_0$ , 使得  $\{\varphi(2^{-j/2}t-k) | k \in \mathbb{Z}\}$  构成  $V_j$  的 Riesz 基, 则称  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  为空间  $L^2(\mathbb{R})$  中一个多分辨率分析. 其中  $\varphi(t)$  称为  $L^2(\mathbb{R})$  空间中的尺度函数,  $V_j$  称为尺度为  $j$  的逼近空间.

根据空间的逐级分解理论, 子空间  $V_0$  可以用有限个子空间来逼近, 即有:

$$\begin{aligned} V_0 &= V_1 \oplus W_1 = V_2 \oplus W_2 \oplus W_1 = \dots \\ &= V_N \oplus W_N \oplus W_{N-1} \oplus \dots \oplus W_2 \oplus W_1, \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\{W_j | j \in \mathbb{Z}\}$  构成  $V_j$  在  $V_{j-1}$  中的正交补空间, 其具有以下性质:

$$f(t) \in W_0 \Rightarrow f(2^{-j/2}t-n) \in W_j \quad (j, n \in \mathbb{Z}), \quad (2a)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{N=-\infty}^{+\infty} W_N, \quad (2b)$$

若存在  $\psi(t) \in W_0$ , 有  $\{\psi_{j,n} = 2^{-j/2}\psi(2^{-j/2}t-n) | n \in \mathbb{Z}\}$  构成空间  $W_j$  的标准正交基.

而双正交多分辨率分析是建立在两个对偶空间上, 两个空间若能相互正交, 就能保证信号的完全重构, 即把信号分解为一个空间  $V$ , 信号重构为另一个空间  $\tilde{V}$ .

在小波的框架理论中, 对偶的两个小波母函数  $\psi(t)$  和  $\tilde{\psi}(t)$  若满足如下的双正交关系, 即

$$\langle \psi_{m,n}(t), \tilde{\psi}_{j,k}(t) \rangle = \delta(m-j)\delta(n-k), \quad (3a)$$

同时, 其对应的尺度函数  $\tilde{\varphi}_{j,k}(t)$  满足如下的关系, 即

$$\langle \varphi_{j,m}(t), \tilde{\varphi}_{j,n}(t) \rangle = \delta(m-n), \quad (3b)$$

那么, 称  $\psi(t)$  和  $\tilde{\psi}(t)$  构成了一对双正交小波基<sup>[15]</sup>.

同样双正交小波基的尺度函数和小波函数应满足下面的双尺度方程:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_k h(k) \varphi(2t-k), \\ \psi(t) &= \sqrt{2} \sum_k g(k) \varphi(2t-k), \\ \tilde{\varphi}(t) &= \sqrt{2} \sum_k \tilde{h}(k) \tilde{\varphi}(2t-k), \\ \tilde{\psi}(t) &= \sqrt{2} \sum_k \tilde{g}(k) \tilde{\varphi}(2t-k). \end{aligned} \quad (4)$$

### 2.2.2 滤波器长度为偶数的双正交小波的构造

因为小波基的构造实质就是滤波器的构造,因此双正交多分辨率分析与滤波器之间的等价关系可表述如下:

$$\begin{aligned} \{\varphi(t), \tilde{\varphi}(t)\} &\Leftrightarrow \{h(n), \tilde{h}(n)\}, \\ \{\psi(t), \tilde{\psi}(t)\} &\Leftrightarrow \{g(n), \tilde{g}(n)\}, \end{aligned} \quad (5)$$

这里,  $g[n] = (-1)^{1-n} \tilde{h}[1-n]$ ,  $\tilde{g}[n] = (-1)^{1-n} h[1-n]$ .

(4) 和 (5) 式表明, 可通过构造适当的分解尺度滤波器和重构尺度滤波器组来构造双正交小波基.

图 1 是双正交完全重构双通道滤波器组的结构, 这里要实现完全重构即要求满足  $\tilde{x}_{j-1}[k] = x_{j-1}[k]$ .  $h(n)$  和  $g(n)$  分别是分解用的低通滤波器和高通滤波器, 假设它们的长度分别为  $N$  与  $M$ ,  $\tilde{h}(n)$  与  $\tilde{g}(n)$  分别是对应的重构低通和高通滤波器, 它们的长度分别为  $M$  和  $N$  (这里  $N$  和  $M$  的长度为偶数).

首先引出小波消失矩的概念.

**引理 1** 对于小波函数  $\psi(t)$ , 如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad (0 \leq k < \rho),$$

则称小波  $\psi(t)$  具有  $\rho$  阶消失矩 [15].

**引理 2** 小波函数  $\psi(t)$  具有  $\rho$  阶消失矩, 等价于其对应的尺度滤波器函数  $H(w)$  和它的前  $\rho-1$  阶导数在  $\pi$  点为 0 [16]. 其中  $H(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h e^{-jwn}$ ,  $\{h[n]\}$  为尺度滤波器系数.

由

$$\begin{aligned} H(w) &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-iwn} \\ \Rightarrow H^{(n)}(w) &= \sum_{k=1}^{N-1} (-ik)^n h_k e^{-iwn} \\ \Rightarrow H(w=\pi) &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i\pi n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k h_k = 0, \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} H^{(n)}(w=\pi) &= \sum_{k=1}^{N-1} (-ik)^n h_k e^{-i\pi n} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k (-ik)^n h_k = 0. \end{aligned} \quad (6b)$$

**定理 1** 双正交双通道滤波器组对任何输入信号实现精确重构的条件为 [16]

$$H^*(w+\pi)\tilde{H}(w) + G^*(w+\pi)\tilde{G}(w) = 0, \quad (7a)$$

$$H^*(w)\tilde{H}(w) + G^*(w)\tilde{G}(w) = 2, \quad (7b)$$

这里,

$$\begin{aligned} H(w) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h e^{-jwn}, \\ G(w) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g e^{-jwn}, \\ H^*(w) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \tilde{h} e^{-jwn}, \\ G^*(w) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \tilde{g} e^{-jwn}. \end{aligned}$$

将  $g[n] = (-1)^{1-n} \tilde{h}[1-n]$ ,  $\tilde{g}[n] = (-1)^{1-n} h[1-n]$  代入 (7b) 式中可得

$$h(n) * \tilde{h}(n) + (-1)^n h(n) * (-1)^{1-n} \tilde{h}(n) = 2\delta(n) \quad (8)$$

其中  $h(n)$  的长度为  $N$ ,  $\tilde{h}(n)$  的长度为  $M$ . 由上式可推出下面的结论.

