

## 非连续的线性耦合方法实现超混沌系统的同步\*

马军<sup>†</sup> 吴信谊 秦会欣

(兰州理工大学物理系, 兰州 730050)

(2013年3月18日收到; 2013年5月15日收到修改稿)

基于李亚普诺夫稳定性理论, 严格证明了一类超混沌系统在间歇线性单向耦合下可以实现完全同步. 线性控制器通过一个开关函数来调节来实现‘停’和‘控’. 第一类开关函数由一个等幅度矩形波来控制, 控制器的打开和关闭选取不同的间隔周期 ( $T_a, T_b$ ); 第二类开关函数由一个等幅度方波来控制, 方波间隔周期记为  $T_0$ ; 首先通过构造指数类型的李亚普诺夫论证了两类开关函数调制下两个超混沌系统在单向线性耦合下实现同步的可行性问题. 为了定量分析控制效果, 定义了一定周期内控制器的平均能耗. 在数值计算中, 对第一类矩形波函数情形则计算了二参数空间 ( $T_a, T_b$ ) 下响应系统的最大李亚普诺夫指数分布, 同步区域/非同步区域分布, 控制器平均能耗分布, 确认在恰当的间隔周期 ( $T_a, T_b$ ) 和耦合强度下, 两个超混沌系统可以达到完全同步. 对第二类方波函数情形则计算了耦合强度和方波间隔周期  $T_0$  而参数区域内响应系统最大条件李亚普诺夫指数分布, 给定耦合强度下选择不同间隔周期下误差函数演化和平均能耗, 研究表明: 在恰当的耦合强度和间隔周期  $T_0$  下两个超混沌系统可以达到完全同步. 同时发现, 在恰当的耦合强度下控制器的平均能耗最小, 数值计算结果验证了理论分析的可靠性.

**关键词:** 超混沌, 脉冲函数, 指数型李函数, 线性耦合

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.170502

## 1 引言

自然界形态的多样性与其内在的复杂性有关, 通常认为复杂性系统内部存在非线性相互作用. 作为非线性科学的一个重要分支, 物理, 生物, 化学和电路系统中的混沌特性研究自上世纪就引发了人们的广泛关注<sup>[1-5]</sup>. 在非线性科学领域, 利用超混沌系统设计信号发生器, 基于混沌和超混沌系统进行加密和保密通信是工程人员研究的重要内容之一<sup>[6-10]</sup>. 动力系统的同步有多种方式, 如完全同步, 广义同步, 相位同步, 滞后同步<sup>[11-16]</sup>. 在诸多的同步方式中, 人们对自适应同步<sup>[17-23]</sup>和耦合同步问题<sup>[24-26]</sup>进行研究主要利用李亚普诺夫函数方法和矩阵稳定性理论. 对于连续反馈控制, 通常构造包含驱动, 响应系统误差变量和参数的李亚普诺夫函数, 利用李亚普诺夫函数稳定性理论来解析获得控制器的表达式. 一般而言, 构造恰当的李亚普诺夫函数比较难, 需要经过反复测试和验证来

确保李亚普诺夫函数随时间的导数是负定的, 且获得的控制器表达式比较复杂. 实际上, 线性耦合是最简单的作用方式, 如神经元之间通过间隙连接来实现线性电压耦合, 在恰当的耦合强度下可以实现神经元放电的同步. 因此, 严格论证线性耦合实现混沌系统, 超混沌系统的同步, 特别是非连续线性耦合同步具有实际的意义, 因为从工程控制的角度看, 线性耦合在实验上容易操作, 非连续耦合的控制代价比较小, 因为控制器包含的电子元件总是需要一定能耗的. 对于非线性振荡电路系统, 经过标度变换后得到无量纲动力学方程, 其控制器的能耗可以通过计算一定暂态周期内误差函数的积分来估算<sup>[27]</sup>.

利用李亚普诺夫函数方法控制混沌和超混沌系统时, 首先要构造一个正定的且包含系统变量和参数的李亚普诺夫函数. 一般而言, 通常采用系统变量的平方和来构造李亚普诺夫函数, 如此确保李亚普诺夫函数是恒定正的. 文献<sup>[28]</sup>在研究超混沌系统非线性耦合时提出构造一类恒大于零的指数

\* 国家自然科学基金(批准号: 11265008)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: hyperchaos@163.com

型李亚普诺夫函数, 论证了系统参数已知且固定情况下非线性连续耦合对线性耦合同步的调制作用, 而对单向非连续间歇耦合同步控制没有讨论. 我们将以一类超混沌系统为例, 讨论非连续线性耦合实现超混沌系统的同步问题, 并估算控制器的能耗, 最后对该方法进行讨论, 以便把该方法推广到其他超混沌系统和网络的同步控制中.

