基于反演自适应动态滑模的 FitzHugh-Nagumo 神经元混沌同步控制*

于海涛 王江†

(电气与自动化工程学院, 天津大学, 天津 300072)

(2013 年 4 月 22 日收到; 2013 年 5 月 22 日收到修改稿)

本文采用反演自适应动态滑模控制实现耦合 FitzHugh-Nagumo (FHN) 神经元混沌同步. 该方法将自适应技术与反演控制方法相结合, 通过设计新型切换函数, 采用动态滑模控制律, 实现了带有不确定参数的耦合 FHN 神经元混沌放电同步. 研究表明该方法可以有效地削弱系统的抖振, 从而避免破坏神经元的本质特性, 且响应速度快. 仿真结果证明了该控制方法的有效性.

关键词: 自适应, 动态滑模控制, FitzHugh-Nagumo 神经元, 混沌同步

PACS: 05.45.Xt **DOI:** 10.7498/aps.62.170511

1 引 言

同步普遍存在于神经系统中, 如今在很多生理实验和仿真研究中都可以观察到这种现象 [1−5]. 同步在神经信息处理过程中发挥着重要的作用, 是大脑实现联想、记忆等功能的基础. 大脑对神经信息的处理是通过不同脑区的神经元协同完成的, 而同步作为神经元集群放电活动的典型表现形式, 是神经信息处理的重要机理. 如中枢神经系统中的同步活动在不同脑区神经信息传递和处理过程中发挥着至关重要的作用 [6]; 感觉运动皮层中的同步振荡可以整合和协调运动控制所需的各种信息 [7]. 因此, 控制神经元的同步化放电活动具有重要的生理意义.

近年来, 采用先进控制理论的方法实现神经元同步得到了广泛研究. 例如 Pérez 等人利用反馈线性化方法实现了 Hodgkin-Huxley (HH) 神经元的同步控制 [8]; Wang 等人采用反演技术控制耦合 FitzHugh-Nagumo (FHN) 神经元的同步活动 [9]; Che 等人采用滑模控制实现了低频外电场作用下 Hindmarsh-Rose 神经元的混沌同步 [10]; 文献 [11] 进一步将自适应控制应用于带有不确定性混沌神经元系统的同步研究中. 这些控制方法都能够实现神经元系统的同步放电, 但是也存在一些不足, 其控制输入信号往往带有很大的抖振, 可能会破坏神经元的本质特性. 为此, 本文提出一种基于自适应动态滑模的耦合神经元同步控制方案. 动态滑模控制是通过设计新型切换函数或将常规滑模控制中的切换函数通过微分环节构成新的切换函数, 该切换函数与系统控制输入的一阶或高阶导数有关, 可将不连续项转移到控制的一阶或高阶导数中去, 得到在时间上连续的动态滑模控制律, 从而有效地降低了系统的抖振 [12−14]. 由于动态滑模控制方法削弱抖振效果明显, 如今已经被广泛应用于非线性系统控制 [15−20].

本文针对带有不确定参数的耦合 FHN 神经元系统, 将自适应技术与反演控制方法相结合, 通过设计新型切换函数, 采用动态滑模控制方法, 实现耦合 FHN 神经元系统的同步控制, 并且消弱系统的抖振.

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 61072012) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jiangwang@tju.edu.cn

2 耦合 FHN 神经元模型

1952 年, Hodgkin 和 Huxley 提出了著名的 HH 神经元模型, 该模型采用 4 维常微分方程来描述神经元放电等非线性动力学行为 [21]. 此后, FitzHugh 和 Nagumo 等人对 HH 模型进行了简化, 提出了二维 FHN 神经元模型 [22].

