奇异变质量单面非完整系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性与守恒量*

徐超 李元成†

(中国石油大学 (华东) 理学院, 青岛 266580)

(2013 年 4 月 6 日收到; 2013 年 5 月 23 日收到修改稿)

在群的无限小变化下, 研究奇异变质量单面非完整系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性. 建立系统运动微分方程的 Nielsen 形式, 给出系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性的定义、判据和命题, 得到系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性所导致的 Noether 守恒量和广义 Hojman 守恒量. 最后给出说明性算例说明结果的应用.

关键词: 奇异变质量系统, 单面非完整约束, Nielsen 方程, Noether-Lie 对称性

PACS: 11.30.−j, 45.20.Jj, 02.20.Sv **DOI:** 10.7498/aps.62.171101

1 引 言

动力学系统的对称性与守恒量的研究具有重要的数学意义和物理意义, 是分析力学近代发展方向之一. 对称性理论的发展为寻找系统守恒量提供了强有力的工具. 时至今日, 寻找守恒量的方法主要有: Noether 对称性 [1−5], Lie 对称性 [6−10] 和 Mei 对称性 [11−14], 并被广泛应用到各种不同系统的研究.

目前, 力学系统的对称性与守恒量的研究在相对论变质量力学系统、可控变质量系统、变质量高阶非完整系统等其他专门问题中取得丰硕成果 [15−26], 但奇异变质量单面非完整系统的研究未见报道. 研究发现，奇异系统在物理学中更为常见, 对其对称性的研究也取得一些重要进展 [27−31]. 本文则在群的无限小变化下, 研究奇异变质量单面非完整系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性. 建立系统运动微分方程的 Nielsen 形式, 给出系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性的定义、判据和命题, 得到系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性所导致的 Noether 守恒量和广义 Hojman 守恒量. 最后举例说明结果的应用.

2 奇异变质量单面非完整系统的运动微分方程

研究 N 个质点组成的力学系统, 在 t 时刻第 i 个质点的质量为 $m_i(i=1,\cdots,n)$, 在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻由质点分离 (或并入) 的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$. 设系统的位形由广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定, m_i 是 t,q_s 的函数, 即

$$m_i=m_i(t,q_s). \tag{1}$$

假设系统的运动受有 g 个单面 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\geqslant 0,\quad (\beta=1,2,\cdots,g). \tag{2}$$

则系统的运动微分方程表示为 Nielsen 形式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\dot q_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial L}{\partial q_s}\\&=Q_s+P_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s},\quad (s=1,2,\cdots,n),\\&\lambda_\beta\geqslant 0,f_\beta\geqslant 0,\lambda_\beta f_\beta=0.\end{aligned} \tag{3}$$

---

* 中国石油大学 (华东) 研究生自主创新基金 (批准号: 11CX06088A) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liyuanch@upc.edu.cn

其中, $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 是系统的 Lagrange 函数, $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力, $\lambda_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)$ 为约束乘子. P_s 为广义反推力

$$P_s=\dot{m}_i(\mu_i+\dot{r}_i)\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{r}_i\cdot\dot{r}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}. \tag{4}$$

这里 $r_i,\dot{r}_i$ 分别为第 i 个质点的矢径和速度, μ_i 为微粒相对第 i 个质点的相对速度. 展开 (3) 式, 有

$$\begin{aligned}h_{sk}\ddot{q}_k=&2\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial t}+Q_s\\&+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}+P_s,\\&\lambda_\beta\geqslant0,f_\beta\geqslant0,\lambda_\beta f_\beta=0.\end{aligned} \tag{5}$$

如果 $\det(h_{sk})=\det(\partial^2L/\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k)=0$, 系统是奇异系统.

当系统处于约束上时, 即方程 (2) 中取等号, 有

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,\quad(\beta=1,2,\cdots,g). \tag{6}$$

约束方程 (6) 加在虚位移上的 Chetaev 条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0. \tag{7}$$

引入 Nielsen 算子: $N_s=\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{\partial}{\partial q_s}$. 其中, $\varLambda_s=\lambda_\beta\dfrac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}$ 是广义约束反力. 则由方程 (3) 得

$$N_s(L)=Q_s+\varLambda_s+P_s,\ (s=1,2,\cdots,n). \tag{8}$$

假设由方程 (6) 和 (8) 在方程积分之前可以求出约束乘子 $\lambda_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)$.

