

基于 l_p 范数的压缩感知图像重建算法研究*宁方立^{1)†} 何碧静²⁾ 韦娟²⁾

1) (西北工业大学机电学院, 西安 710072)

2) (西安电子科技大学通信工程学院, 综合业务网理论与关键技术国家重点实验室, 西安 710071)

(2013年5月6日收到; 2013年6月2日收到修改稿)

图像重建是光学成像、光声成像、声纳成像、核磁共振成像、天体成像等物理成像领域中的关键技术之一. 近年来提出的压缩感知理论指出: 对稀疏或者可压缩信号进行少量非自适应线性投影, 投影信号含有足够的信息, 从而能对信号进行高概率重建. 压缩感知已被应用于多种物理成像系统. 将罚函数法和修正 Hesse 阵序列二次规划方法相结合, 并采用了分块压缩感知思想, 提出一种基于 l_p 范数的压缩感知图像重建算法. 以 cameraman, barbara 和 mandrill 图像为例, 采用该算法进行图像重建. 首先, 在不同采样率下对图像重建. 即便采样率低至 0.3 时, 也能获得高达 32.23 dB 的信噪比, 重建图像清晰可辨. 验证了该算法的正确性. 其次, 将该算法与正交匹配追踪算法进行对比, 在采样率达到 0.5 以上时, 能够获得高信噪比的重建图像, 成像时间也大为减少, 特别是采样率为 0.7 时, 成像时间减少 88%. 最后, 与现有基于 l_p 范数的压缩感知图像重建算法进行对比, 计算结果表明在成像质量有所提高的基础上, 成像时间大为缩短.

关键词: 图像重建, 压缩感知, 罚函数, 修正 Hesse 阵序列二次规划

PACS: 42.30.Wb, 42.30.Va, 07.05.Pj

DOI: 10.7498/aps.62.174212

1 引言

图像重建是指根据对场景的投影获取数据来重建图像, 是光学成像^[1,2]、光声成像^[3]、声纳成像^[4]、核磁共振成像、天体成像等物理成像领域中的关键技术之一. 传统的图像传输过程中, 以奈奎斯特采样定理为准则, 高速率采样再压缩后, 只保留了某些重要数据, 大量的冗余数据被舍弃, 这显然造成了资源的浪费. 随着科技的发展, 高分辨率的数码设备采样产生了庞大的数据, 这对采样数据存储和传输的硬件设备带来了极大的挑战.

2006年, 由 Donoho^[5] 和 Candes^[6] 等正式提出了压缩感知理论, 该理论指出对于稀疏或可压缩的信号通过远低于奈奎斯特采样定理标准的方式来采集数据, 仍能精确恢复出原始信号. 压缩感知已被广泛用于多种物理成像系统, 例如, 光学/单像素相机^[7-9]、核磁共振成像^[10-12]、天体成像^[13]、

关联成像^[14]、差分关联成像^[15]等. 利用压缩感知节省了设备资源, 在高分辨率图像重建方面具有重大的研究意义.

压缩感知主要包括三个关键技术: 信号稀疏表示、测量矩阵的构建以及重构算法. 其中重构算法是压缩感知的研究核心之一. 压缩感知在数学上来讲就是最小 l_0 范数优化问题, 直接求解该问题数值极不稳定, 而且是一个 NP-hard 问题. 针对这一问题, 研究者们提出了一系列寻找次优解的贪婪算法: 匹配追踪算法^[16]、正交匹配追踪算法 (orthogonal matching pursuit, OMP)^[17]、正则正交匹配追踪算法^[18]等. 贪婪算法具有计算简单、重构效果较好等优点, 但绝大部分贪婪算法建立在待构信号稀疏度已知的前提条件下, 这在实际工程实施中很难满足. Candes 和 Donoho 提出了利用 l_1 范数代替 l_0 范数的思想^[1,2], 将问题转化为凸优化问题, 通过求解线性规划问题进行稀疏信号的重构, 进而得到

* 国家自然科学基金 (批准号: 51075329)、陕西省科学技术研究发展计划项目 (批准号: 2012GY2-41)、西北工业大学基础研究基金 (批准号: NPU-FFR-JCY20130117) 和西北工业大学研究生创业种子基金 (批准号: Z2013029) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: ningfl@nwpu.edu.cn

等价的解. 常用的凸优化算法主要包括基追踪算法^[19]、梯度投影法^[20]等. 凸优化算法重构复杂度较高, 对于大规模问题不适用于实际应用. Bhaskar 提出当 $(0 < p < 1)$ 时基于 l_p 范数的迭代加权最小二乘 (iteratively reweighted least square, IRLS) 算法^[21]. Chartand 提出更为高效的参数正则化 IRLS 算法^[22], 计算证明了基于 l_p 范数优化算法在重构信号效果及可靠性方面优于 l_0 及 l_1 范数优化算法.

