

复合绝热通道技术在谐相互作用调制的 Landau-Zener 模型中的应用*

胡靖宇¹⁾ 毛腾飞¹⁾ 豆福全¹⁾²⁾ 赵清^{1)†}

1) (北京理工大学物理学院, 北京 100081)

2) (西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2013 年 4 月 8 日收到; 2013 年 5 月 17 日收到修改稿)

将复合绝热通道技术应用于谐相互作用调制的 Landau-Zener 模型, 研究了调制频率和耦合强度在不同的参量条件下系统的跃迁概率, 发现这种方法能够有效抑制跃迁概率的非绝热振荡, 可以在很大的参数范围内使布居数完全反转, 实现超高保真度, 将系统的误差降低到 10^{-4} 以下.

关键词: 复合绝热通道技术, Landau-Zener 模型, 跃迁概率

PACS: 03.65.-w, 03.75.Lm, 82.56.Jn

DOI: 10.7498/aps.62.170303

1 引言

量子计算机是量子物理与信息科技结合的新兴交叉学科, 近年来引起了研究人员的广泛兴趣. 量子计算机的核心是由许多量子处理器构成的多量子体系, 每个量子处理器由两态量子系统构成. 标准 Landau-Zener (LZ) 模型是量子力学中的一个基本的二能级物理模型, 这样的量子模型可以作为量子比特的物理载体. 该模型已经在冷原子等许多领域得到发展^[1-7], 在量子计算领域有着重要的应用. 在不同的物理条件下, 可以利用 LZ 模型讨论体系的非绝热演化和跃迁规律, 以实现一些实际系统的量子操作^[8-10].

绝热通道技术由于其简易性和鲁棒性, 逐渐成为了量子系统相干控制的一种流行工具. 到目前为止, 人们已经提出和证明了多种绝热通道技术, 其中包括: 快速绝热通道技术^[11], 基于激光诱导 Stark 效应的快速绝热通道技术^[12,13], 超绝热通道技术^[14], 分段绝热通道技术^[15,16], 受激拉曼绝热通道

技术^[17] 以及它们的各种变化形式等^[18]. 除此之外, 复合绝热通道技术 (CAP) 是最近发展起来的又一种优化的绝热通道技术, 该方法由 Torosov 等人提出^[19], 通过适当调节复合多脉冲序列中每个脉冲对应的相对相位, 能有效地消除跃迁过程中的非绝热损失, 从而实现高的跃迁概率. 由于这些相位值不受脉冲形状和啁啾的影响, 使得该方法具有普适性. 该技术能使系统在比较大的参量范围内保持高的跃迁概率, 具有高保真度的特点, 在量子信息处理中具有重要的实际意义.

谐相互作用调制的 LZ 模型^[20] 与标准模型有所不同, 虽然考虑的仍然是一个线性驱动场作用下的二能级系统, 但是两个能级之间的耦合不再是常数, 而是一个关于时间的余弦调制函数, 两个能级之间用一个经典的含时偶极场进行耦合, 该系统会出现许多标准 LZ 模型中所没有的新奇量子现象^[20].

本文中, 我们将复合绝热通道技术应用于谐相互作用调制的 LZ 模型, 在不同的模型参量条件下研究了系统的跃迁概率, 并分析了其保真度和误差

* 国家自然科学基金 (批准号: 11275024, 11047010)、甘肃省高等学校基本科研业务费项目和西北师范大学青年教师科研能力提升计划项目 (批准号: NWNLU-LKQN-10-24) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: qzhaoyuping@bit.edu.cn

范围.

2 理论模型和 CAP 技术

描述受一个外加相干场驱动的二态量子系统的薛定谔方程为

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \mathbf{H}(t) \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $a(t)$ 和 $b(t)$ 分别代表粒子处在量子系统两个态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 上的概率幅. $\mathbf{H}(t)$ 是系统的哈密顿量, 对于谐相互作用调制的 LZ 模型, 其哈密顿量为^[20]

$$\mathbf{H}(t) = \frac{Vt}{2}\sigma_z + f(t)\sigma_x, \quad (2)$$

其中 $f(t) = g \cos(\Omega t + \varphi)$, σ_x 和 σ_z 为泡利算符, V 是扫描速率, g 是经典偶极场的振幅, 这里我们也称它为耦合强度, Ω 是经典偶极场的频率, 我们称它为调制频率, φ 是经典偶极场的相位.