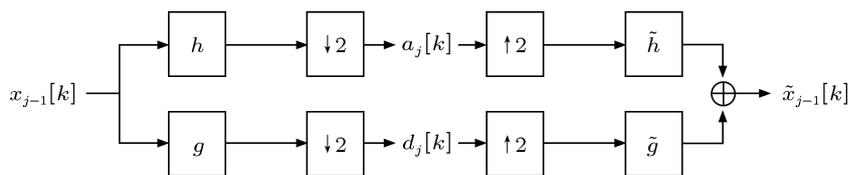


图 1 双正交完全重构双通道滤波器组

**推论 1** 设  $N \geq M$ ,  $h(n)$  与  $\tilde{h}(n)$  卷积的结果为一个长为  $2N - 1$  的序列  $a$ , 则

$$a(N) = 1, \quad a(2k) = 0, \quad k = 1 \cdots (N - 1). \quad (9)$$

**定理 2** 如果  $(h, g)$  和  $(\tilde{h}, \tilde{g})$  是双正交完全重构滤波器组, 其傅里叶变换是有界的<sup>[16]</sup>. 那么,  $\{\tilde{h}(n - 2l), \tilde{g}(n - 2l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$  和  $\{h(n - 2l), g(n - 2l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$  构成  $l^2(\mathbb{Z})$  的双正交 Riesz 基.

该定理反映了四个空间之间的正交性, 即  $V_0$  和  $\tilde{V}_0$  之间的双正交性

$$\langle \tilde{h}[k], h[k - 2n] \rangle = \delta(n), \quad (10a)$$

$W_0$  和  $\tilde{W}_0$  之间的双正交性

$$\langle \tilde{g}[k], g[k - 2n] \rangle = \delta(n), \quad (10b)$$

$\tilde{V}_0$  和  $W_0$  之间的正交性

$$\langle h[k], g[k - 2n] \rangle = 0, \quad (10c)$$

$\tilde{W}_0$  和  $V_0$  之间的正交性

$$\langle \tilde{g}[k], h[k - 2n] \rangle = 0, \quad (10d)$$

并且  $h, \tilde{h}$  的低通特性以及  $g, \tilde{g}$  的高通特性可表示为

$$\begin{aligned} & \begin{cases} H(w = 0) = \tilde{H}(w = 0) = 1, \\ G(w = 0) = \tilde{G}(w = 0) = 0, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \sum_n h[n] = \sum_n \tilde{h}[n] = \sqrt{2}, \\ \sum_n g[n] = \sum_n \tilde{g}[n] = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

将 (6), (10a), (11) 式以及  $g[n] = (-1)^{1-n}\tilde{h}[1-n]$ ,  $\tilde{g}[n] = (-1)^{1-n}h[1-n]$  式联立可得到一个方程组:

$$\sum_n h[n] = \sum_n \tilde{h}[n] = \sqrt{2},$$

$$\sum_n g[n] = \sum_n \tilde{g}[n] = 0,$$

$$\langle \tilde{h}[k], h[k - 2n] \rangle = \delta(n),$$

$$H(w = \pi) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i\pi k} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k h_k = 0,$$

$$H^{(n)}(w = \pi) = \sum_{k=1}^{N-1} (-ik)^n h_k e^{-i\pi k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k (-ik)^n h_k = 0,$$

$$g[n] = (-1)^{1-n}\tilde{h}[1-n],$$

$$\tilde{g}[n] = (-1)^{1-n}h[1-n]. \quad (12)$$

将此方程组与 (9) 式结合可以求出尺度滤波器  $h[n]$  与  $\tilde{h}[n]$  的值, 再代入双尺度方程 (4) 中, 可得到分解小波  $\psi(t)$  与重构小波  $\tilde{\psi}(t)$ , 上述方法即本文提出的滤波器长度为偶数的双正交小波的一般构造方法.

本文以构造 Bior3.3 小波为例, 证明该方法的可行性和正确性. 由于 Bior3.3 分解尺度滤波器  $h[n]$  的长度  $N = 8$ , 重构尺度滤波器  $\tilde{h}[n]$  的长度  $M = 4$ , 设  $h(n) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_4, a_3, a_2, a_1\}$ ,  $\tilde{h}(n) = \{b_1, b_2, b_2, b_1\}$ , 将  $h[n]$  和  $\tilde{h}[n]$  代入 (9), (12) 式, 列出方程:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_4 + a_3 \\ \quad + a_2 + a_1 = \sqrt{2}, \\ b_1 + b_2 + b_2 + b_1 = \sqrt{2}, \\ 2a_3b_1 + 2a_4b_2 = 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_2 + a_4b_1 = 0, \\ a_2 - 2a_3 + 3a_4 - 4a_4 + 5a_3 \\ \quad - 6a_2 + 7a_1 = 0, \\ a_2 - 2^2a_3 + 3^2a_4 - 4^2a_4 + 5^2a_3 \\ \quad - 6^2a_2 + 7^2a_1 = 0, \\ b_2 - 2b_2 + 3b_1 = 0, \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 0, \end{cases} \quad (13)$$

经求解, 方程组只有一组解:

$$h(n) = \{0.0663 \quad -0.1989 \quad -0.1547 \quad 0.9944 \\ 0.9944 \quad -0.1547 \quad -0.1989 \quad 0.0663\},$$

$$\tilde{h}(n) = \{0.1768 \quad 0.5303 \quad 0.5303 \quad 0.1768\}, \quad (14)$$

这正是双正交小波 Bior3.3 的尺度滤波器系数.

与目前常用的双正交小波构造方法相比, 本方法更加方便快捷.

### 3 HS 小波的构造方法

在构造 HS 小波前, 首先需要了解心音信号的特点<sup>[17,18]</sup>.

1) 心脏是一个非线性的、时变的复杂系统, 因此心音信号具有很强的非平稳性和随机性, 这也是需要选择恰当的小波对心音信号进行分析的主要原因.

2) 心音信号的频率主要集中在 0—250 Hz,  $s_1$  主要分布在中低频, 其中低频的频率范围为 10—

50 Hz, 中频范围 50—140 Hz; 而  $s_2$  在低、中、高频率范围内都有分布, 低频分量集中在 10—80 Hz, 中频分量集中在 80—200 Hz;  $s_3$  和  $s_4$  信号能量相对较弱, 主要分布在 50 Hz 以下的频段, 其他频率范围内趋近于零.

3) 心音信号是一种具有周期性的时变信号,  $s_1, s_2$  信号具有明显的开始与终止特征, 在  $s_1, s_2$  期间, 不会产生突变, 第三、四心音  $s_3, s_4$  较弱, 如果把观察时间缩短到一个很短的范围内, 则可以得到一系列近似稳定的信号, 即心音信号变成时准稳定的.