本文考察两个电突触耦合的 FHN 神经元, 结构如图 1 所示, 其动力学方程为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} =& X_1(X_1-1)(1-rX_1)-Y_1 \\
& -g(X_1-X_2)+I_0(t), \\
\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t} =& bX_1, \\
\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t} =& X_2(X_2-1)(1-rX_2)-Y_2 \\
& -g(X_2-X_1)+I_0(t), \\
\frac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}t} =& bX_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

其中 X_i 和 Y_i 为神经元 i 的两个状态变量, g 为神经元之间的耦合强度. I_0 为外界电场激励, 具体形式如下:

$$I_0(t)=\frac{A}{\omega}\cos(\omega t), \tag{2}$$

其中 A 为刺激强度, $\omega=2\pi f$ 为刺激频率.

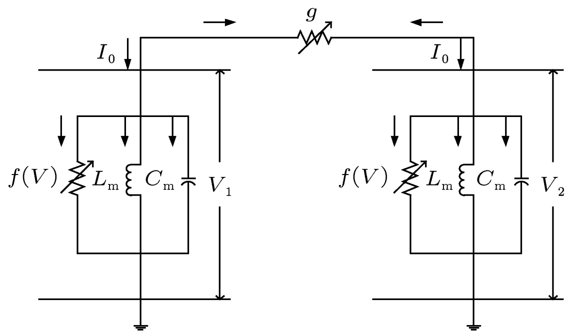

图 1 耦合神经元系统的电路图

本文设定模型参数为 $b=1$, $r=10$, $g=0.1$, $A=0.1$, $f=127.1$, 初始状态为: $X_1(0)=0.1$, $Y_1(0)=0.2$, $X_2(0)=0.2$, $Y_2(0)=0.5$. 在该参数条件下, 耦合神经元产生混沌放电 [23], 系统的相平面曲线和状态误差曲线分别如图 2 和图 3 所示. 明显可见, 耦合神经元放电是不同步的. 根据文献 [24] 所得结果可知, 在未加控制器的条件下, 当且仅当耦合强度超过阈值 $g_c=0.5$ 时, 耦合神经元系统才能达到混沌同步放电.