通过解哈密顿量的本征方程可以得到系统的两个绝热能级为

$$E(t) = \pm \sqrt{\frac{V^2 t^2}{4} + g^2 \cos^2(\Omega t + \varphi)}. \quad (3)$$

当 $\varphi = 0$ 时, 可以证实在能级随时间的变化过程中, 相邻能级间有免交叉现象出现. 同时 (2) 式中的 $\frac{Vt}{2}$ 为奇函数, $f(t)$ 为偶函数, 满足 CAP 方法的适用条件^[19] (本文的讨论中都假定 $\varphi = 0$).

我们定义该 LZ 模型系统最终的跃迁概率为^[20]

$$P \equiv |b(t = \infty)|^2, \quad (4)$$

即当初态在 $|1\rangle$ 态上时, 在 $t = \infty$ 时刻, 粒子最终能够跃迁到初始时处于空置状态的能级 $|2\rangle$ 上的概率, 也即为系统的保真度, $1 - P$ 就是系统的误差.

量子系统的演化可以由时间演化算符 U 来描述, 由系统在初始时刻 t_i 的概率幅可以导出系统在任意时刻 t 的概率幅, 即

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = U(t, t_i) \begin{pmatrix} a(t_i) \\ b(t_i) \end{pmatrix}.$$

时间演化算符可表示为

$$U_\phi = \begin{bmatrix} c & de^{-i\phi} \\ -d^*e^{i\phi} & c^* \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中 c 和 d 为 Cayley-Klein 参数, ϕ 为驱动场的一个固定的相位偏移.

对于一个具有 N 个脉冲的复合脉冲序列, 如果每个脉冲具有确定的相位 ϕ_k , 则系统总的时间演化算符为

$$U^{(N)} = U_{\phi_N} U_{\phi_{N-1}} \cdots U_{\phi_2} U_{\phi_1}. \quad (6)$$

如果复合脉冲序列个数 $N = 2n + 1$, 通过选择合适的相位, 可以使 $U_{11}^{(N)} = a^N$, 系统的跃迁概率为 $P = 1 - a^{2N}$. 文献 [19] 已经得到了一个关于相位的普适解析公式

$$\phi_k^N = \left(N + 1 - 2 \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \right) \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \frac{\pi}{N}, \quad (7)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, N$. 符号 $\lfloor x \rfloor$ 代表 floor 函数. 利用该公式能够计算出复合脉冲序列中各个脉冲对应的相位值, 从而实现 CAP 技术.

3 结果与讨论

以下我们分几种情况将 CAP 技术应用于谐相互作用调制的 LZ 模型, 来探讨不同的参数取值范围内系统的跃迁概率. 我们采用 4—5 阶龙格-库塔进行数值计算, 时间范围为 $[-500\sqrt{\hbar/V}, 500\sqrt{\hbar/V}]$.

3.1 仅耦合强度 g 可变的情况

对谐相互作用调制的 LZ 模型的哈密顿量, 固定其调制频率 Ω , 取不同的脉冲个数, 并给定耦合强度 g 的取值区间为 $[0, 8]$. 我们获得了不同数量的脉冲作用下, 每组 (Ω, g) 对应的最终跃迁概率 P 和 $1 - P$ 的值, 如图 1 所示.

在调制频率比较低时 (我们取 $\Omega = 0.3$), 单个脉冲在强耦合强度 g 的作用下, 跃迁概率出现了振荡现象, 保真度不稳定 (图 1(a)). 随着脉冲数量的增大, 这种振荡被抑制, 保真度增大. 当脉冲数目增大到 11 个时, 保真度基本稳定在 1, 误差越来越小, 在大部分参数范围已经小于 10^{-4} (图 1(b)).