### 3.1 构造心音小波的原则

根据心音信号周期时变性以及短时间内的时准稳定性, 可以设计一种 HS 小波族来最佳地地表征心音的时频局部特性和聚焦心音的个体特性, 该 HS 小波族应满足如下原则.

1) 相似原则. HS 小波函数要和心音信号具有尽可能大的相似性, 即

$$WT_f(a, \tau) = \langle f(t), HS_{a,\tau}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_R f(t) HS^* \left( \frac{t-\tau}{a} \right) dt, \quad (15)$$

其中  $WT_f(a, \tau)$  表示心音信号  $f(t)$  与 HS 小波之间相似性系数,  $WT_f(a, \tau)$  越大相似性越好.

2) 重构最优原则. 用 HS 小波重构一组正常心音信号应该快速、简单, 同一性好. 设  $f_1(t)$  为原始心音信号, 经 HS 小波分解重构后得到信号  $f_2(t)$ , 则重构误差可以简单地用  $|\epsilon| = |f_2(t) - f_1(t)|$  来表示,  $|\epsilon|$  越小代表重构性能越好.

3) 不相关原则. HS 小波函数间应该具有很好的不相关性, 用它们对心音信号进行分解所产生的冗余信息要尽可能地少.

HS 小波函数之间的相关性可以通过互相关函数

$$R_{12}(\tau) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} HS_1^*(t) HS_2(t + \tau) dt \right| \quad (16)$$

来验证,  $R_{12}(\tau)$  值越小证明 HS 小波之间不相关性越好.

设  $HS = \{HS_1, \dots, HS_N\}$  为心音信号的 HS 小波族, 由该小波族可合成出第一、二心音  $s_1, s_2$  和第三、四心音  $s_3, s_4$ , 以及心杂音  $s_5$ , 它们可表示为

$$s_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \cdot HS_j \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (17)$$

经线性合成器合成的一个周期的心音信号可描述为

$$s_T(n) = \sum_{n=1}^T (k_1 s_1(n) + k_2 s_2(n) + k_3 s_3(n) + k_4 s_4(n) + k_5 s_5(n)), \quad (18)$$

那么有心音信号的合成模型如图 2 所示.

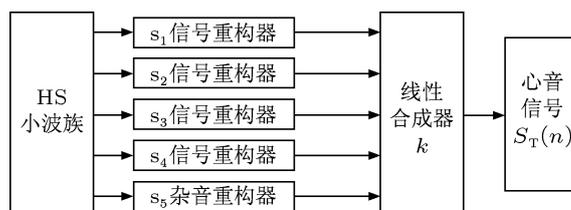


图 2 心音信号的小波族合成模型

### 3.2 构造 HS 小波的方法

**定理 3**<sup>[19]</sup> 双正交小波滤波器的消失矩阶数之和不大于滤波器长度和的一半, 即  $\rho + \bar{\rho} \leq (N + M)/2$ .

**定理 4**<sup>[19]</sup> 若双正交小波滤波器的长度具有相同的奇偶性, 则其和必为 4 的倍数.

根据上文提到的心音信号的特点, HS 小波的构造原则以及双正交小波构造的一般方法, 本文选取分解尺度滤波器  $h[n]$  的长度  $N = 10$ , 重构尺度滤波器  $\tilde{h}[n]$  的长度  $M = 10$ , 取  $\psi(t)$  和  $\tilde{\psi}(t)$  的消失矩阶数都为 5, 设  $h(n) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1\}$ ,  $\tilde{h}(n) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_5, b_4, b_3, b_2, b_1\}$ , 将  $h[n]$  和  $\tilde{h}[n]$  代入 (9), (12) 式, 列出方程

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= \sqrt{2}/2, \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 &= \sqrt{2}/2, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5 &= 1/2, \\ a_1 b_3 + a_2 b_4 + a_3 b_5 + a_4 b_5 + a_5 b_4 + a_5 b_3 \\ &+ a_4 b_2 + a_3 b_1 = 0, \\ a_2 - 2a_3 + 3a_4 - 4a_5 + 5a_5 - 6a_4 + 7a_3 \\ &- 8a_2 + 9a_1 = 0, \\ a_2 - 2^2 a_3 + 3^2 a_4 - 4^2 a_5 + 5^2 a_5 - 6^2 a_4 \\ &+ 7^2 a_3 - 8^2 a_2 + 9^2 a_1 = 0, \\ a_2 - 2^3 a_3 + 3^3 a_4 - 4^3 a_5 + 5^3 a_5 - 6^3 a_4 \\ &+ 7^3 a_3 - 8^3 a_2 + 9^3 a_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_2 - 2^4 a_3 + 3^4 a_4 - 4^4 a_5 + 5^4 a_5 - 6^4 a_4 \\
 & + 7^4 a_3 - 8^4 a_2 + 9^4 a_1 = 0, \\
 & b_2 - 2b_3 + 3b_4 - 4b_5 + 5b_5 - 6b_4 + 7b_3 \\
 & - 8b_2 + 9b_1 = 0, \\
 & b_2 - 2^2 b_3 + 3^2 b_4 - 4^2 b_5 + 5^2 b_5 - 6^2 b_4 \\
 & + 7^2 b_3 - 8^2 b_2 + 9^2 b_1 = 0, \\
 & b_2 - 2^3 b_3 + 3^3 b_4 - 4^3 b_5 + 5^3 b_5 - 6^3 b_4 \\
 & + 7^3 b_3 - 8^3 b_2 + 9^3 b_1 = 0, \\
 & b_2 - 2^4 b_3 + 3^4 b_4 - 4^4 b_5 + 5^4 b_5 - 6^4 b_4 \\
 & + 7^4 b_3 - 8^4 b_2 + 9^4 b_1 = 0, \\
 & a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0, \\
 & a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 = 0. \tag{19}
 \end{aligned}$$

由该方程组可求得一组实数解:

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \{0.0269 \quad -0.0323 \quad -0.2411 \quad 0.0541 \\
 & \quad 0.8995 \quad 0.8995 \quad 0.0541 \quad -0.2411 \\
 & \quad -0.0323 \quad 0.0269\}, \\
 \tilde{h}(n) &= \{0.0198 \quad 0.0238 \quad -0.0233 \quad 0.1456 \\
 & \quad 0.5411 \quad 0.5411 \quad 0.1456 \quad -0.0233 \\
 & \quad 0.0238 \quad 0.0198\}. \tag{20a}
 \end{aligned}$$

根据  $g[n] = (-1)^{1-n} \tilde{h}[1-n]$ ,  $\tilde{g}[n] = (-1)^{1-n} h[1-n]$  可求得对应的小波滤波器  $g(n)$  和  $\tilde{g}(n)$ :

$$\begin{aligned}
 g(n) &= \{-0.0198 \quad 0.0238 \quad 0.0233 \quad 0.1456 \\
 & \quad -0.5411 \quad 0.5411 \quad -0.1456 \quad -0.0233 \\
 & \quad -0.0238 \quad 0.0198\}, \\
 \tilde{g}(n) &= \{0.0269 \quad 0.0323 \quad -0.2411 \quad -0.0541 \\
 & \quad 0.8995 \quad -0.8995 \quad 0.0541 \quad 0.2411 \\
 & \quad -0.0323 \quad -0.0269\}. \tag{20b}
 \end{aligned}$$

根据上述滤波器组的解以及双尺度方程 (4) 得到一组新的双正交小波基  $\psi(t)$  和  $\tilde{\psi}(t)$ , 其波形如图 3 所示. 后面的理论和实验可以证明  $\psi(t)$  和  $\tilde{\psi}(t)$  具备了消失矩大、正则性好、具有对称性等优点.