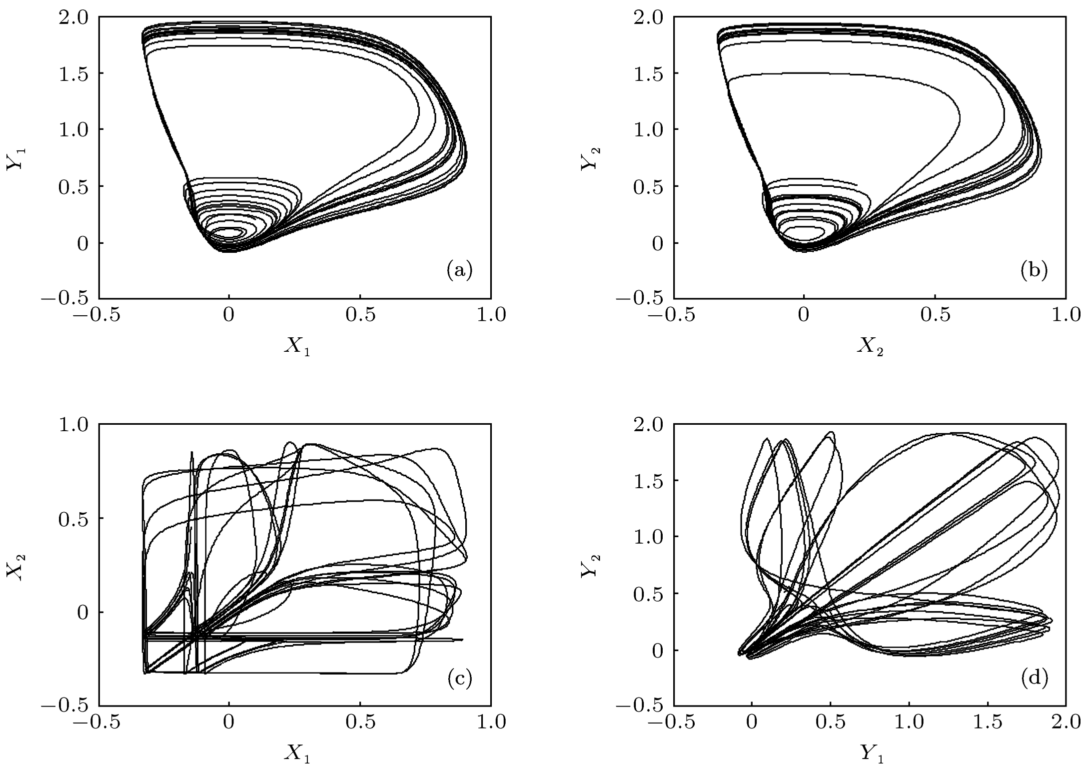

图 2 耦合神经元系统的相平面图 (a) (X_1,Y_1); (b) (X_2,Y_2); (c) (X_1,X_2); (d) (Y_1,Y_2)

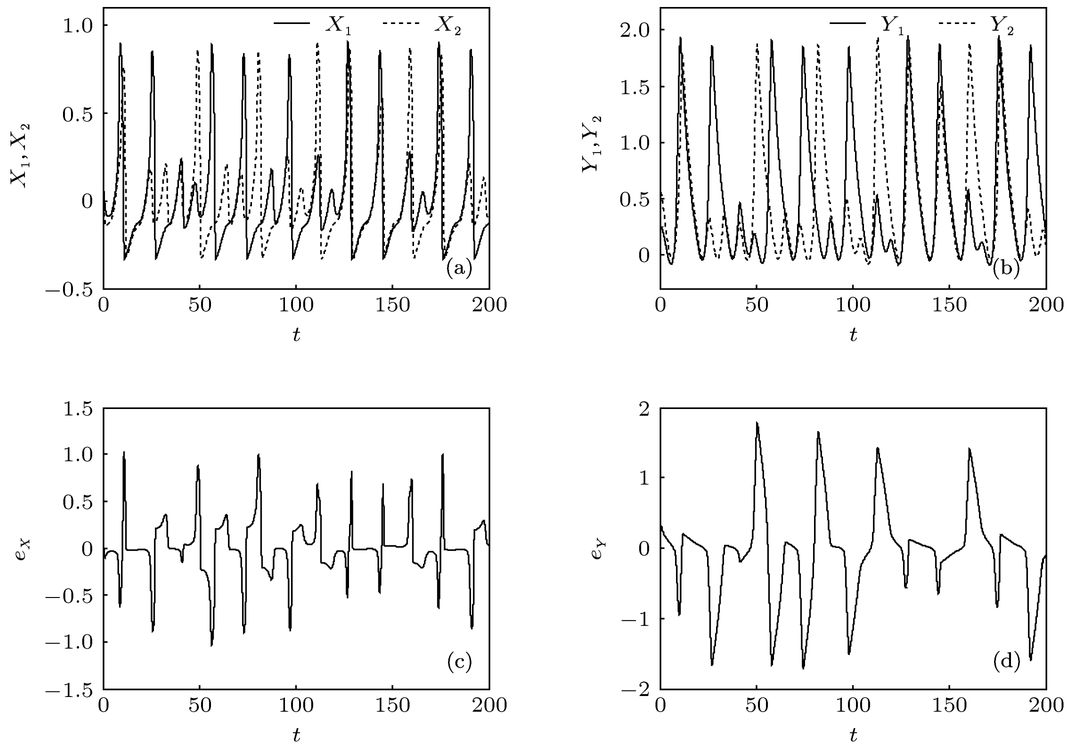

图 3 耦合神经元的放电时间序列 (a) X_1 和 X_2; (b) Y_1 和 Y_2. 耦合神经元系统的同步误差; (c) $e_X = X_2 - X_1$; (d) $e_Y = Y_2 - Y_1$

3 反演自适应动态滑模控制

考虑受控的耦合 FHN 神经元系统, 模型方程如下:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} =& X_1(X_1-1)(1-rX_1)-Y_1-g(X_1-X_2)\\
&+I_0(t),\\
\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t} =& bX_1,\\
\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t} =& X_2(X_2-1)(1-rX_2)-Y_2-g(X_2-X_1)\\
&+I_0(t)+u,\\
\frac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}t} =& bX_2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中 u 为外界施加的控制信号. 假设神经元之间的耦合强度 g 未知.