## 2 模型和方法

1996年 Tamaševičius 等<sup>[29]</sup>构造了一类四变量的超混沌电路, 利用无量纲变化得到一组四变量的非线性方程组, 在恰当的参数下, 该电路方程和系统可以产生超混沌行为, 该模型进一步被改造为如下动力学系统:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= ax_1 - x_2 - x_3, \\ dx_2/dt &= x_1 - bx_2, \\ dx_3/dt &= (x_1 - cx_3 - x_4)/\mu, \\ dx_4/dt &= (x_3 - d(x_4 - 1)H(x_4 - 1))/\varepsilon, \end{aligned} \quad (1)$$

其中第一和第四变量对应电路中两个电容器两端的电压, 第二和第三变量对应电路中流过电感元件的电流, 且  $a, b, c, d, \mu, \varepsilon$  是对电路方程进行无量纲变化引入的参数, 其具体物理意义对应原振荡电路中电子元件的参数. 阶跃函数  $H(x)$  在电路中一般可通过单通性二极管实现, 其数学关系为  $H(x) = 1, x \geq 0; H(x) = 0, x < 0$ . 通过计算系统 (1) 的李亚普诺夫指数, 选择恰当的参数可以确保该系统至少具有 2 个大于零的李亚普诺夫, 使得该系统呈现超混沌态. 如文献 [24] 的计算结果表明, 当参数  $a = 0.6, b = 0.05, c = 0.015, d = 10, \mu = 0.3, \varepsilon = 0.33$  时, 系统 (1) 则有两个正的李亚普诺夫指数  $\lambda_1 = 0.11, \lambda_2 = 0.06$ , 因此, 系统出现超混沌态. 在非连续线性耦合下, 受控的响应系统为

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= ay_1 - y_2 - y_3 + kp(t)(x_1 - y_1), \\ dy_2/dt &= y_1 - by_2, \\ dy_3/dt &= (y_1 - cy_3 - y_4)/\mu, \\ dy_4/dt &= (y_3 - d(y_4 - 1)H(y_4 - 1))/\varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

其中系数  $k$  是耦合强度,  $p(t)$  为开关函数, 决定控制器是否工作. 在研究同步问题前, 首先定义两个系统对应的误差变量为  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ , 对应系统误差变量的演化为

$$de_1/dt = ae_1 - e_2 - e_3 - kp(t)e_1,$$

$$\begin{aligned} de_2/dt &= e_1 - be_2, \\ de_3/dt &= (e_1 - ce_3 - e_4)/\mu, \\ de_4/dt &= (e_3 - d(x_4 - 1)H(x_4 - 1) \\ &\quad + d(y_4 - 1)H(y_4 - 1))/\varepsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

构造正定的李亚普诺夫函数如下:

$$\begin{aligned} V &= \exp[0.5Ae_1^2 + 0.5Be_2^2 + 0.5Ce_3^2 \\ &\quad + 0.5De_4^2 + \int f(t)dt] > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $A, B, C, D, f(t)$  分别为待定的正系数和函数, 根据李亚普诺夫稳定性理论, 求解李亚普诺夫函数 (4) 对时间导数负定的条件如下:

$$\begin{aligned} dV/dt &= V[Ae_1\dot{e}_1 + Be_2\dot{e}_2 + Ce_3\dot{e}_3 + De_4\dot{e}_4 + f(t)] \\ &= V[Aae_1^2 - Ae_1e_2 - Ae_1e_3 - Aakp(t)e_1^2 \\ &\quad + Be_2e_1 - Bbe_2^2 + \frac{C}{\mu}e_3e_1 - \frac{cC}{\mu}e_3^2 - \frac{C}{\mu}e_3e_4 \\ &\quad + \frac{D}{\varepsilon}e_4e_3 + \frac{dD}{\varepsilon}e_4(-(x_4 - 1)H(x_4 - 1) \\ &\quad + (y_4 - 1)H(y_4 - 1)) + f(t)]. \end{aligned} \quad (5)$$

为确保 (5) 式恒定为负, 可选择恰当的系数  $A, B, C, D, f(t)$ , 消除掉交叉项, 如

$$\begin{aligned} B &= A = C/\mu = D/\varepsilon; \\ f(t) &= Ade_4[(x_4 - 1)H(x_4 - 1) - (y_4 - 1)H(y_4 - 1)] \\ &\quad + Aa(k_c - 1)e_1^2 - Ae_4^2, \end{aligned} \quad (6)$$

其中参数  $k_c$  为单向线性耦合下实现同步所需要的临界耦合强度, 根据 (6) 式, (5) 式可以简化为

$$\begin{aligned} dV/dt &= V[-Aakp(t)e_1^2 - Abe_2^2 - Ace_3^2 \\ &\quad - Ae_4^2 + Aak_e e_1^2] \\ &= V[-Aa(kp(t) - k_c)e_1^2 - Bbe_2^2 \\ &\quad - Ace_3^2 - Ae_4^2]. \end{aligned} \quad (7)$$

为简单起见, 如果在 (4) 式中选取  $A = 1$ , 则 (4), (7) 式进一步可简化为

$$\begin{aligned} V &= \exp[0.5e_1^2 + 0.5e_2^2 + 0.5\mu e_3^2 \\ &\quad + 0.5\varepsilon e_4^2 + \int f(t)dt] > 0; \\ f(t) &= de_4[(x_4 - 1)H(x_4 - 1) - (y_4 - 1) \\ &\quad \times H(y_4 - 1)] + a(k_c - 1)e_1^2 - e_4^2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$dV/dt = V[-a(kp(t) - k_c)e_1^2 - be_2^2 - ce_3^2 - e_4^2]. \quad (9)$$

(9) 式表明, 选择恰当的开关函数和耦合强度, 则可以使得李亚普诺夫函数 (4) 或者 (8) 稳定收敛, 根据李亚普诺夫稳定性理论可以判定两个超混沌系统

逐渐达到同步. 其中临界耦合强度  $k_c$  取决于系统本身以及开关函数  $p(t)$ , 从数值计算角度看, 这可以通过计算响应系统的最大条件李亚普诺夫指数小于零来获得这个临界耦合强度, 通常这个临界耦合强度要比连续 ( $p(t) = 1$ ) 单向线性耦合实现同步所需要的临界耦合强度大一些.