高频调制时 (我们取调制频率 $\Omega = 40$), 单个脉冲曲线的保真度从 0 迅速上升到最大值, 而后迅速降为 0, 如图 1(c) 所示. 这说明在相对强的耦合强度范围, 系统的保真度几乎为零. 我们增大脉冲数量, 这种情况得到明显的改观: 当应用 11 个脉冲 CAP 技术后, 系统的跃迁概率只在 g 取值范围的一个小区间内有一个波动, 保真度小于 1, 系统在较大的 g 取值范围内保真度已经保持在了 1 左右, 但是此时

在 g 的大部分取值范围内误差都大于 10^{-4} ; 当脉冲数量增加至 13 个时, 对应的曲线在 $g > 2$ 的参数区间内, 布居数发生了完全反转, 保真度一直保持为 1, 同时系统的误差已经降到 10^{-4} 以下, 可以很好的满足量子计算对于高保真度的要求, 如图 1(c), (d) 所示.

3.2 仅调制频率 Ω 可变的情况

以上我们固定调制频率 Ω 的取值而让耦合强度 g 在一个参量区间内变化. 下面, 我们考虑固定耦合强度 g , 而让调制频率 Ω 的值在一个参量区间内改变, 观察 Ω 的变化对最终跃迁概率 P 的影响.

计算结果如图 2 所示. 在小的耦合强度时 (我们取耦合强度 $g = 0.5$), 单个脉冲时跃迁概率小于 1, 而且有振荡现象. 而 3 个脉冲时系统的跃迁概率就达到 1, 而且有效地消除了跃迁概率的振荡, 但是此时误差大于 10^{-4} , 我们继续增加脉冲数量, 取 $N = 5$, 发现保真度保持为 1, 而误差已经小于 10^{-4} (见图 2(a), (b)). 当耦合强度增大时 (取 $g = 1.1$), 我们得到了一致的结果: 增加脉冲的数量, 可以使系统的跃迁概率增大到 1, 同时有效抑制跃迁概率的非绝热振荡. 但是要使系统的误差小于

10^{-4} , 需要的脉冲个数要比小耦合时多得多.

3.3 耦合强度 g 和调制频率 Ω 都可变的情况

如果调制频率 Ω 和耦合强度 g 都发生改变, 最终跃迁概率 P 会如何变化呢? 本部分我们探讨这种情况.

图 3 给出了跃迁概率随调制频率和耦合强度的变化情况, 计算时, 取 Ω 的值在 $[0, 20]$ 之间, 而耦合强度 g 的值在 $[0, 10]$ 之间. 图 3(a), (b), (c) 分别对应于脉冲个数为 $N = 1, 9, 25$ 时跃迁概率的变化.

总体而言, 随着脉冲数量的增加, 红色区域变大, 说明高保真度的参数区间变大. 然而, 不论脉冲数量多少, 在低的调制频率或弱的耦合强度时, 均会出现高跃迁概率区域. 图 3(a) 中 $\Omega \leq 0.5$ 区域对应于谐相互作用调制的 LZ 模型的绝热区域^[20]. 对于其他参数值, 单脉冲时在等高图上也会出现一些小斜扇形区域 (红色) 具有高保真度. 随着脉冲数量的增多, 该区域也不断扩展, 直至脉冲到 $N = 25$ 时, 低保真度区域犹如“汪洋大海”中的一些“岛礁”, 大部分参数区域的保真度都很高了, 如图 3(b), (c) 所示.