因系统为奇异系统, 不能由方程 (8) 解出所有的广义加速度, 我们假设可以解出一部分广义加速度

$$\ddot{q}_i=A_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),(i=1,\cdots,r;0\leqslant r\leqslant n). \tag{9}$$

与 $(n-r)$ 个关系式

$$\varphi_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,(j=1,\cdots,n-r). \tag{10}$$

当系统脱离约束时, 有

$$\begin{aligned}\lambda_\beta=&0,\varLambda_s=0,\\f_\beta=&f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})>0,\\&(s=1,\cdots,n;\beta=1,\cdots,g).\end{aligned} \tag{11}$$

方程 (3) 可表示为

$$N_s(L)=Q_s+P_s,(s=1,2,\cdots,n). \tag{12}$$

同理, 我们假设可以由方程 (12) 解出一部分广义加速度

$$\ddot{q}_i=B_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),(i=1,\cdots,r;0\leqslant r\leqslant n), \tag{13}$$

和 $(n-r)$ 关系式

$$\psi_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,(j=1,\cdots,n-r). \tag{14}$$

3 系统的 Noether-Lie 对称性与 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量

定 义 如果奇异变质量单面非完整系统 Nielsen 方程的对称性同时为 Noether 对称性和 Lie 对称性, 这样的对称性称为系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性.

引入时间和广义坐标的无限小变换

$$\begin{aligned}t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),q_s^*(t^*)\\=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\end{aligned} \tag{15}$$

其中 ε 是无限小参数, ξ_0 和 ξ_s 是无限小生成元.

当系统处于约束上时, 方程 (6) 在无限小变化下的不变性归结为如下限制方程:

$$X^{(1)}(f_\beta)=0, \tag{16}$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}.$$

推导方程 (8) 的过程中用到了 Chetaev 条件 (7), 这个条件对 δq_s 施加了限制, 即附加限制方程为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0,(\beta=1,\cdots,g). \tag{17}$$

Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变化下的不变性. 对于奇异变质量单面非完整系统, 如果存在规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元, ξ_0,ξ_s 满足如下 Noether 等式:

$$\begin{aligned}&L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q_s+\varLambda_s+P_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\&+\dot{G}_N=0,\quad(f_\beta=0),\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q_s+P_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\&+\dot{G}_N=0,\quad(f_\beta>0).\end{aligned} \tag{19}$$

则这种不变性称为系统 Nielsen 方程的 Noether 对称性.

系统在约束上, 方程 (8) 的 Lie 对称性确定方程表示为

$$\begin{aligned}&X^{(2)}[N_s(L)]\\=&X^{(1)}(Q_s+\varLambda_s+P_s),(s=1,\cdots,n).\quad(f_\beta=0).\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$X^{(2)}=X^{(1)}+[\ddot{\xi}_s-2\ddot{q}_s\dot{\xi}_0-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0]\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}.$$

(20) 式等价于

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}_i-2A_i\dot{\xi}_0-\dot{q}_i\ddot{\xi}_0\\=&X^{(1)}(A_i),\quad(i=1,\cdots,r;0\leqslant r\leqslant n),\\&X^{(1)}[\varphi_j(t,q,\dot{q})]=0,\quad(j=1,\cdots,n-r).\end{aligned}\tag{21}$$

系统脱离约束时, 方程 (12) 的 Lie 对称性确定方程表示为

$$\begin{aligned}&X^{(2)}[N_s(L)]\\=&X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s),(s=1,\cdots,n).\quad(f_\beta>0).\end{aligned}\tag{22}$$

(22) 式等价于

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}_i-2B_i\dot{\xi}_0-\dot{q}_i\ddot{\xi}_0\\=&X^{(1)}(B_i),\quad(i=1,\cdots,r;0\leqslant r\leqslant n),\\&X^{(1)}[\psi_j(t,q,\dot{q})]=0,\quad(j=1,\cdots,n-r).\end{aligned}\tag{23}$$

判据1 对于奇异变质量单面非完整系统, 如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}}=G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足如下方程:

$$\begin{aligned}&[L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q_s+\Lambda_s+P_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_{\mathrm{N}}]^2\\&+[X^{(2)}[N_s(L)]-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s+P_s)]^2\\=&0,\quad(f_\beta=0),\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&[L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q_s+P_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_{\mathrm{N}}]^2\\&+[X^{(2)}[N_s(L)]-X^{(1)}(Q_s+P_s)]^2\\=&0,\quad(f_\beta>0).\end{aligned}\tag{25}$$

则这种对称性称为与奇异变质量单面非完整系统相应完整系统的 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性.

判据2 如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}}=G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程 (24)、(25) 和限制方程 (16), 则相应对称性称为奇异变质量单面 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的弱 Noether-Lie 对称性.

判据3 如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}}=G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程 (24)、(25), 限制方程 (16) 和附加限制方程 (17), 则相应对称性称为奇异变质量单面 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的强 Noether-Lie 对称性.