下面分析开关函数的形式和条件选择问题, 系统 (1), (2) 在没有外界控制的情况下, 系统变量在有限的相空间演化, 两个系统对应变量的误差序列在一定阶段内有可能是自然收敛的, 那么在此阶段就可以不对系统 (2) 进行连续控制. 实际上, 对系统 (2) 反馈控制一个时间段后, 会驱使系统 (2) 输出变量逐渐逼近系统 (1) 的对应变量, 关闭控制器后, 前阶段的控制可使得系统 (2) 在没有控制情况下继续靠近系统 (1) 的轨道. 即就是, 对系统 (2) 打开控制器工作一段时间后关闭控制器, 让系统 (2) 自由演化一段时间, 然后再打开控制器. 关键是控制器的开/关时刻如何确定问题, 一种简单的方法就是让开关函数在  $T_a$  时间段内打开控制器, 然后在  $T_b$  时间段内关闭, 如此反复, 在一定的耦合强度下两个系统则可以实现完全同步. 即将两个系统耦合同步分为两个阶段, 一个是非耦合阶段, 两个系统误差自然收敛称为自治相, 另一阶段两个系统在耦合作用下相互靠近, 误差受迫收敛称为控制相. 文献 [26] 利用矩阵稳定性理论讨论了两个超混沌系统在间歇线性耦合方法实现同步的问题, 设控制器作用于系统的持续时间间隔为  $T_a$ (控制同步相阶段), 控制器对系统无作用的时间间隔为  $T_b$ (自治相阶段), 那么任意时刻  $t$  控制器的开关 (第一类矩形波函数) 可以采用如下形式:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & (n-1)T_a + (n-1)T_b, \\ & \leq t \leq nT_a + (n-1)T_b, \\ 0, & nT_a + (n-1)T_b < t < nT_a + nT_b, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (10)$$

即控制器由一个非等间隔的矩形波函数来控制 (控制 — 不控制 — 控制 — 不控制 ...), 若当  $T_b = T_a = T_0$  时, 该开关函数即简化为我们常见的等幅度等间隔方波函数 (第二类方波函数), 如 (控制 — 不控制 — 控制 — 不控制 ...):

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 2(n-1)T_0 < t \leq (2n-1)T_0, \\ 0, & (2n-1)T_0 < t \leq 2nT_0, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (11a)$$

或者 (不控制 — 控制 — 不控制 — 控制 — 不控制 ...)

$$p(t) = \begin{cases} 0, & 2(n-1)T_0 < t \leq (2n-1)T_0, \\ 1, & (2n-1)T_0 < t \leq 2nT_0, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (11b)$$

从 (9) 式来看, 在控制同步相阶段由于  $p(t) = 1$ , 控制器持续工作一段时间  $T_a$ , 在恰当的耦合强度下李亚普诺夫函数 (4) 或者 (8) 稳定收敛, 使得两个系统对应变量的误差减小, 系统对应变量相互逼近. 在无控制器工作阶段 (自治相阶段), 可以构造类似李亚普诺夫函数为

$$V = \exp[0.5e_1^2 + 0.5e_2^2 + 0.5\mu e_3^2 + 0.5\epsilon e_4^2 + \int g(t) dt] > 0; \quad g(t) = de_4[(x_4 - 1)H(x_4 - 1) - (y_4 - 1)H(y_4 - 1)] - ae_1^2 - e_4^2. \quad (12)$$

无控制器作用下李亚普诺夫函数变化为

$$dV/dt = V[-be_2^2 - ce_3^2 - e_4^2] < 0, \quad (13)$$

即两个系统的对应误差函数被约束在一定范围内, 避免大幅度增加和轨道偏离, 即误差函数在一定程度上收敛, 但不严格收敛到零而是处于一个有限值范围内. 因为在相邻的上一控制阶段, 在控制器的直接作用下, 系统 (2) 逐渐逼近系统 (1), 在断开控制器的前一时刻, 相当于重新给系统 (2) 赋予了一组新的比较靠近系统 (1) 轨道的初始值; 由于系统输出的误差  $e_1$  是有限值, 在无控制阶段内 (12) 式的误差函数也有一定的上限, 在下一个控制阶段内, 系统误差进一步被衰减, 使得响应系统轨道逼近驱动系统, 如此反复控制下, 两个系统则可以实现完全同步. 在数值计算中方波开关函数 (11) 的实现可以通过取整函数  $\text{int}(\ast)$  和取余函数  $\text{mod}(\ast, 2)$  来实现, 如  $\text{int}(t/T_0)$  的值为奇数时, 该时间段内控制器开启, 而当  $\text{int}(t/T_0)$  的值为偶数时, 控制器关闭, 那么就相当于用一个等幅度脉冲信号或者方波信号来决定控制器的开关. 类似的, 在数值计算中矩形波开关函数 (10) 也可以通过取整函数  $\text{int}(\ast)$  来实现, 如在

$$(T_a + T_b) \times \text{int}[t/(T_a + T_b)] \leq t \leq (T_a + T_b) \times \text{int}[t/(T_a + T_b)] + T_a,$$

控制器工作, 在

$$T_a + (T_a + T_b) \times \text{int}[t/(T_a + T_b)] < t$$

$$\langle (T_a + T_b) \times \text{int}[t/(T_a + T_b)] + T_a + T_b, \rangle$$

控制器则关闭 (反之亦然).