### 3.3 HS 小波族

因为  $\psi(t)$  和  $\tilde{\psi}(t)$  满足 HS 小波的构造原则.

1) 相似原则: 将分解小波  $\psi(t)$  以及心音信号  $f(t)$  代入 (15) 式, 由于心音信号的频率主要集中在

0—250 Hz 之内, 本文将该频段内得到的一系列小波系数取绝对值后求和, 结果为 646.6943 (见实验 2), 远远大于 db 系列相应频段内的小波系数.

2) 重构最优原则: 经小波  $\tilde{\psi}(t)$  重构的心音信号与原信号的误差  $|\epsilon|$  只有  $6.7143 \times 10^{-15}$  (见实验 3), 远小于相对应的 db 系列小波的重构误差.

因此, 我们认为双正交小波基  $\psi(t)$  和  $\tilde{\psi}(t)$  是一种好的小波基, 能很好地反映心音信号的特点, 将它定义为 HS<sub>2</sub> 小波, 如图 3 所示.

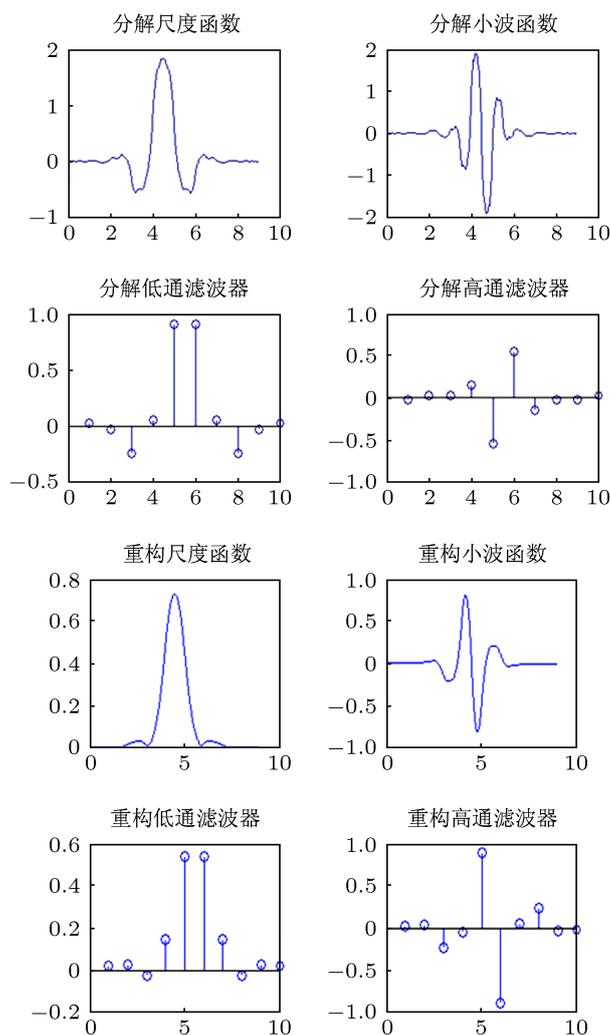


图 3 HS<sub>2</sub> 小波

同时, 在消失矩方面, HS<sub>2</sub> 小波的分解和重构小波的消失矩都为 5, 与常用于心音信号处理的 db5 小波的消失矩相同; 正则性方面, 从实验 2 可以看出, 心音信号经 HS<sub>2</sub> 小波分解后得到的小波系数随着频率的增大而迅速减小, 衰减速度相比 db5 和 bior5.5 小波快得多, 以及实验 3 中 HS<sub>2</sub> 小波极低的重构误差率都证明了 HS<sub>2</sub> 小波具有更高的正则性、

更加光滑的波形、更好的频域局域性; 对称性方面,  $HS_2$  小波是一种双正交小波, 完全满足对称性的要求.

同理, 根据 HS 小波的构造方法本文构造了 HS 小波族  $HS_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ , 其中  $HS_1$  小波如图 4 所示.

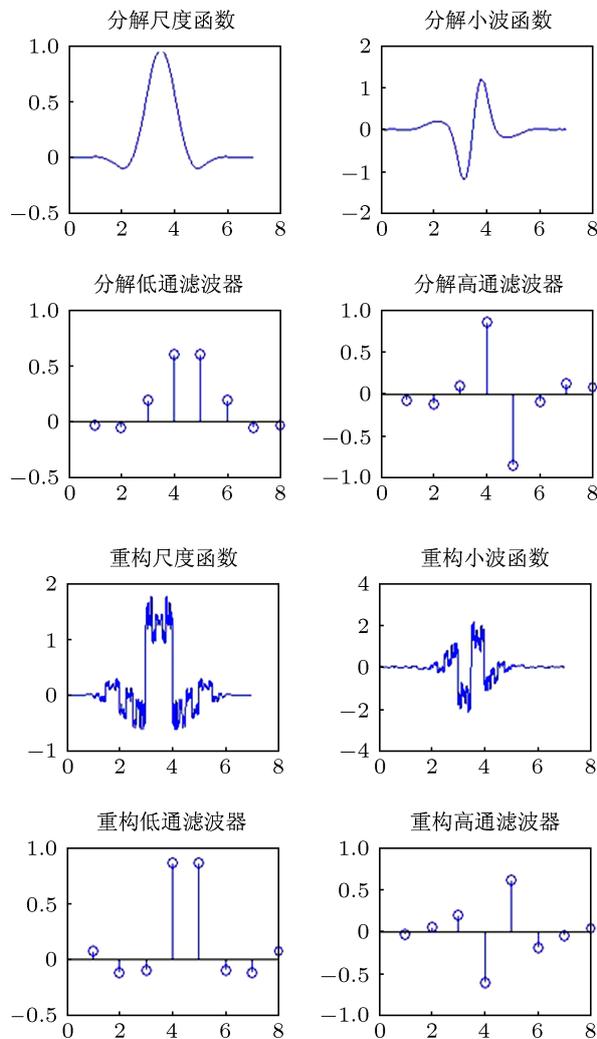


图 4  $HS_1$  小波

3) 不相关原则: 将  $HS_1$  和  $HS_2$  代入 (16) 式, 经过计算,  $HS_1$  的分解小波  $\psi_1(t)$  和  $HS_2$  的分解小波  $\psi_2(t)$  的互相关系数为  $6.6040 \times 10^{-12}$  (见实验 4), 重构小波  $\tilde{\psi}_1(t)$  和  $\tilde{\psi}_2(t)$  的互相关系数为  $6.2417 \times 10^{-12}$  (见实验 4), 很显然  $HS_1$  和  $HS_2$  小波具有弱相关性, 独立性较强.