本文以最小化 l_p 范数为目标, 提出一种将罚函数法与修正 Hesse 阵序列二次规划方法结合的压缩感知图像重建算法. 为进一步减少计算量, 将分块压缩感知思想^[23-25]应用到本文算法中进行图像重建. 基于压缩感知的分块方法首先将图像等尺寸的分成图像块, 然后对每个图像块采用相同的变换基得到图像的稀疏表示, 再采用相同的测量矩阵获得测量值, 经过分块后的图像进行数据传输时只需要传输待重构的图像块的观测数据. 与现有压缩感知图像重建算法相比, 所提出的基于 l_p 范数的压缩感知图像重建算法具有三个明显优势: 1) 基于 l_p 范数压缩感知信号重构在一定程度上可以减少数据之间的冗余, 大为减少重构信号所需的观测数量; 2) 结合了罚函数法和修正 Hesse 阵序列二次规划方法的优点, 使迭代点迭代速度加快, 可以在提高成像信噪比的同时, 大为缩短成像时间; 3) 采用分块压缩感知思想, 独立对每个图像块进行观测和重构, 在减少计算量的同时, 也减少传感器的存储量. 因此, 所提出的基于 l_p 范数的压缩感知图像重建算法为多种物理成像领域的大像素图像重建奠定了理论基础.

2 基于 l_p 范数的压缩感知算法

2.1 基于 l_p 范数的压缩感知信号重构模型

压缩感知是近几年流行起来的一种介于数学和信息科学的新方向^[5,6], 该理论在信号获取方式上突破了传统奈奎斯特采样定律, 是对数据采样和压缩同时完成的新型信号处理理论. 压缩感知的前提是信号具有稀疏性或可压缩性. 设原信号 $x \in \mathfrak{R}^{N \times 1}$ 在某标准正交基 $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$ 下表示为

$$x = \Psi a, \quad (1)$$

其中, 向量 $a \in \mathfrak{R}^{N \times 1}$ 仅有 $K(K \ll N)$ 个非零值, 称 a 为信号 x 的稀疏系数, Ψ 为 x 的稀疏基. 采用另一

个与稀疏基不相关的测量矩阵 $\Phi \in \mathfrak{R}^{M \times N}(M < N)$ 与信号相乘, 对信号 x 执行一个压缩观测, 得到

$$y = \Phi x, \quad (2)$$

其中, 称 $y \in \mathfrak{R}^{M \times 1}$ 为观测向量. 令 $\Theta = \Phi\Psi$, 基于 l_p 范数的压缩感知信号重构可以通过下面的优化问题进行求解:

$$\min_a \|a\|_p^p, \quad \text{s.t.} \quad \Theta a = y. \quad (3)$$

(3) 式等价于等式约束优化问题

$$\min_a f(a), \quad \text{s.t.} \quad c(a) = \Theta a - y = 0, \quad (4)$$

其中, $f(a) = \|a\|_p^p = \sum_{i=1}^N |a(i)|^p$ 是目标函数, $c(a)$ 为等式约束条件.

2.2 罚函数法与修正 Hesse 阵序列二次规划方法结合的优化算法

罚函数法结构简单, 编程容易实现. 但罚因子的选取是困难的, 取的过小, 起不到“惩罚”的作用; 而取的过大可能造成目标函数的 Hesse 阵的条件数很大, 问题趋于病态. 基于修正 Hesse 阵序列二次规划方法是序列二次规划方法的改进, 利用对称正定矩阵 B_k 代替迭代点处的 Hesse 矩阵, 可保证搜索方向是迭代点处的下降方向, 确保了全局收敛性, 而且减小了计算量. 本文算法结合两者的优点, 利用罚函数法初步计算, 将初始点迭代到可行域内, 再利用修正 Hesse 阵的序列二次规划方法, 避免罚因子过分增大, 快速得到最优解.