在实际电路中, 电压通常为容易测量的物理量, 这里以系统第一输出变量为例来说明控制器开关时刻的选择问题. 从动力学控制角度来看, 设任意时刻第一变量误差为  $e_1(t)$ , 前一时刻第一变量误差为  $e_1(t - \Delta t)$ , 其中  $\Delta t$  为时间间隔. 如果任意时刻  $e_1(t)$  恒定小于前一时刻  $e_1(t - \Delta t)$ , 那么就不需要连续控制, 否则, 控制器需要打开. 但从实验角度来看, 对两个系统输出的时间序列差进行实时判断来调整控制器的“停”, “控”具有一定的难度, 因此在这里不再讨论.

显然, 要控制同步过程有两个关键参数需要选择, 一个是耦合强度, 一个是控制时间段的周期  $T_0(T_a)$  值的确定. 选择恰当的耦合强度和周期  $T_0$ , 使得在比较小的控制代价下达到超混沌系统的同步. 这里以计算控制器的能耗大小作为标准来确定耦合强度和周期  $T_0$ , 定义无量纲方程下的控制器平均能耗为

$$\Delta \bar{E} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |kp(t)(x_1 - y_1)| dt, \quad (14)$$

其中  $t_1$  为控制器开始工作的时刻,  $T$  为计算所用的暂态时间. 一般而言, 反馈强度越大, 达到控制目标所需要的时间相对比较短, 但根据 (14) 式知, 控制器能耗也和耦合强度有关. 因此, 选择恰当的耦合强度对于降低控制器的能耗至关重要, 这可以通过数值计算来确定.

为了分析两个系统的同步程度, 定义两个系统的误差函数为

$$\theta(e_1, e_2, e_3, e_4) = \sum_{i=1}^4 e_i^2, \quad e_i = x_i - y_i. \quad (15)$$

如果两个系统达到了完全同步, 则误差函数随着时间的演化将逐渐衰减为零.

### 3 数值计算和分析

在数值计算中采用四阶龙格-库塔方法, 积分中时间步长 0.001, 两个系统的参数都选择在超混沌区域, 任意选择的初始值分别为 (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (1, 1.5, 2.0, 2.5). 为了方便对比和计算, 可通过计算响应系统条件李亚普诺夫指数小于零或者饱和增益法 (逐渐增加耦合强度) 来确定耦合同步所需要

的临界耦合强度  $k_c$ . 这里先讨论第二类开关函数如 (11a) 式作用下, 即线性控制器在等间隔方波信号调节下两个超混沌系统的同步问题, 首先通过大量数值计算来分析耦合强度  $k$  和方波间隔周期  $T_0$  对同步过程的作用问题, 图 1 给出了耦合强度  $k$  和方波间隔周期  $T_0$  相空间上的响应系统两个最大李亚普诺夫指数分布图.

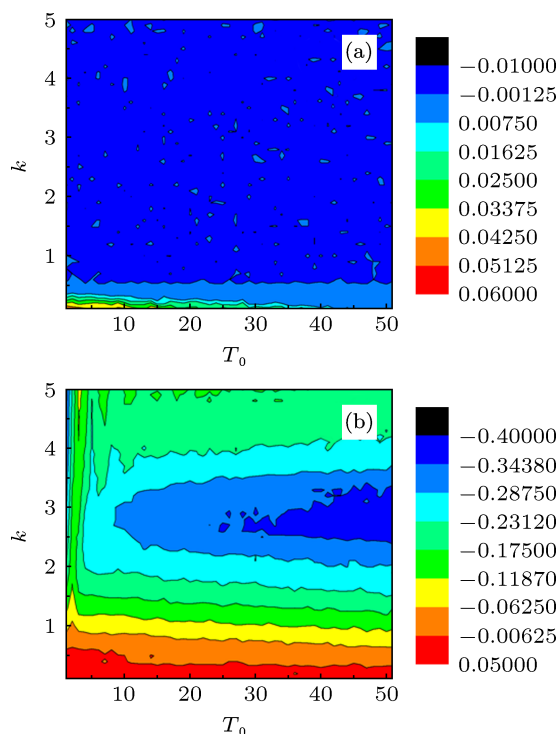


图 1 控制器在不同耦合强度和方波间隔周期  $T_0$  下, 响应系统两个最大李亚普诺夫指数在二参数空间的分布

图 2 的结果表明, 只要耦合强度大于一定的临界值 (约 0.5), 方波类型的开关函数 (11a) 式的间隔  $T_0$  可以在很大范围内选取间隔周期, 两个超混沌系统仍然可以达到稳定同步. 在耦合强度相对较小的情况下, 方波形式的开关函数的间隔周期不能选取太小, 否则系统就不能达到同步. 为了直观了解方波间隔周期的值对同步的影响, 我们选取了耦合强度  $k = 0.6$  时, 不同方波间隔周期下两个系统的误差演化, 计算结果见图 2.