## 4 HS 小波的应用

为了检验 HS 小波的效果, 将  $HS_2$  小波运用于

心音信号的处理, 并与目前在心音信号处理方面最常用的 db5, bior5.5 小波进行对比分析.

实验中引用的心音信号由本课题组提供 [14]. 其心音的采样频率为 11025 Hz, 由于心音信号的主要频率集中在 250 Hz 以内, 因此在分析心音信号前, 先对其进行 5 分频, 得到的数据采样频率为 2205 Hz. 信号波形如图 5(a) 所示.

### 4.1 HS 小波去噪实验

为了检验 HS 小波的去噪效果, 本文在图 5(a) 正常心音的基础上加入均匀白噪声 (如图 5(b)), 然后分别运用三种小波进行去噪, 经过去噪后的心音信号如图 5(b) 所示, 并计算出相应的信噪比 SNR (如表 1).

表 1 三种小波去噪效果的比较

	$HS_2$	db5 小波	bior5.5
SNR/dB	11.2957	10.9409	10.3325

图 5 和表 1 直观地显示出  $HS_2$  小波优越的去噪性能.

### 4.2 HS 小波的相似性分析实验

若  $\forall f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , 函数  $f(t)$  的连续小波变换为

$$WT_f(a, \tau) = \langle f(t), \Psi_{a,\tau}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \Psi^* \left( \frac{t-\tau}{a} \right) dt, \quad (21)$$

变换结果  $WT_f(a, \tau)$  称为小波变换系数, 直接反映了信号与小波的相似程度. 对上式中的尺度  $a$  和位移  $\tau$  分别进行离散化处理, 就得到了离散小波变换 (DWT).

图 6 中的  $s$  为含噪信号, 根据小波变换的理论, 分别采用 db5, bior5.5 小波以及  $HS_2$  小波对其进行 4 层分解.

小波的多尺度分解实际上是将心音信号分解成低频和高频两部分, 然后再对其中的低频部分再分解, 以此类推, 得到不同频带下的低频近似系数和高频细节系数, 这些小波分解系数的值代表对应频段的信号能量. 本实验采用的是采样频率为 2205 Hz 的心音信号, 各分解系数和心音信号频段的对应关系如表 2.

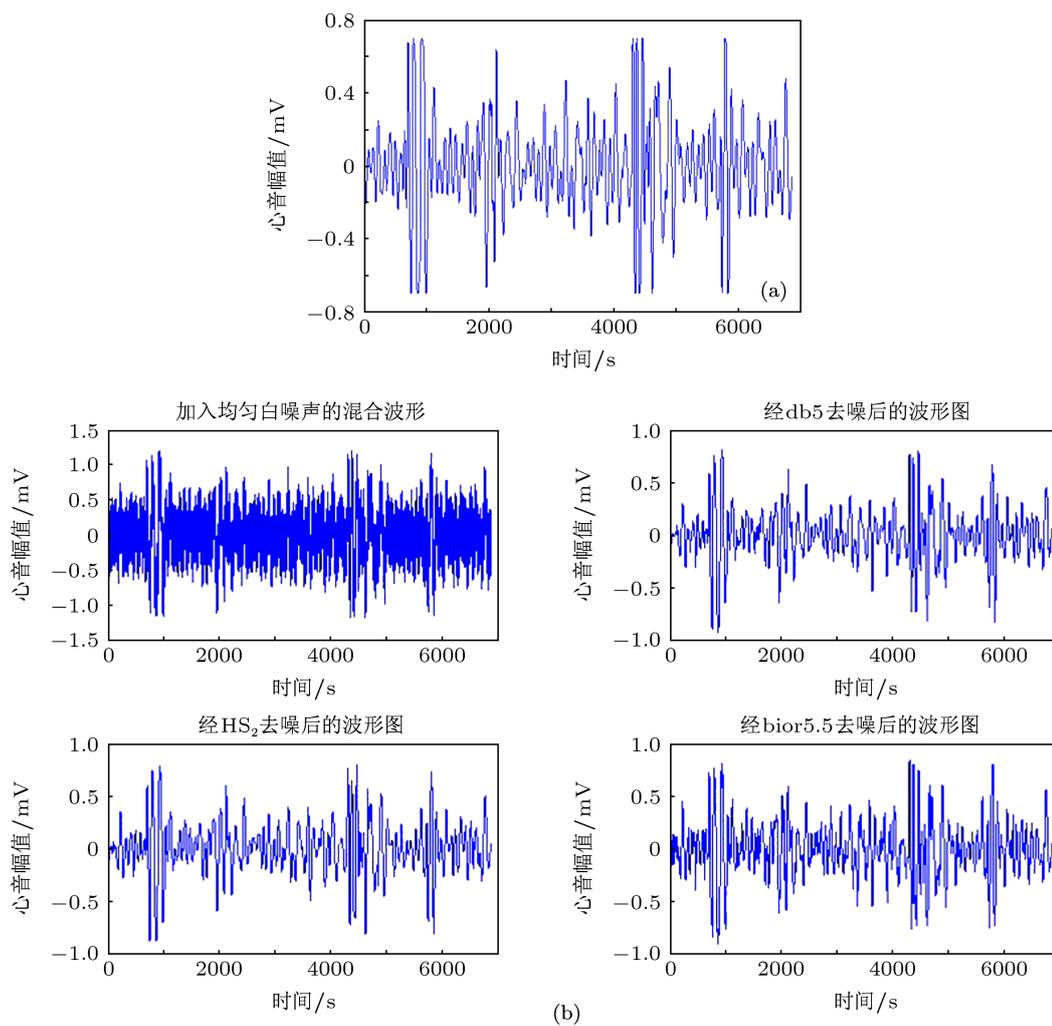
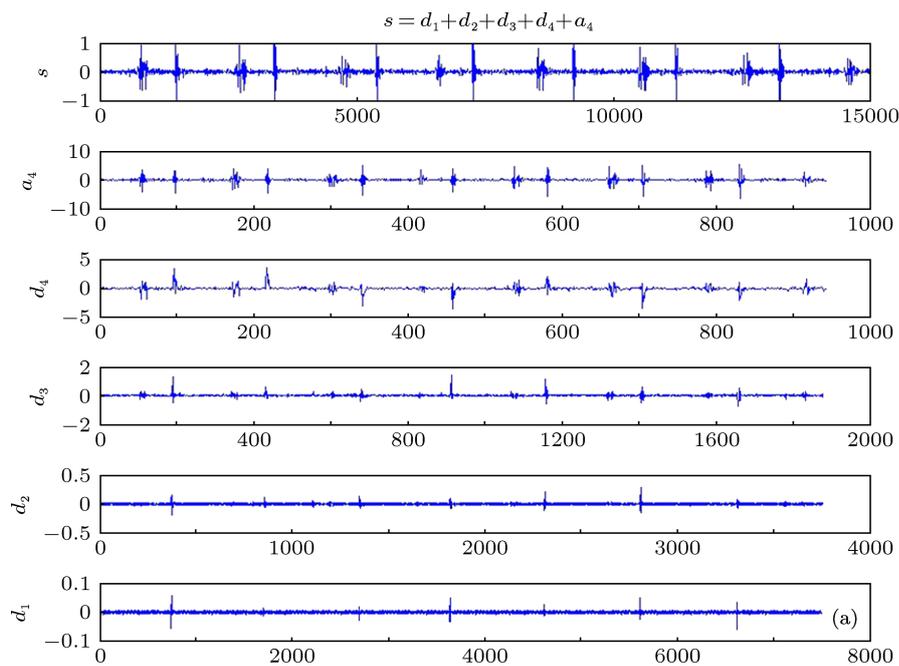