根据约束条件的特点将约束条件转化为某种惩罚函数加到目标函数中, 将有约束的优化问题转化为无约束优化问题, 通过罚因子的改变求解极小值. 因此求解式 (4) 的目标是在等式约束 $c(a) = \Theta a - y = 0$ 下求解最小 l_p 范数解, 即求解

$$\min P(a, m_n) = \min\{f(a) + m_n(\Theta a - y)^2\}, \quad (5)$$

其中, $m_n > 0$ 是罚因子. 对 (5) 式关于 a 求梯度, 令梯度为 0 求极小值

$$a_n = 2m_n(|p||a_{n-1}|^{p-2} + 2m_n\Theta^T\Theta)^{-1}\Theta^T y, \quad (6)$$

式中, 直接计算 $|p||a_{n-1}|^{p-2}$ 将使问题变成非线性, 不存在简单解. 因此, 需要通过等价代换, 用 $|p|\text{diag}(|a_{n-1}|^{p-2})$ ^[26] 代替 $|p||a_{n-1}|^{p-2}$. 通过不断迭代, 直至满足

$$\|\Theta a_n - y\|_2 < \epsilon, \quad (7)$$

其中, e 为趋于 0 的常数.

可以看出罚函数法结构简单, 通过罚因子的改变, 不断迭代使无约束最优化问题的最优解趋于原约束问题的最优解. 由收敛性定理可知, 罚因子取越大越好, 但罚因子越大将造成增广目标函数 $P(a, m_n)$ 的 Hesse 阵条件数越大, 趋于病态, 甚至无法求解. 基于修正 Hesse 阵序列二次规划方法可以解决这一问题.

定义式 (4) 的拉格朗日函数为 $L(a, \lambda) = f(a) + \lambda^T c(a)$, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)^T$ 为拉格朗日乘子向量. $L(a, \lambda)$ 的关于 a 的梯度和 Hesse 阵分别为

$$\begin{aligned} \nabla_a L(a, \lambda) &= \nabla f(a) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \nabla c_i(a) \\ &= \nabla f(a) + \nabla c(a)^T \lambda, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\nabla_{aa}^2 L(a, \lambda) = \nabla^2 f(a) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \nabla^2 c_i(a). \quad (9)$$

为方便记录, 记

$$\begin{aligned} g_k &= \nabla f(a), \\ A_k &= \nabla c(a)^T = [\nabla c_1(a), \nabla c_2(a), \dots, \nabla c_M(a)], \\ c_k &= c(a), \quad W = \nabla_{aa}^2 L(a, \lambda). \end{aligned}$$

称 W 为 $L(a, \lambda)$ 的 Hesse 阵, 在 (9) 式中, 如果直接计算 W , 其计算量很大, 而修正 Hesse 阵序列二次规划方法的优点就是利用对称正定矩阵 B_k 代替迭代点处的 Hesse 矩阵, 大为减小计算量. 利用 B_k 代替迭代点处的 Hesse 阵所得的迭代点处搜索方向为

$$d_k = -(Z_k B_k^{-1} Z_k^T g_k + A_k (A_k^T A_k)^{-1} c_k), \quad (10)$$

其中, $Z_k \in R^{N*(N-M)}$, 是零空间 $N(A_k)$ 的一组基, 通过对矩阵 A_k 进行 QR 分解求得

$$A_k = (Y_k \quad Z_k) \begin{pmatrix} R_k \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

不断迭代利用

$$\|d_k\|_1 \leq \varepsilon, \quad (12)$$

作为收敛条件的判断, 其中 ε 为趋于 0 的常数.

迭代过程中, 为了保证算法的全局收敛性, 需要借助价值函数确定搜索步长. 最常用的价值函数是 l_1 精确罚函数:

$$\Phi_u(a) = f(a) + u \|c(a)\|_1, \quad (13)$$

其中 $u > 0$ 为 l_1 精确罚函数因子, 通过下面的式子进行修正:

$$u_{k+1} = \begin{cases} u_k, & u_k \geq \|\lambda_k\|_\infty + \delta, \\ \|\lambda_k\|_\infty + 2\delta, & u_k < \|\lambda_k\|_\infty + \delta, \end{cases} \quad (14)$$