图 2 的结果表明, 在耦合强度超过临界值情况下, 开关函数如果选择比较大的方波间隔周期  $T_0$ , 则使得两个超混沌系统能在更短的暂态周期下达到完全同步, 如果开关函数的方波间隔周期小于临界值约 ( $T_0 - 2.2$ ), 那么两个超混沌系统就不能达到同步, 控制器的平均能耗也就相对比较大.

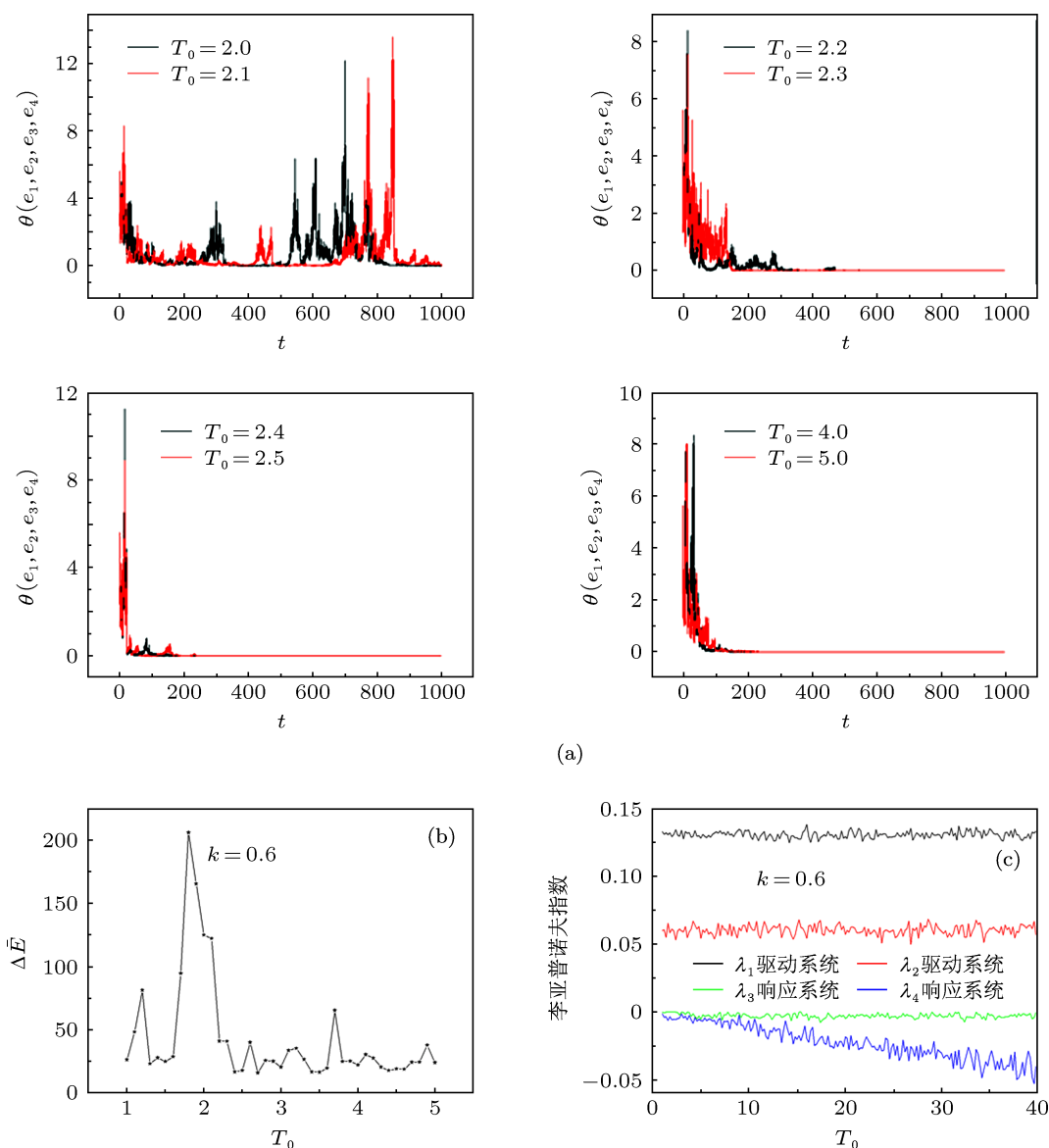


图2 耦合强度  $k = 0.6$ . 不同方波间隔周期  $T_0$  下误差函数 (15) 式的演化 (a), 和 1000 时间单位内控制器的平均能耗 (b), 驱动-响应系统在单向非连续线性耦合下四个最大李亚普诺夫指数随方波间隔周期  $T_0$  的变化关系 (c). 其中  $\lambda_1, \lambda_2$  是驱动系统的两个最大李亚普诺夫指数,  $\lambda_3, \lambda_4$  是响应系统的两个最大李亚普诺夫指数, 数值计算中采用随机初始值

以上研究了一种方波开关函数控制下单向线性耦合同步问题, 可以看到在一定的耦合强度下, 方波开关函数可以实现两个超混沌系统的同步, 且同步暂态过程比较长. 我们进一步验证了第一类矩形波开关函数实现单向线性非连续同步问题. 为了简单验证该方法的可靠性, 我们分别计算了不同耦合强度下,  $T_a$ — $T_b$  参数空间内响应系统两个最大李亚普诺夫指数的空间分布, 数值计算结果见图 3.