设定系统的同步误差为 $e_X = X_2 - X_1$, $e_Y = Y_2 - Y_1$, 则

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_X =& X_2(X_2-1)(1-rX_2)-Y_2-g(X_2-X_1)\\
&-[X_1(X_1-1)(1-rX_1)-Y_1-g(X_1-X_2)]\\
&+u,\\
\dot{e}_Y =& b(X_2-X_1),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

可以写成如下形式:

$$
\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{B}(F(x)+u), \tag{5}
$$

其中

$$
\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_X \\ e_Y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2g & -1 \\ b & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
F(x) =& X_2(X_2-1)(1-rX_2)\\
&-X_1(X_1-1)(1-rX_1).
\end{aligned}
$$

针对误差系统 (5), 我们采用反演自适应动态滑模控制方法, 设计动态控制律, 削弱系统的抖振, 实现带有不确定参数的耦合神经元系统的混沌同步控制.

考虑如下控制系统:

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_X &= -2ge_X - e_Y + F + u,\\
\dot{e}_Y &= e_X,\\
\dot{u} &= v,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中 v 为辅助项, 用于设计动态滑模控制律. u 表示控制信号, 耦合强度 g 未知.

设切换函数为

$$
\begin{aligned}
s &= c_1(e_X+e_Y)+e_X-2\hat{g}_1e_X-e_Y+F+u \\
&= (c_1+1-2\hat{g}_1)e_X+(c_1-1)e_Y+F+u,
\end{aligned} \tag{7}
$$

其中 $c_1>0$, $\hat{g}_1$ 为未知参数 g 的第一个估计值.

定义变量 $z=e_X+e_Y$, 根据 (6) 和 (7) 式可知

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \dot{e}_X+\dot{e}_Y \\
&= s-c_1(e_X+e_Y)-2(g-\hat{g}_1)e_X \\
&= s-c_1z-2(g-\hat{g}_1)e_X.
\end{aligned} \tag{8}
$$

定义第一个 Lyapunov 函数

$$
V_1=\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}(g-\hat{g}_1)^2, \tag{9}
$$

则其导数为

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= z\dot{z}-(g-\hat{g}_1)\dot{\hat{g}}_1 \\
&= z[s-c_1z-2(g-\hat{g}_1)e_X]-(g-\hat{g}_1)\dot{\hat{g}}_1 \\
&= z[s-c_1z]-(g-\hat{g}_1)(2ze_X+\dot{\hat{g}}_1).
\end{aligned} \tag{10}
$$

设定自适应律为

$$
\dot{\hat{g}}_1=-2ze_X, \tag{11}
$$

则 (10) 式可以写成

$$
\dot{V}_1=zs-z^2c_1. \tag{12}
$$

由 (7) 和 (8) 式可知

$$
\begin{aligned}
\dot{s} =&(c_1+1-2\hat{g}_1)\dot{e}_X-2e_X\dot{\hat{g}}_1 \\
&+(c_1-1)\dot{e}_Y+\dot{F}+\dot{u} \\
=&(c_1+1-2\hat{g}_1)(s-c_1z-2(g-\hat{g}_1)e_X-e_X) \\
&+4ze_X^2+(c_1-1)e_X+v+\dot{F} \\
=&v+(c_1+1-2\hat{g}_1)(s-c_1z+2\hat{g}_1e_X-e_X) \\
&+[4ze_X^2+(c_1-1)e_X+\dot{F}] \\
&-(c_1+1-2\hat{g}_1)2ge_X \\
=&v+\psi_1+\psi_2g,
\end{aligned} \tag{13}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\psi_1 =&(c_1+1-2\hat{g}_1)(s-c_1z+2\hat{g}_1e_X-e_X) \\
&+[4ze_X^2+(c_1-1)e_X+\dot{F}], \\
\psi_2 =&-(c_1+1-2\hat{g}_1)2e_X.
\end{aligned}
$$