图5 (a) 正常心音信号; (b) 经三种小波去噪后的心音信号



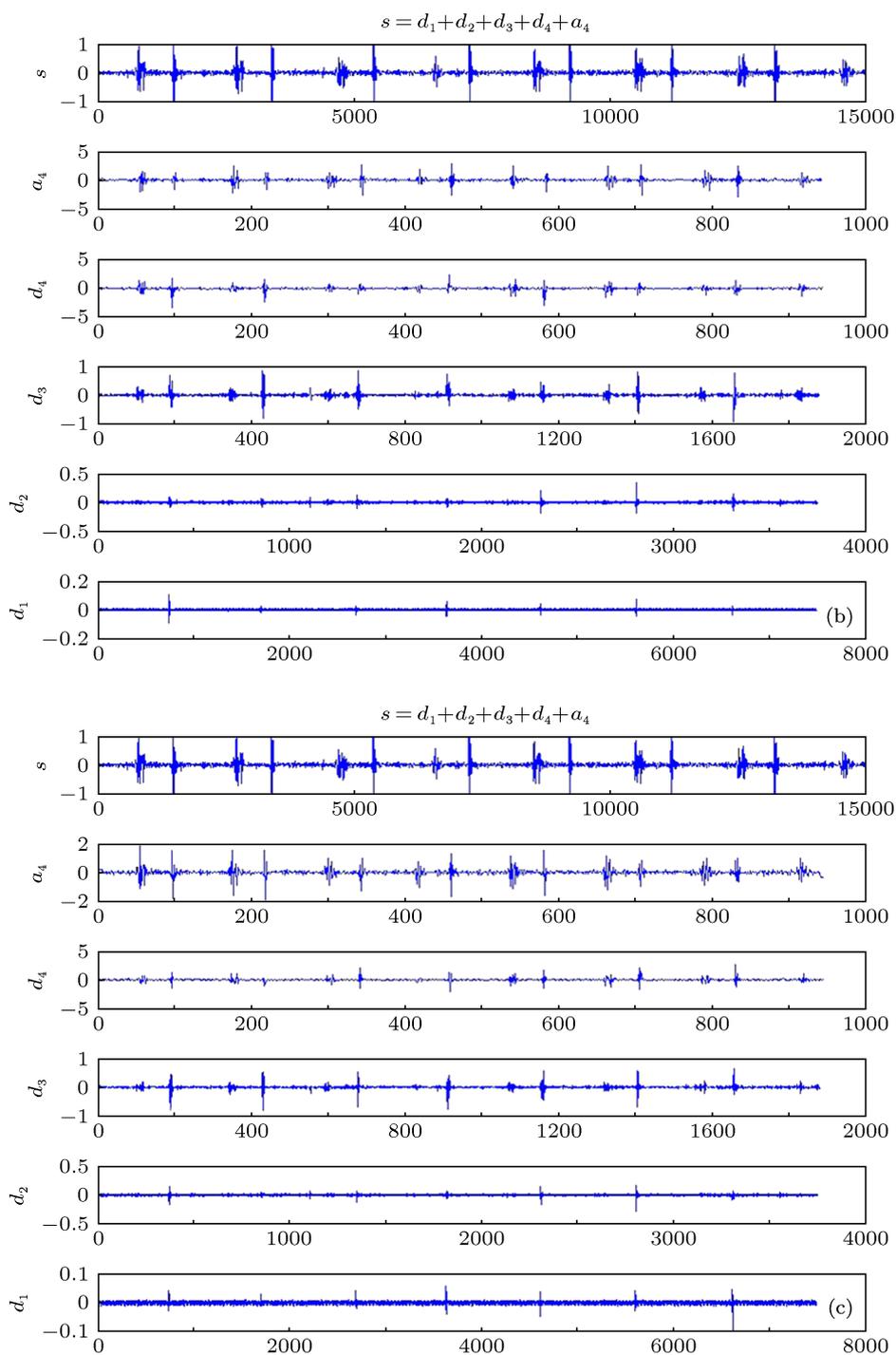


图6 (a) HS<sub>2</sub> 小波分解; (b) db5 小波分解; (c) bior5.5 小波分解

表2 心音信号频率分段

	$d_1$ 细节	$d_2$ 细节	$d_3$ 细节	$d_4$ 细节	$a_4$ 轮廓
频率/Hz	551—1102	275—550	137—274	68—137	0—68

根据心音信号的特点,表明心音信号的主要成分集中在近似部分  $a_4$  和细节部分  $d_4$  中,其中  $s_1, s_2$  的低频成分以及  $s_3, s_4$  集中在了近似系数  $a_4$  中,  $s_1,$

$s_2$  的中频成分集中在细节系数  $d_4$  中,噪声成分集中在细节系数  $d_1$  中.这也体现了小波变换对心音信号分段的作用以及用于描述心音个体特征细节的良好性质.