图 3 的结果表明, 在一定的耦合强度下, 选择恰当的矩形波间隔  $T_a, T_b$ , 响应系统的最大条件李亚普诺夫指数将小于零, 两个系统逐渐达到同步. 另一方面, 在比较大的耦合强度下, 矩形波间隔  $T_a, T_b$  可以在更大范围内选取比例, 使得两个超混沌系

统达到完全同步. 同样, 我们在图 3 的参数空间选择几组矩形波间隔  $T_a, T_b$  开调节开关函数和控制器, 来验证当  $T_a, T_b$  选择同步区域的数值时, 两个超混沌系统是否能达到同步, 这里就省略了数值模拟结果. 我们进一步计算了控制器在 (10) 式控制下的同步区域分布和控制器平均能耗, 数值计算结果见图 4 和图 5.

在计算同步区域过程中, 从 900 时间单位开始判断, 如果误差函数 (15) 式的值如果小于 0.00001 则判定系统为同步状态, 标记为 1, 否则为不同步态, 标记为 0. 可以看到图 4 的分布结果和图 3(c) 的分布状况相似. 我们进一步计算了该耦合强度下的控制器的平均能耗, 数值计算结果见图 5.

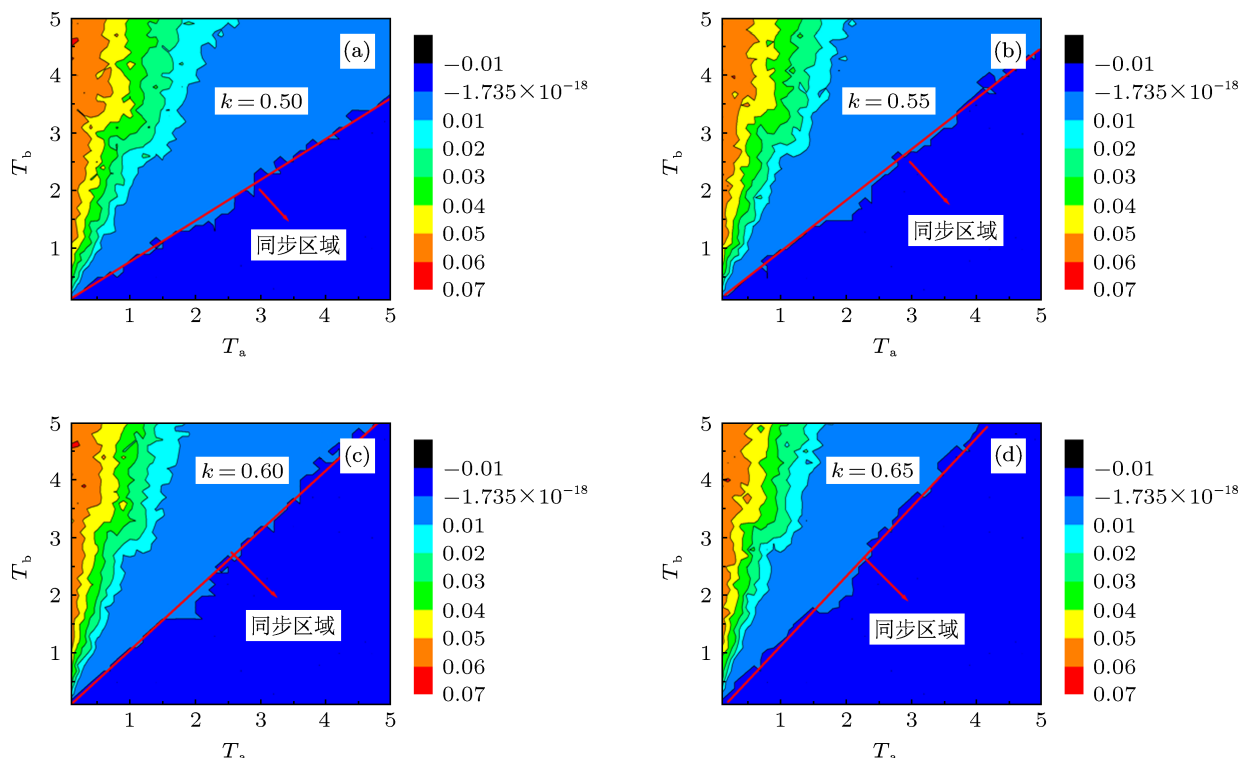


图3 不同的耦合强度下,在调节控制器的开关函数选取不同的开/关时间间隔下,响应系统最大李亚普诺夫指数的分布.图中红色线近似区分了同步和非同步区域的分界位置, $T_a-T_b$ 的变化范围为[0.1,1.5]