令动态滑模控制律为

$$
\dot{u}=v=-\psi_1-\psi_2\hat{g}_2-z-ksgn(s), \tag{14}
$$

其中 $\hat{g}_2$ 为未知参数 g 的第二个估计值, 则 (13) 式可以写成

$$
\dot{s}=-z+(g-\hat{g}_2)\psi_2-ksgn(s), \tag{15}
$$

其中 $k>0$.

定义第二个 Lyapunov 函数为

$$
V_2=V_1+\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}(g-\hat{g}_2)^2, \tag{16}
$$

则其导数为

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_2 =&\dot{V}_1+s\dot{s}-(g-\hat{g}_2)\dot{\hat{g}}_2 \\
=&zs-z^2c_1+s[-z+(g-\hat{g}_2)\psi_2-k\mathrm{sgn}(s)] \\
&-(g-\hat{g}_2)\dot{\hat{g}}_2 \\
=&-z^2c_1-k|s|+(g-\hat{g}_2)(s\psi_2-\dot{\hat{g}}_2).
\end{aligned} \tag{17}
$$

令自适应律为

$$
\dot{\hat{g}}_2=s\psi_2=s(c_1+1-2\hat{g}_1)2e_X, \tag{18}
$$

则式 (17) 可以写成

$$
\dot{V}_2=-z^2c_1-k|s|\leqslant 0. \tag{19}
$$

可见, V_2 满足李雅普诺夫定理, 则 s 将在有限时间内收敛到 0. 由此可知, 本文采用反演自适应动态滑模控制方法设计的动态控制律, 可以实现带有不确定参数的耦合 FHN 神经元系统的同步控制, 即 $\lim\limits_{t\to\infty}e_X(t)=0$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}e_Y(t)=0$, 且能够有效地削弱系统的抖振.

下面通过仿真来证明反演自适应动态滑模控制方法的有效性. 设定控制参数为: $c_1=2$, $k=0.5$, 仿真结果如图 4 至图 7 所示. 在控制信号施加之前, 耦合 FHN 神经元混沌放电, 其动作电位是不同步的; 从图 4 可以看出, 施加动态滑模控制之后, 神经元之间的动态误差 e_X 和 e_Y 很快趋于 0, 系统达到了混沌放电同步, 具有很好的鲁棒性. 图 5 给出了控制后耦合神经元系统的相平面图. 可见采用反演自适应动态滑模方法可以实现耦合神经元的同步控制. 由图 6 可以看出, 控制输入信号 u 在时间上是连续平滑的, 证实该控制方法可以有效地消除系统抖振. 另外, 图 7 给出了未知参数 g 的估计值 $\hat{g}_1$ 和 $\hat{g}_2$ 的变化曲线. 明显可见, 当 t 接近 3.2 时, 估计值 $\hat{g}_1$ 和 $\hat{g}_2$ 趋于稳定.