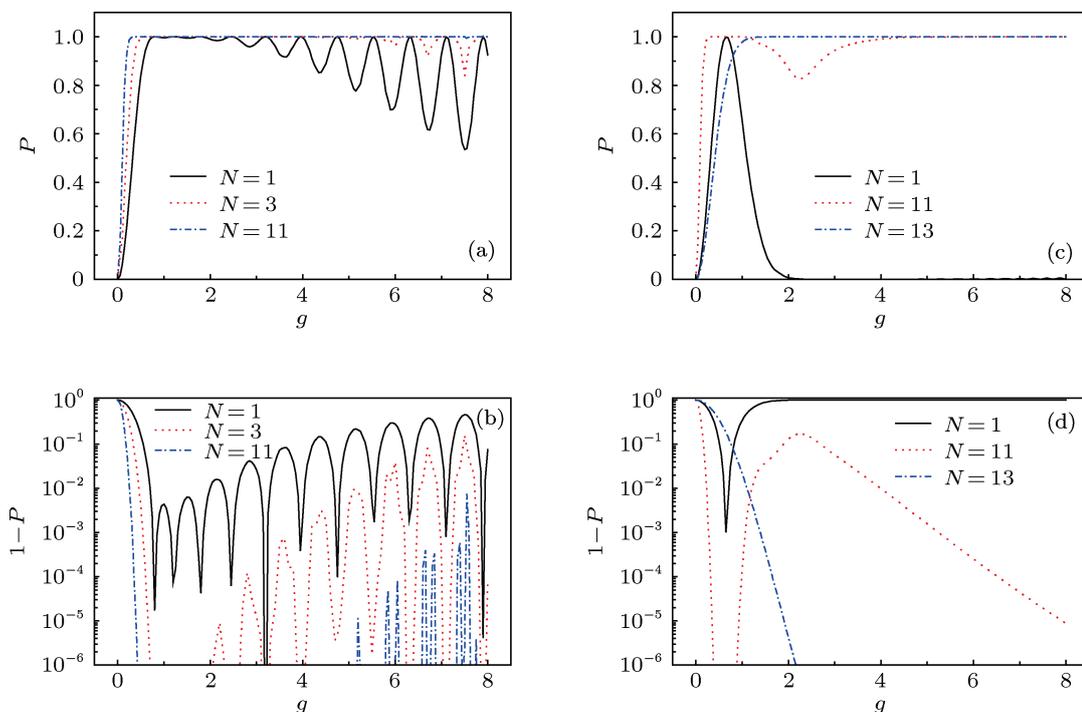


图 1 跃迁概率 P 和 $1-P$ 随耦合强度 g 的变化情况. 时间的单位为 $(\hbar/V)^{1/2}$, g 的单位为 $(\hbar V)^{1/2}$, 调制频率 Ω 的单位为 $(V/\hbar)^{1/2}$ (a) 调制频率 $\Omega = 0.3$; (b) 对应于 (a) 的 $1-P$; (c) 调制频率 $\Omega = 40$; (d) 对应于 (c) 中 $1-P$