从图6可知心音信号经过不同小波的分解,产生的各个频段的小波系数是不同的,分别求出每个

小波在不同频段的小波系数  $WT_f(a, \tau)$ , 并对它们取绝对值再求和, 计算每个频段小波与信号总的相似性大小, 如表 3.

表 3 三种小波与心音信号相似度的比较

$\sum( WT_f(a, \tau) )$	$d_1$ 细节	$d_2$ 细节	$d_3$ 细节	$d_4$ 细节	$a_4$ 轮廓
HS <sub>2</sub> 小波	13.6598	40.8414	76.7758	180.2304	389.6881
db5 小波	21.1617	43.2194	80.1933	138.1041	199.7799
bior5.5 小波	23.6701	40.2395	62.2332	110.7767	135.5084

从表 3 可以发现, 心音信号经过 HS<sub>2</sub> 小波分解后,  $a_4$  和  $d_4$  包含频率范围 (0—137 Hz) 内小波系数远大于 db5 和 bior5.5 小波相对应的值, 其次,  $d_1$  频率范围内小波系数又是最小的, 这表明心音信号经 HS<sub>2</sub> 小波分解后能量主要集中在了 0—137 Hz, 也表明了相比 db5 和 bior5.5 小波, HS<sub>2</sub> 小波与心音信号更具有相似性, 对心音信号的频率分段更加精确.

### 4.3 HS 小波的重构误码率分析实验

重构运算是小波变换的逆变换, 也就是把分解

得到的近似系数和细节系数叠加得到原始信号. 但一般信号经过小波分解以后都会丢失某些信息, 这样重构出的信号与原信号会出现一定的误差. 因此重构误码率也是衡量小波的一个重要标准.

本实验选取的是图 5(a) 中的正常心音信号, 运用小波对该信号 4 层分解后再对其进行复原, 取得三种小波的重构误差并计算出小波分解重构的时间, 如表 4 所示.

表 4 三种小波重构心音信号的误码率和分解重构的时间

	HS <sub>2</sub> 小波	db5 小波	bior5.5
重构误差	$6.7143 \times 10^{-15}$	$1.0448 \times 10^{-10}$	$6.5605 \times 10^{-11}$
时间测量/s	0.0156	0.0312	0.0312

从表 4 中可以得到, HS<sub>2</sub> 小波对心音信号的重构误差率、分解重构所耗费的时间都远远小于 db 小波和 bior5.5 小波, 符合心音小波函数重构最优的原则.

上述三种小波处理心音信号的效果比较如图 7 所示.

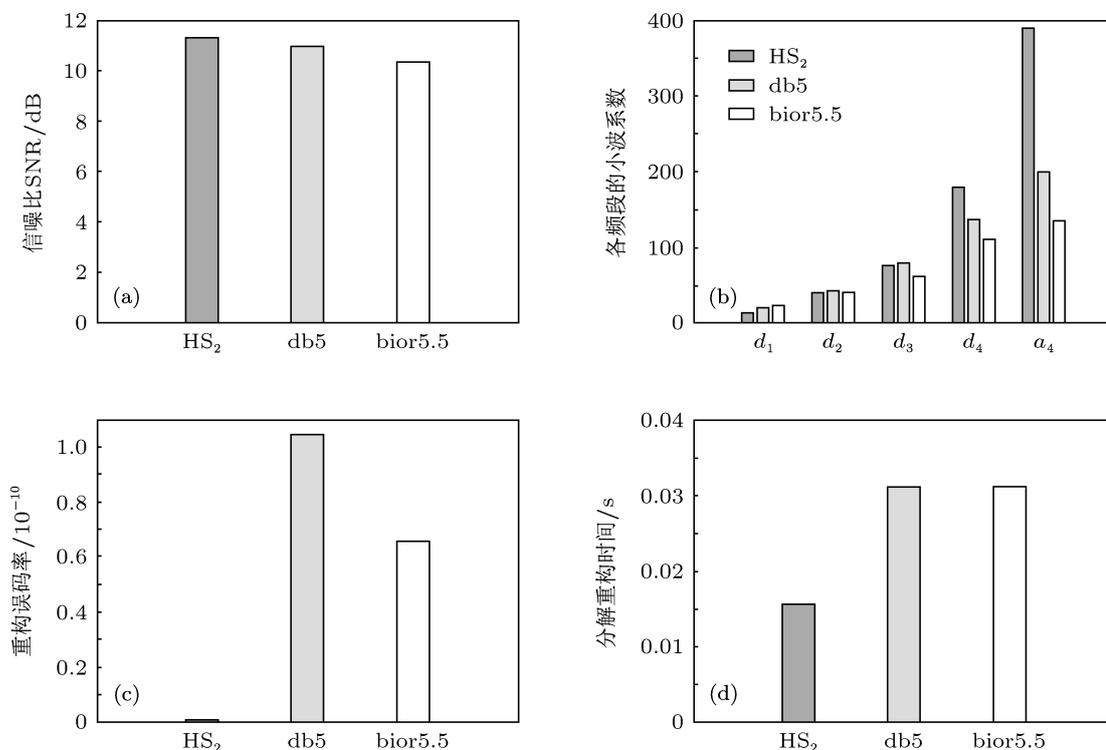


图 7 三种小波处理心音信号的效果比较 (a) 去噪效果的比较; (b) 与心音信号的相似性比较; (c) 重构心音信号误差的比较; (d) 分解重构时间的比较

#### 4.4 HS 小波间的相关性实验

根据心音信号合成模型以及 HS 小波构造的不相关原则, HS 小波间独立性越强重构的  $s_1$ — $s_5$  信号的冗余性越小, 本实验通过 (16) 式测量  $HS_1$  和  $HS_2$  小波间的互相关系数, 实验结果如表 5 所示.

表 5  $HS_1$  和  $HS_2$  小波的互相关系数

	分解小波	重构小波
Sum( $R_{12}(\tau)$ )	$6.6040 \times 10^{-12}$	$6.2417 \times 10^{-12}$

表 5 表明  $HS_1$  和  $HS_2$  小波之间的相关性很弱, 符合心音小波函数构造的不相关原则.