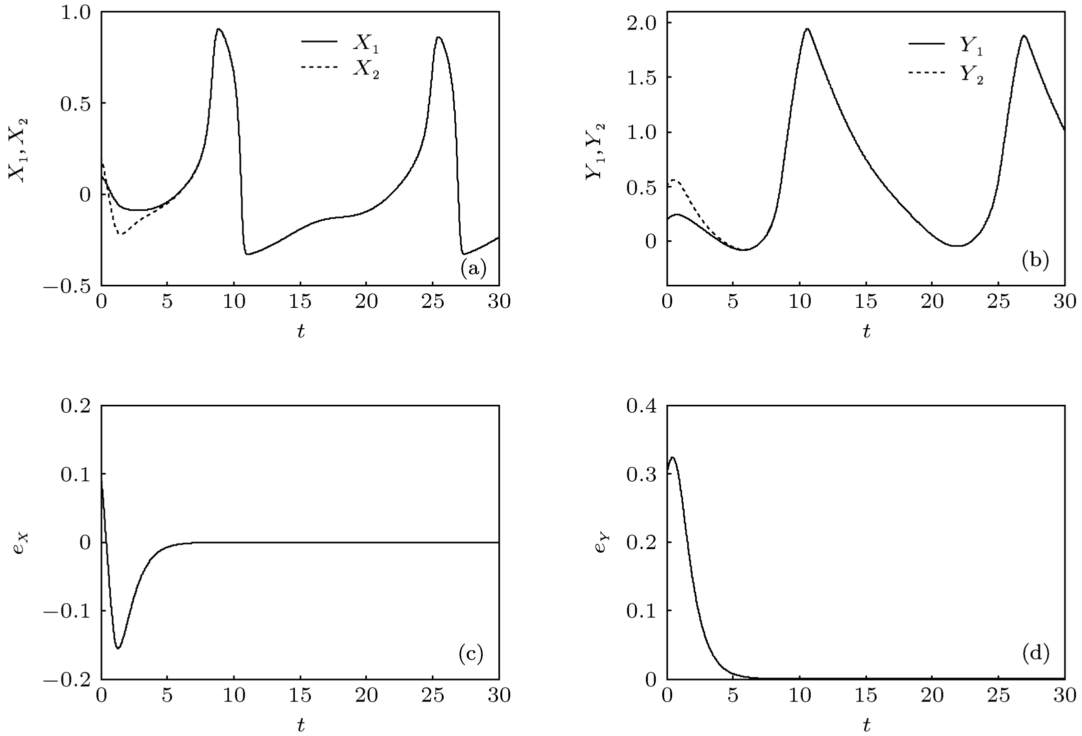

图 4 控制后耦合神经元的放电时间序列 (a) X_1 和 X_2; (b) Y_1 和 Y_2, 控制后耦合神经元系统的同步误差; (c) $e_X = X_2 - X_1$; (d) $e_Y = Y_2 - Y_1$