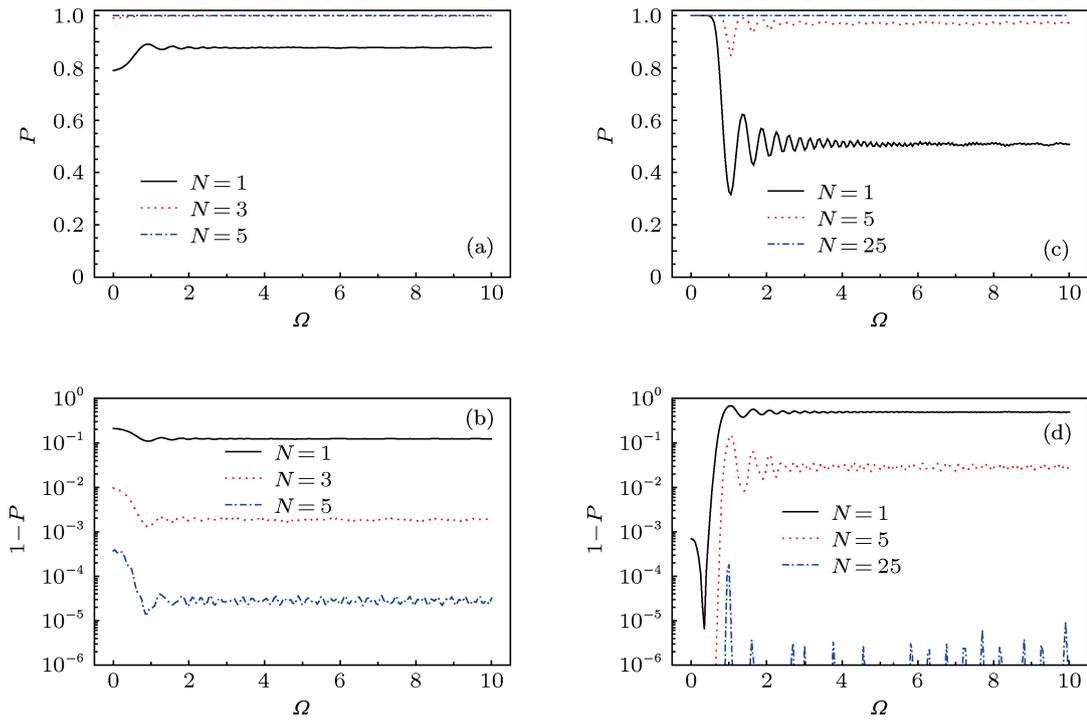


图2 跃迁概率随调制频率 Ω 的变化情况 (a) 耦合强度 $g=0.5$; (b) 对应于 (a) 的 $1-P$ 关系; (c) 耦合强度 $g=1.1$; (d) 对应于 (c) 的 $1-P$

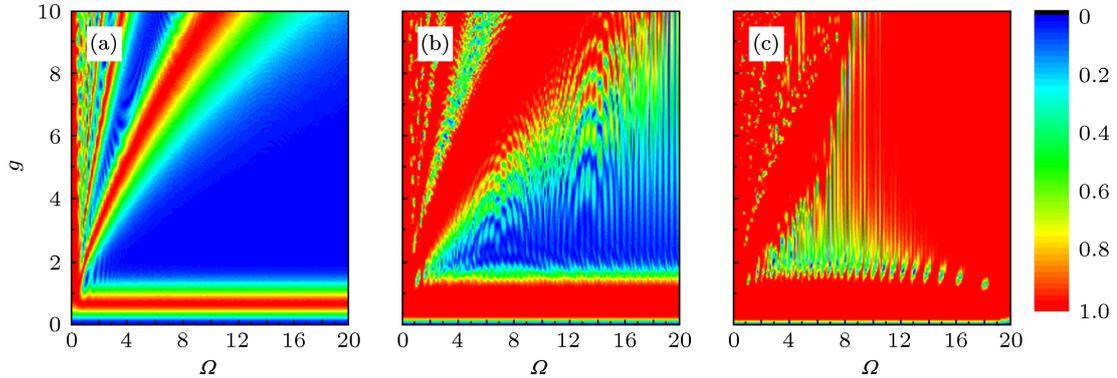


图3 跃迁概率 P 随耦合强度 g 和调制频率 Ω 的变化情况. 时间的单位为 $(\hbar/V)^{1/2}$, 耦合强度 g 的单位为 $(\hbar V)^{1/2}$, 调制频率 Ω 的单位为 $(V/\hbar)^{1/2}$ (a) 单个脉冲作用于系统; (b) 9 脉冲 CAP 的情况; (c) 25 脉冲 CAP 的情况 (红色表示高的跃迁概率, 蓝色表示低的跃迁概率)

4 结论

我们发现将复合绝热通道技术应用于谐相互作用调制的 Landau-Zener 模型, 能够减弱调制频率 Ω 和耦合强度 g 的变化对跃迁概率的影响, 大幅提高系统的跃迁概率. 在比较大的参量区域内, 实现

了布局数的完全反转, 最终的跃迁概率可以保持很大的值, 具有高的保真度. 同时使误差在这些参数范围达到 10^{-4} 以下, 而且随着脉冲数量的增加对系统的优化效果更加明显, 这些结论对于量子信息处理应该是有意义的.