命题1 奇异变质量单面非完整系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性、弱 Noether-Lie 对称性、强 Noether-Lie 对称性将直接导致如下 Noether 守恒量:

$$I_{\mathrm{N}}=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_{\mathrm{N}}=\mathrm{const}.\tag{26}$$

证明 系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性必定是 Noether 对称性, 将 (26) 式对时间 t 求导, 系统在约束上时, 利用 (8) 式和 (18) 式, 当系统脱离约束时, 利用 (12) 式和 (19) 式, 且注意到算子: $N_s=E_s$, 可以证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{N}}=0$.

命题2 对于奇异变质量单面非完整系统的 Nielsen 方程 Noether-Lie 对称性、弱 Noether-Lie 对称性、强 Noether-Lie 对称性, 如果存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 在系统处于约束上时, 使得

$$\frac{\partial A_i}{\partial\dot{q}_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0,(i=1,\cdots,r;0\leqslant r\leqslant n);\tag{27}$$

在系统脱离约束时, 使得

$$\frac{\partial B_i}{\partial\dot{q}_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0,(i=1,\cdots,r;0\leqslant r\leqslant n).\tag{28}$$

则系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性、弱 Noether-Lie 对称性、强 Noether-Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量为

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{H}}=&\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\xi_0)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_i}(\mu\xi_i)\\&+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}[\mu(\dot{\xi}_i-\dot{q}_i\dot{\xi}_0)]-\dot{\xi}_0=\mathrm{const}.\end{aligned}\tag{29}$$

证明 系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性必是 Lie 对称性, 当系统处于约束上时, 结合方程 (21) 和 (27), 当系统脱离约束时, 结合方程 (23) 和 (28), 利用广义 Hojman 定理的证明方法 [32], 可以证明命题 2.

4 算 例

假设奇异变质量单面非完整系统的 Lagrange、非势广义力和所受单面非完整约束分别为

$$\begin{aligned}L=&\frac{1}{2}m(t)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+m(t)\dot{q}_1q_3\\&+\frac{1}{2}m(t)(q_1-q_2)^2,\end{aligned}\tag{30}$$

$$Q_1=\dot{m}\dot{q}_1,\quad Q_2=\dot{m}\dot{q}_2,\quad Q_3=\dot{m}\dot{q}_3,\tag{31}$$

$$f=\dot{q}_1-\dot{q}_2+q_3\geqslant 0.\tag{32}$$

其中, $m(t)=m_0\exp(-t)$, m_0 是常数. 设微粒分离的相对速度为 $\mu=-\dot{r}$. 试研究系统的 Noether-Lie 对称性所导致的守恒量.

因为微粒分离的相对速度为 $\mu = -\dot{r}$, 由 (4) 式解得反推力

$$P_1 = P_2 = P_3 = 0. \tag{33}$$

当系统处于约束上时, 有

$$f = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 + q_3 = 0, \tag{34}$$

$$m\ddot{q}_1 + m\dot{q}_3 + \dot{m}q_3 - m(q_1 - q_2) = \lambda, \tag{35}$$

$$m\ddot{q}_2 + m(q_1 - q_2) = -\lambda, \tag{36}$$

$$-m\dot{q}_1 = \dot{m}q_3. \tag{37}$$

由方程 (34)—(37), 可以解得

$$\begin{aligned}\lambda &= m\left(q_2 - q_1 - \frac{q_3}{2}\right),\\ \Lambda_1 &= m\left(q_2 - q_1 - \frac{q_3}{2}\right),\\ \Lambda_2 &= -m\left(q_2 - q_1 - \frac{q_3}{2}\right).\end{aligned} \tag{38}$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{q_3}{2} - \dot{q}_3, \quad \ddot{q}_2 = \frac{q_3}{2}, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_3. \tag{39}$$

当系统脱离约束时, 解得

$$\begin{aligned}\Lambda_s = 0, \ddot{q}_1 = q_1 - q_2 + q_3 - \dot{q}_3, \ddot{q}_2\\ = q_2 - q_1, \dot{q}_3 = \dot{q}_1.\end{aligned} \tag{40}$$

取以下无限小生成元

$$\xi_0 = \xi_3 = 0, \xi_1 = \xi_2 = 1. \tag{41}$$

生成元满足方程 (24)、(25), 限制方程 (16) 和附加限制方程 (17), 则对称性是相应完整系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性, 又是系统 Nielsen 方程的弱 Noether-Lie 对称性和强 Noether-Lie 对称性.