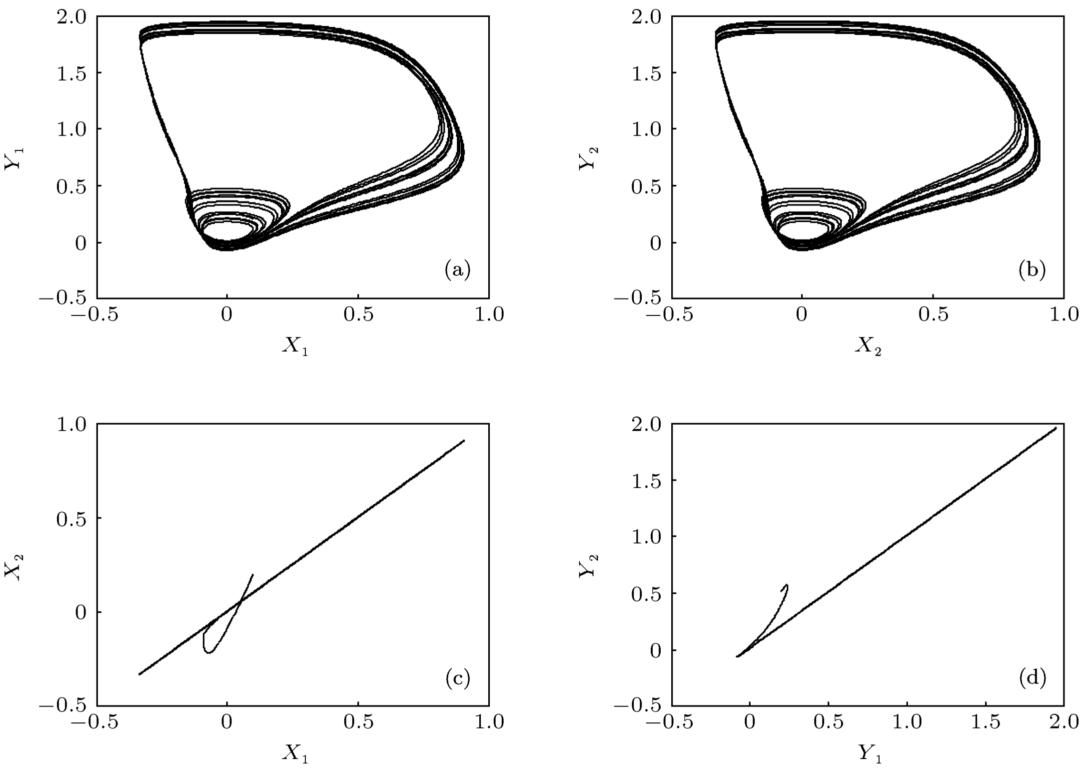

图 5 控制后耦合神经元系统的相平面图 (a) (X_1, Y_1); (b) (X_2, Y_2); (c) (X_1, X_2); (d) (Y_1, Y_2)

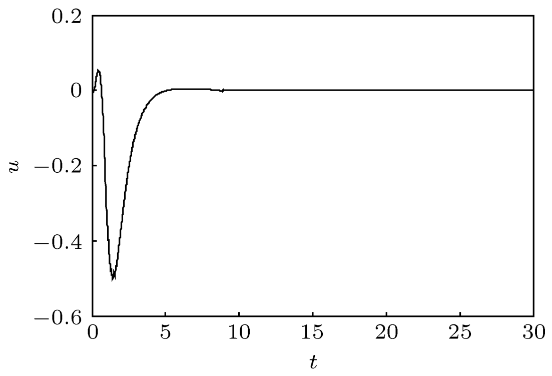

图 6 控制输入信号 u

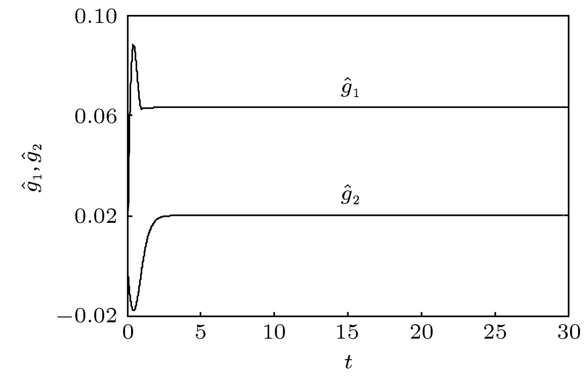

图 7 未知参数 g 的估计值 $\hat{g}_1$ 和 $\hat{g}_2$

4 结 论

本文采用反演自适应动态滑模的方法实现耦合 FHN 神经元的混沌同步控制. 针对带有不确定参数的耦合 FHN 神经元系统, 将自适应技术与反演控制方法相结合, 通过设计新型切换函数, 采用动态自适应滑模控制律, 实现了耦合 FHN 神经元的混沌放电同步. 与其他常规反馈控制相比, 该方法可以有效地削弱系统控制信号的抖振, 且响应时间较短, 具有很好的鲁棒性. 仿真结果证明了该控制方法的有效性. 因此, 该方案可以广泛应用于带有不确定性神经元系统的同步控制.