## 5 结论

本文基于双正交小波的理论以及心音信号的特点提出一种双正交 HS 小波构造的通用方法, 并构造出一族 HS 小波, 与常用的小波基相比:

1) HS 小波具备双正交小波的对称性质, 避免

了相位失真;

2) 在心音信号预处理方面, 相比 db5 小波,  $HS_2$  小波的去噪性能提升 3.3%, 相比双正交的 bior5.5 小波, 提升 9.3%;

3) HS 小波和心音信号具有更好的相似性质, 相比 db5 小波,  $HS_2$  小波的相似性能提升 54.7%, 相比 bior5.5 小波, 提升 109.6%, 这对于心音信号的分类以及表征心音信号的细节方面具有积极的意义;

4) 在其他方面,  $HS_2$  小波的重构误差比 db5 小波小 10 万倍, 比 bior5.5 小波小 1 万倍; HS 小波对心音信号的分解重构效率比 db5 和 bior5.5 小波高 2 倍左右.

HS 小波满足了心音小波构造的三个基本原则, 体现了它在处理心音信号时优越的去噪性能、频率分段功能以及细节聚焦特性, 为心音信号的特征提取和身份识别奠定了良好的基础. 本文根据应用对象设计专用小波的方法也为工程应用中小波基的选择提供了一种新途径.

- [1] Wang Y, Wang H B, Liu L H, Qiao J X 2010 *The 1st International Conference on Electrical and Control Engineering* Wuhan, China, June 25–27, 2010 p5018
- [2] Chen T H, Han L Q, Xing S X, Guo P Y 2010 *Comput. Simulat.* **27** 401 (in Chinese) [陈天华, 韩立群, 邢素霞, 郭培源 2010 计算机仿真 **27** 401]
- [3] Guo X M, Tang L P 2010 *Appl. Res. Comput.* **27** 4555 (in Chinese) [郭兴明, 汤丽平 2010 计算机应用研究 **27** 4555]
- [4] Deng K, Zhang L, Luo M K 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030506
- [5] Gao G R, Liu Y P, Pan Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 139701 (in Chinese) [高国荣, 刘艳萍, 潘琼 2012 物理学报 **61** 139701]
- [6] Zhao J Y, Liu H Y, Ma H S, Zhou H D 2006 *Chin. J. Biomed. Engineer.* **25** 538 (in Chinese) [赵继印, 刘海英, 马洪顺, 周怀得 2006 中国生物医学工程学报 **25** 538]
- [7] Hadi H M, Mashor M Y, Mohamed M S, Tat K B 2008 *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control 2008 (CCE 2008) 5th International Conference* Mexico, November 12–14, 2008 p177
- [8] Vikhe P S, Hamde S T, Nehe N S 2009 *Advances in Computing, Control, and Telecommunication Technologies, 2009 (ACT '09)* Trivandrum, Kerala, December 28–29, 2009 p367
- [9] Sherif Omran, Tayel M 2003 *Circuits and Systems, 2003 IEEE 46th Midwest Symposium* Cairo, Egypt, December 30, 2003 p392
- [10] Wang P, Kim Y, Soh C B 2005 *Engineering in Medicine and Biology Society, 2005 (IEEE-EMBS 2005) 27th Annual International Conference* Shanghai, China, January 17–18, 2006 p7572
- [11] Zhong L S, Guo X M, Yang Y, Xiao S Z 2011 *Chin. J. Appl. Physiol.* **2** 255 (in Chinese) [钟丽莎, 郭兴明, 杨勇, 肖守中 2011 中国应用生理学杂志 **2** 255]
- [12] Kumar D, Carvalho P, Antunes M, Henriques J, Sa e Melo A, Schmidt R, Habetha J 2007 *Engineering in Medicine and Biology Society 2007 (EMBS 2007) 29th Annual International Conference of the IEEE* Lyon, France, August 22–26, 2007 p1277
- [13] Zhao L, Feng J, Zhai G J, Zhang L H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1943 (in Chinese) [赵莉, 冯稷, 翟光杰, 张利华 2005 物理学报 **54** 1943]
- [14] Cheng X F, Ma Y, Liu C, Zhang X J, Guo Y F 2012 *Sci. China: Inf. Sci.* **55** 281
- [15] Mallat S 2010 *A Wavelet. Tour of Signal Processing* (3rd Ed.) (Beijing: China Machine Press) pp22–303
- [16] Fan Y B, Pan Z K, Wang Z Y 2011 *Wavelets Theory, Algorithms and Filter Banks* (Vol. 1) (Beijing: Science Press) pp47–204 (in Chinese) [范延滨, 潘振宽, 王正彦 2011 小波理论算法与滤波器组 1 (北京: 科学出版社) 第 47—204 页]
- [17] Cheng X F, Ma Y, Zhang S B, Zhang Y, Guo Y F 2010 *Chin. J. Sci. Instrum.* **31** 1712 (in Chinese) [成谢锋, 马勇, 张少白, 张瑛, 郭宇锋 2010 仪器仪表学报 **31** 1712]
- [18] Shen H, Wang J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 118702 (in Chinese) [沈韡, 王俊 2011 物理学报 **60** 118702]
- [19] Xiong Q, Zhou S H, Li R M, Wang Z D, Zeng J P 2010 *J. Jishou Univ. (Natural Sciences Edition)* **31** 61 (in Chinese) [熊琦, 周少华, 李锐敏, 王镇道, 曾建平 2010 吉首大学学报 (自然科学版) **31** 61]

# A construction method of biorthogonal heart sound wavelet<sup>\*</sup>

Cheng Xie-Feng Zhang Zheng<sup>†</sup>

(College of Electronic Science and Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

(Received 12 April 2013; revised manuscript received 26 April 2013)

## Abstract

In order to improve the performance of the wavelet analysis in the process of the heart sound signals, in this paper, we construct a wavelet basis which is exclusively used for processing the heart sound signals on the basis of wavelet theory construction. Firstly, we propose a general method of constructing a compactly supported biorthogonal wavelet which has even length filter banks, Secondly, according to the characteristics of heart sound signals, we discuss the structure principle of heart sound wavelet and a synthesis model of heart sound signals based on the heart sound wavelets. Finally, we construct the heart sound wavelet on the basis. In order to highlight the advanced nature and practical application of heart sound wavelet in processing heart sound signals, the theory and numerical simulation of heart sound wavelet are analyzed more comprehensively. Experimental results show that compared with commonly using the db and bior series wavelets, using the heart sound wavelet to process the heart sound signals can obtain good denoising effect, accurate classified information about heart sound and low reconstruction error rate. So the heart sound wavelet provides a new method of deep studying of heart sound feature extraction and identification and has a positive significance in describing the details of the individual characteristics of the heart sounds. The paper designs a method of the special wavelet which is based on the application object, which provides a new approach to the selection of wavelet basis in engineering applications.

**Keywords:** biorthogonal wavelet, heart sound wavelet, constructor method, a synthesis model of heart sound signals

**PACS:** 87.19.ug, 43.60.Hj, 87.85.-d

**DOI:** 10.7498/aps.62.168701

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61271334, 61073115).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: zhangzhengycl@163.com