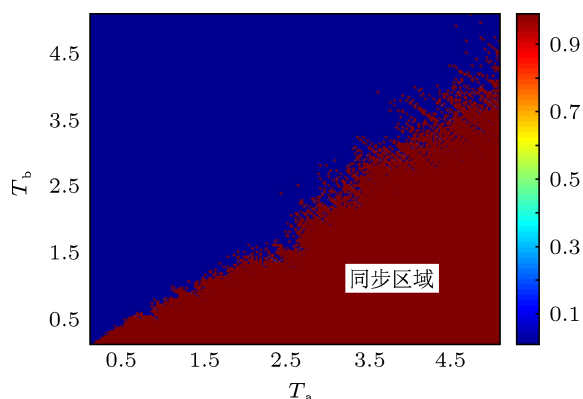


图4 耦合强度  $k = 0.6$ , 调节控制器的开关函数选取不同的开/关时间间隔下,同步区域和非同步区域分布

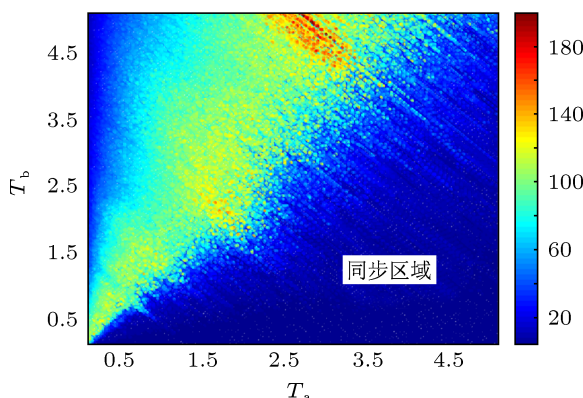


图5 耦合强度  $k = 0.6$ , 调节控制器的开关函数选取不同的开/关时间间隔下,控制器在 1000 时间单位内的平均能耗分布

图 5 的分布状况和图 4, 图 3(c) 的分布相似, 且同步区域中控制器对应的平均能耗相对比较小, 原因在于系统达到同步后, 控制器关闭, 能耗为零.

以上分析了线性控制器被两类不同开关函数调节下, 两个超混沌系统同步问题. 通过构造指数型李亚普诺夫函数和稳定性分析, 以及计算响应系统的条件李亚普诺夫指数分布等手段可以确定两个超混沌系统达到完全同步的参数条件范围. 相对而言, 比较大的耦合强度可以缩短达到同步的暂态时间, 但控制器消耗的平均功率也比较大. 相比连续控制, 非连续或者间歇控制下控制器消耗能量相对很小, 在实验上也有可操作性. 另一方面, 虽然基于常规的李亚普诺夫函数方法可以得到其他类型的控制器来实现自适应同步, 但控制器的形式一般比较复杂, 在电路实验上实现相对复杂. 最后讨论下该方法对其他动力系统同步控制的可行性问题, 如前分析, 构造指数类型的李亚普诺夫函数过程与驱动-响应系统对应变量误差函数有关, 对于确定性微分方程描述的动力学系统都可以采用如上方法来分析和验证. 对于一些包含乘积类型(如  $x_i x_j$ , 其中  $x_i, x_j$  都是系统的变量)的动力学系统, 构造的指数类型李亚普诺夫函数一般同时包含对应误差函数的乘积项(如  $e_i e_j, e_i = x_i - y_i, e_j = x_j - y_j$  都是系统对应变量的误差). 对于一些包含多卷吸引子的

系统<sup>[30-42]</sup>,如通常利用非线性分段函数(动力系统方程中非线性函数有多段或者多个斜率)来控制系统产生多卷混沌吸引子,利用如上方法也可以实现线性耦合同步控制.另外,在研究规则振子网络同步控制问题中,网络结点之间一般满足最近邻连接,网络结点之间通常采用线性耦合方式如神经网络中的间隙连接(gap junction)方式,利用本文以上讨论结果,可以探索网络振子在间歇性线性耦合实现同步问题,这对实验上模拟大量振子,如振荡电路,的同步可能具有参考意义.

## 4 结论

通过构造指数型的李亚普诺夫函数,严格证明

了单变量线性耦合在非连续控制下可以实现两个超混沌系统的完全同步.讨论了该线性控制器被两类开关函数调节下两个超混沌系统的同步问题.第一类开关函数是一个等幅但不等间隔的矩形函数,控制器在一个周期段 $T_a$ 段工作,而在相邻的周期段 $T_b$ 关闭,研究发现,在恰当的耦合强度 $k$ ,间隔周期 $T_a, T_b$ 下,两个超混沌系统也可以达到稳定同步.第二类开关函数是一个等幅度等间隔的方波函数,该开关函数等间隔的打开和关闭,研究发现在恰当的间隔周期和耦合强度下两个超混沌系统可以达到稳定同步.定义了无量纲的能耗函数来计算控制器能耗对耦合强度的影响.进一步的数值计算结果验证了理论分析的可靠性.