[1] Manyakov N V, Van Hulle M M 2008 *Chaos* **18** 037130

[2] Elson R C, Selverston A I, Huerta R, Rulkov N F, Rabinovich M I, Abarbanel H D I 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5692

[3] Gray C M, König P, Engel A K, Singer W 1989 *Nature* **338** 334

[4] Fell J, Fernández G, Klaver P, Elger C E, Fries P 2003 *Brain Res. Rev.* **42** 265

[5] Wang Q Y, Lu Q S, Chen G R, Guo D H 2006 *Phys. Lett.* A **356** 17

[6] Singer W 1993 *Annu. Rev. Physiol.* **55** 349

[7] MacKay W A 1997 *Trends Cogn. Sci.* **1** 176

[8] Cornejo-Pérez O C, Femat R 2005 *Chaos Solitons Fract.* **25** 43

[9] Wang J, Deng B, Fei X Y 2006 *Chaos Solitons Fract.* **29** 182

[10] Che Y Q, Wang J, Tsang K M, Chan W L 2010 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **11** 1096

[11] Che Y Q, Wang J, Zhou S S, Deng B 2009 *Chaos Solitons Fract.* **40** 1333

[12] Sira-Ramírez H, Llanes-Santiago O 1993 *Proceeding of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control* San Antonio, America, December 15–17, 1993 p1422

[13] Li C H, Sun Y, Luo Q 2009 *Computer Engineering and Design* **30** 185 (in Chinese) [李春华, 孙约, 罗琦 2009 计算机工程与设计 **30** 185]

[14] Chen D Y, Liu Y X, Ma X Y, Zhang R F 2011 *Chin. Phys.* B **20** 120506

[15] Chao H M, Hu Y M 2001 *Control and Decision* **16** 565 (in Chinese) [晁红敏, 胡跃明 2001 控制与决策 **16** 565]

[16] Huang L L, Qi X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 080507 (in Chinese) [黄丽莲, 齐雪 2013 物理学报 **62** 080507]

[17] Lü L, Li Y S, Wei L L, Yu M, Zhang M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120504 (in Chinese) [吕翎, 李雨珊, 韦琳玲, 于淼, 张檬 2012 物理学报 **61** 120504]

[18] Cao H F, Zhang R X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050510 (in Chinese) [曹鹤飞, 张若洵 2011 物理学报 **60** 050510]

[19] Lü L, Yu M, Wei L L, Zhang M, Li Y S 2012 *Chin. Phys.* B **21** 100507

[20] Chen D Y, Zhang R F, Ma X Y, Wang J 2012 *Chin. Phys.* B **21** 120507

[21] Hodgkin A L, Huxley A F 1952 *J. Physiol.* **117** 500

[22] FitzHugh R 1961 *Biophys. J.* **1** 445

[23] Thompson C J, Bardos D C, Yang Y S, Joyner K H 1999 *Chaos Solitons Fract.* **10** 1825

[24] Wang J, Deng B, Tsang K M 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 469

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 62, No. 17 (2013) 170511

Chaos synchronization of FitzHugh-Nagumo neurons via backstepping and adaptive dynamical sliding mode control*

Yu Hai-Tao Wang Jiang†

(*School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin* 300072, *China*)

(Received 22 April 2013; revised manuscript received 22 May 2013)

Abstract

In this paper, backstepping and adaptive dynamical sliding mode control is used to achieve chaos synchronization of coupled FitzHugh-Nagumo (FHN) neurons. The proposed controller consists of a combination of dynamical sliding mode control and adaptive backstepping technique. Based on a new switching function, the combined algorithm yields a design of dynamical sliding mode control law, which can realize chaos synchronization of coupled FHN neurons with uncertain parameters. It is shown that the proposed approach can effectively remove the chattering characteristic of the system, so that the intrinsic dynamics of neurons can avoid to be destroyed. Furthermore, it has rapid control performance. The simulation results have demonstrated the effectiveness of the control scheme.

Keywords: adaptive, dynamical sliding mode control, FitzHugh-Nagumo neuron, chaos synchronization

PACS: 05.45.Xt **DOI:** 10.7498/aps.62.170511

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61072012).

† Corresponding author. E-mail: jiangwang@tju.edu.cn