将 (41) 式代入方程 (24) 和 (25), 得

$$G_{\mathrm{N}} = 0. \tag{42}$$

由命题 1 可得

$$I_{\mathrm{N}} = m\dot{q}_1 + m\dot{q}_2 + mq_3 = \mathrm{const}. \tag{43}$$

方程 (27) 和 (28) 给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 1. \tag{44}$$

解得

$$\mu = (q_1 - q_3)\exp(t). \tag{45}$$

将 (41) 式和 (45) 式代入 (29) 式, 得

$$I_{\mathrm{H}} = (q_1 - q_3)^{-1} = \mathrm{const}. \tag{46}$$

5 结 论

文章对奇异变质量单面非完整系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性进行了研究. 奇异系统的微分方程可以解出一部分广义加速度, 余下的部分表示为关系式. 通过系统的研究, 建立了系统运动微分方程的 Nielsen 形式, 给出了系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性的定义、判据、命题, 得到了系统 Nielsen 方程的 Noether-Lie 对称性所导致的 Noether 守恒量和广义 Hojman 守恒量, 其结论有可能推广到其他系统.

[1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* **KI II** 235

[2] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Con-strained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京: 北京工业大学出版社)]

[3] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇, 梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京: 科学出版社)]

[4] Zhang Y, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2419 (in Chinese) [张毅, 梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2491]

[5] Fu J L, Nie N M, Huang J F 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2634

[6] Mei F X, Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔, 尚玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[7] Cai J L, Mei F X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5369 (in Chinese) [蔡建乐, 梅凤翔 2008 物理学报 **57** 5369]

[8] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[9] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 1

[10] Xie Y L, Jia L Q, Yang X F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030201 (in Chinese) [解银丽, 贾利群, 杨新芳 2011 物理学报 **60** 030201]

[11] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[12] Zheng S W, Xie J F, Chen W C 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 809

[13] Wu H B, Mei F X 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3145

[14] Jiang W A, Li Z J, Luo S K 2011 *Chin. Phys.* B **20** 030202

[15] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanics Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]

[16] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]

[17] Jing H X, Li Y C, Xia L L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3043 (in Chinese) [荆红星, 李元成, 夏丽莉 2007 物理学报 **56** 3043]

[18] Chen X W, Zhao Y H, Liu C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5150 (in Chinese) [陈向炜, 赵永红, 刘畅 2009 物理学报 **58** 5150]

[19] Xia L L, Li Y C, Wang X J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 28 (in Chinese) [夏丽莉, 李元成, 王显军 2009 物理学报 **58** 28]

[20] Zhang M L, Sun X T, Wang X X, Xie Y L, Jia L Q 2011 *Chin. Phys.* B **20** 110202

[21] Wu H B, Mei F X 2012 *Chin. Phys.* B **6** 064501

[22] Cui J C, Zhang Y Y, Yang X F, Jia L Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030304

[23] Wang P, Fang J H, Zhang P Y, Ding N 2006 *Commun. Theor. Phys.* **46** 385

[24] Hou Q B, Li Y C, Xia L L, Wang J 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 619

[25] Fang J H, Liao Y P, Zhang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4037 (in Chinese) [方建会, 廖永潘, 张军 2004 物理学报 **53** 4037]

[26] Chen R, Xu X J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 021102 (in Chinese) [陈蓉, 许学军 2012 物理学报 **61** 021102]

[27] Zhang Y, Xue Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 816 (in Chinese) [张毅, 薛纭 2001 物理学报 **50** 816]

[28] Li Y C, Zhang Y, Liang J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2186 (in Chinese) [李元成, 张毅, 梁景辉 2002 物理学报 **51** 2186]

[29] Mei F X, Zhu H P 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 11

[30] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]

[31] Li Y C, Wang J, Xia L L, Hou Q B, Jing H X *Chin. Phys.* **16** 2841

[32] Ding N, Fang J H 2006 *Commun. Theor. Phys.* **46** 265

Noether-Lie symmetry and conserved quantities of Nielsen equations for a singular variable mass nonholonomic system with unilateral constraints*

Xu Chao Li Yuan-Cheng†

(*College of Physics, China University of Petroleum (East China), Qingdao* 266580, *China*)

(Received 6 April 2013; revised manuscript received 23 May 2013)

Abstract

Under the infinitesimal transformations of Lie group, Noether-Lie symmetry of Nielsen equations for a singular variable mass nonholonomic system with unilateral constraints is studied. Differential equations of motion for Nielsen equations of the system are established. The definition, criteria and propositions for Nielsen equations of the system are given. Noether conserved quantity as well as generalized Hojman quantity is obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: singular variable mass system, nonholonomic unilateral constraints, Nielsen equations, Noether-Lie symmetry

PACS: 11.30.−j, 45.20.Jj, 02.20.Sv **DOI:** 10.7498/aps.62.171101

* Project supported by the Innovative Programs for Graduate of China University of Petroleum (East China), China (Grant No. 11CX06088A).

† Corresponding author. E-mail: liyuanch@upc.edu.cn