[1] Liu J, Fu L B, Ou B Y, Chen S G, Choi D, Wu B, Niu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404
 [2] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404
 [3] Wang G F, Liu B, Fu L B, Zhao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3733 (in

Chinese) [王冠芳, 刘彬, 傅立斌, 赵鸿 2007 物理学报 **56** 3733]
 [4] Xi Y D, Wang D L, Ding J W, She Y C, Wang F J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3720 (in Chinese) [奚玉东, 王登龙, 丁建文, 余彦超, 王凤姣 2010 物理学报 **59** 3720]

- [5] Huang F, Li H B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020303 (in Chinese) [黄芳, 李海彬 2011 物理学报 **60** 020303]
- [6] Dou F Q, Li S C, Cao H 2011 *Phys. Lett. A* **376** 51
- [7] Wang W Y, Meng H J, Yang Y, Qi P T, Ma Y Y, Ma Y, Duan W S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 087302 (in Chinese) [王文元, 蒙红娟, 杨阳, 祁鹏堂, 马云云, 马莹, 段文山 2012 物理学报 **61** 087302]
- [8] Izmailkov A, Grajcar M, Il'ichev E, Oukhanski N, Wagner T, Meyer H G, Krech W, Amin M H S, Van Den Brink A M, Zagoskin A M 2004 *EuroPhys. Lett.* **65** 844
- [9] Oliver W D, Yu Y, Lee J C, Berggren K K, Levitov L S, Orlando T P 2005 *Science* **310** 1653
- [10] Rubbmark J R, Kash M M, Littman M G, Kleppner D 1981 *Phys. Rev. A* **23** 3107
- [11] Creatore C, Brierley R T, Phillips R T 2012 *Phys. Rev. B* **86** 155442
- [12] Rangelov A A, Vitanov N V, Yatsenko L P, Shore B W, Halfmann T, Bergmann K 2005 *Phys. Rev. A* **72** 053403
- [13] Yatsenko L P, Shore B W, Halfmann T, Bergmann K, Vardi A 1999 *Phys. Rev. A* **60** R4237
- [14] Vitanov N V, Yatsenko L P, Bergmann K 2003 *Phys. Rev. A* **68** 043401
- [15] Shapiro E A, Milner V, Menzel-Jones C, Shapiro M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 033002
- [16] Shapiro E A, Milner V, Shapiro M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 023422
- [17] Sukharev M, Malinovskaya S A 2012 *Phys. Rev. A* **86** 043406
- [18] Dou F Q, Fu L B, Liu J 2013 *Phys. Rev. A* **87** 043631
- [19] Torosov B T, Guerin S, Vitanov N V *Phys. Rev. Lett.* **106** 233001
- [20] Wubs M, Saito K, Kohler S, Kayanuma Y, Hanggi P 2005 *New J. Phys.* **7** 218

Application of the composite adiabatic passage technique in the Landau-Zener model with harmonic interaction modulation*

Hu Jing-Yu¹⁾ Mao Teng-Fei¹⁾ Dou Fu-Quan¹⁾²⁾ Zhao Qing^{1)†}

1) (School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

2) (College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 8 April 2013; revised manuscript received 17 May 2013)

Abstract

In quantum information processing, an extreme high fidelity is needed. We apply a composite adiabatic passage (CAP) technique in the Landau-Zener model with harmonic interaction modulation in order to study the transition probability of the system with different model parameters. We find that this method could suppress the non-adiabatic oscillations in the transition probability and reduce the admissible error. This method could also enlarge the parameter regimes of high transition probability. Because of these good results, the Landau-Zener model with harmonic interaction modulation and CAP technique could be potentially important tools for ultrahigh-fidelity quantum information processing.

Keywords: composite adiabatic passage, Landau-Zener model, transition probability

PACS: 03.65.-w, 03.75.Lm, 82.56.Jn

DOI: 10.7498/aps.62.170303

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11275024, 11047010), the Fundamental Research Funds for the Higher Education Institutions of Gansu Province of China, and the Scientific Research Foundation of NWNNU (Grant No. NWNNU-LKQN-10-24).

† Corresponding author. E-mail: qzhaoyuping@bit.edu.cn