- [1] Boccaletti S, Grebogi C, Lai Y C 2000 *Phys. Rep.* **329** 103
- [2] Perc M, Marhl M 2003 *Biophys. Chem.* **104** 509
- [3] Li Q D, Yang X S 2003 *Electron Lett.* **39** 1306
- [4] Kodba S, Perc M, Marhl M 2005 *Eur. J. Phys.* **26** 205
- [5] Krese B, Perc M, Govekar E 2010 *Chaos* **20** 013129
- [6] Alsing P M, Gavrielides A, Kovanis V 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6302
- [7] VanWiggeren G D, Roy R 1998 *Science* **279** 1198
- [8] Xia W, Cao J D 2008 *Chaos* **18** 023128
- [9] Wu D, Li J J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120505
- [10] Wang X Y, Zhang N, Ren X L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 020507
- [11] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G 2002 *Phys. Rep.* **366** 1
- [12] DeShazer D J, Breban R, Ott E 2004 *Int. J. Bifurcat Chaos* **14** 3205
- [13] Lu J G, Xi Y G, Wang X F 2004 *Int. J. Bifurcat Chaos* **14** 1431
- [14] Kim M Y, Sramek C, Uchida A 2006 *Phys. Rev. E* **74** 016211
- [15] Lu J G, Hill D J 2008 *IEEE Trans Circ. Syst. II* **55** 586
- [16] Cao J D, Ho W C, Yang Y 2009 *Phys. Lett. A* **373** 3128
- [17] Lu J, Cao J D, Ho W C 2008 *IEEE Trans Circ. Syst. I* **55** 1347
- [18] Yu W, Cao J D 2007 *Physica A* **375** 467
- [19] Guan J B 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 020502
- [20] Feng Y F, Zhang Q L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120504
- [21] Li S Y, Ge Z M 2011 *Nonlinear Dynam* **64** 77
- [22] Wang Z L, Shi X R 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer Simulat* **16** 46
- [23] Wang C N, Ma J, Jin W Y 2012 *Dynam Syst.* **27** 253
- [24] Wang T B, Qin T F, Chen G Z 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1851 (in Chinese) [王铁邦, 覃团发, 陈光旨 2001 物理学报 **50** 1851]
- [25] Jiang P Q, Luo X S, Wang B H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1937 (in Chinese) [蒋品群, 罗晓曙, 汪秉宏 2002 物理学报 **51** 1937]
- [26] Ma J, Liao G H, Mo X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5585 (in Chinese) [马军, 廖高华, 莫晓华 2005 物理学报 **54** 5585]
- [27] Sarasola C, Torrealdea F J, d'Anjou A 2002 *Math Comput Simulat* **58** 309
- [28] Li F, Jin W Y, Ma J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 240501 (in Chinese) [李凡, 靳伍银, 马军 2012 物理学报 **61** 240501]
- [29] Tamaševičius A, Namajūnas A, Čenys A 1996 *Electron Lett.* **32** 957
- [30] Yaşçin M E 2007 *Chaos, Solitons & Fractals* **34** 1659
- [31] Li N, Li J F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110512 (in Chinese) [李农, 李建芬 2011 物理学报 **60** 110512]
- [32] Lü J H, Chen G R, Yu X G, Leung H 2004 *IEEE Trans Circ. Syst. I* **51** 2476
- [33] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 25 (in Chinese) [禹思敏, 林清华, 丘水生 2003 物理学报 **52** 25]
- [34] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 (in Chinese) [禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500]
- [35] Wang F Q, Liu C X, Lu J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3289 (in Chinese) [王发强, 刘崇新, 逯俊杰 2006 物理学报 **55** 3289]
- [36] Lü J H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **16** 775
- [37] Wang F Q, Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1983 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2007 物理学报 **56** 1983]
- [38] Chen L, Peng H J, Wang D S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3337 (in Chinese) [谌龙, 彭海军, 王德石 2008 物理学报 **57** 3337]
- [39] Hu G S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3734 (in Chinese) [胡国四 2009 物理学报 **58** 3734]
- [40] Bao B C, Liu Z, Xu J P, Zhu L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1540 (in Chinese) [包伯成, 刘中, 许建平, 朱雷 2010 物理学报 **59** 1540]
- [41] Chen S B, Ceng Y C, Xu M L, Chen J S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020507 (in Chinese) [陈仕必, 曾以成, 徐茂林, 陈家胜 2011 物理学报 **60** 020507]
- [42] Lin Y, Wang C Y, Xu H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 240503 (in Chinese) [林愿, 王春华, 徐浩 2012 物理学报 **61** 240503]

# Realization of synchronization between hyperchaotic systems by using a scheme of intermittent linear coupling\*

Ma Jun<sup>†</sup> Wu Xin-Yi Qin Hui-Xin

(Department of Physics, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

(Received 18 March 2013; revised manuscript received 15 May 2013)

## Abstract

Based on the Lyapunov stability theory, it is confirmed that complete synchronization can be realized under intermittent linear coupling. The linear controller is selected as 'stop' or 'on control' by using a switch function; while the first switch function is realized by using a rectangular wave with the same amplitude, and the controller turns on/off in the period  $T_a$ ,  $T_b$  alternately. The second switch function is adjusted by a square wave with the same amplitude, and the interval period is marked as  $T_0$ . At first, a class of exponential Lyapunov function is designed to discuss the reliability and possibility of complete synchronization induced by indirectional linear coupling when the controller is adjusted by two types of switch function. The averaged power consumption of controller within a transient period is defined to measure the cost and efficiency of this scheme. In numerical studies, for the case of first switch function (rectangular wave), the distribution of the largest conditional Lyapunov function for the response system is calculated in the two-parameter space for interval period  $T_a$  vs.  $T_b$ , the synchronization area vs. nonsynchronization area, the distribution of averaged power consumption in the parameter space  $T_a$  vs.  $T_b$ . It is also confirmed that complete synchronization can be reached at appropriate  $T_a$ ,  $T_b$ , and coupling intensity. In the case of the second switch function, the distribution of the largest conditional Lyapunov function for the response system is calculated in the two-parameter space for coupling intensity  $k$  vs. interval period  $T_0$ , and the series of error function and averaged power consumption. It is found that complete synchronization can be realized at appropriate coupling intensity and interval period  $T_0$ . It is also found that the averaged power consumption of controller within a transient period can reach a smallest value at an appropriate coupling intensity. Numerical results are consistent with the theoretical analysis.

**Keywords:** hyperchaos, pulse function, exponential Lyapunov function, linear coupling

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.170502

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11265008).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: hyperchaos@163.com