式中, λ_k 为乘子向量, 求解最小二乘问题 $\min_{\lambda} \|A_k \lambda - g_k\|_2$ 得到

$$\lambda_k = -(A_k^T A_k)^{-1} A_k^T g_k. \quad (15)$$

确定步长 $\beta_k, \beta_k \in \{\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^m, \dots\}$, 令 m_k 是使下列不等式成立的最小非负整数

$$\begin{aligned} &\Phi(a_k + \beta_k d_k; u_k) - \Phi(a_k; u_k) \\ &\leq \beta_k \eta \Phi'(a_k, d_k; u_k), \end{aligned} \quad (16)$$

$\Phi'(a_k, d_k; u_k)$ 是罚函数在点 a_k 处沿搜索方向 d_k 的方向导数, $\beta_k = \rho^{m_k}$;

矩阵 B_{k+1} 的校正公式为

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{h_k h_k^T}{s_k^T h_k}, \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} s_k &= Z_k^T (a_{k+1} - a_k), \\ y_k &= Z_k^T (\nabla_a L(a_{k+1}, \lambda_{k+1}) - \nabla_a L(a_k, \lambda_{k+1})), \end{aligned} \quad (18)$$

$$h_k = t_k y_k + (1 - t_k) B_k s_k, \quad (19)$$

$$t_k = \begin{cases} 1, & s_k^T y_k \geq 0.2 s_k^T B_k s_k, \\ \frac{0.8 s_k^T B_k s_k}{s_k^T B_k s_k - s_k^T y_k}, & s_k^T y_k < 0.2 s_k^T B_k s_k. \end{cases} \quad (20)$$

(18), (19), (20) 式可保证矩阵 B_{k+1} 正定.

本文算法具体步骤如下:

步骤0 选初始稀疏系数 $a_0 \in \mathfrak{R}^{N \times 1}$ 为全 1 列向量, $e = \varepsilon = 1 \times 10^{-5}$, 初始对称正定矩阵 $B_0 \in \mathfrak{R}^{(N-M) \times (N-M)}$ 为单位阵, 初始罚函数因子 $u_0 = 15$, 修正罚因子 $\delta = 0.6$, 初始迭代次数 $n = 1, k = 1$;

步骤1 将原始图像进行分块, 对每一小块图像用相同的离散余弦变换矩阵 Ψ 进行稀疏变换, 选取高斯随机矩阵 Φ 为测量矩阵, 得到该观测矩阵下的测量值 y ;

步骤2 使用罚函数法迭代 (6) 式计算稀疏系数 a_n , 直至 $\|\Theta a_n - y\|_2 < e$, 停止计算, 令 $a_0 = a_n$ 作为修正 Hesse 阵序列二次规划方法的初始稀疏系数;

步骤3 通过 (10) 式求迭代点处的搜索方向 d_k , 若 $\|d_k\|_1 \leq \varepsilon$, 停止计算, 令 $a = a_k$, 转步骤 6;

步骤4 通过 (14) 式更新罚因子 u_k , (16) 式求步长 β_k , (17) 式计算 B_{k+1} ;

步骤5 令 $k = k + 1$, $a_{k+1} = a_k + \beta_k d_k$, 转步骤 3;

步骤6 采用与步骤 1 中相同的稀疏矩阵 Ψ 对所得稀疏系数 a 进行稀疏逆变换. 得到每一小块图像的重建图像, 并按顺序分块重组, 得到重建图像.

3 图像重建及结果分析

为验证本文提出算法对图像的重建性能, 首先, 选取经典的压缩感知测试图像 cameraman 512×512 作为原始图片, 分别使用 153×512 , 256×512 , 358×512 的高斯随机矩阵作为测量矩阵进行采样, 重建结果如图 1 所示.

当采样率分别为 0.3, 0.5, 0.7 时, 对应信噪比分别为 32.23 dB, 35.88 dB, 37.77 dB. 从图 1 也可看出即便在采样率只有 0.3 的情况下, 信噪比高达 32.23 dB, 重建图片能通过人眼进行清晰辨识. 随着采样率的不断增大, 图片重建质量进一步提高.

但从图 1 的成像质量也可以看出, 在采样率低至 0.3 时, 重建图像的边界清晰度不是太好, 存在拖

尾和干扰现象. 为了对此进行分析, 在采样率为 0.3 时, 对图片 cameraman 使用本文算法、OMP 算法、文献 [22] 算法分别未采用分块思想及采用分块思想情况下分别进行图像重建, 重建结果如图 2 所示.



图 1 图像重建结果 (a) 原始图像; (b) 采样率 $M/N = 0.3$; (c) 采样率 $M/N = 0.5$; (d) 采样率 $M/N = 0.7$

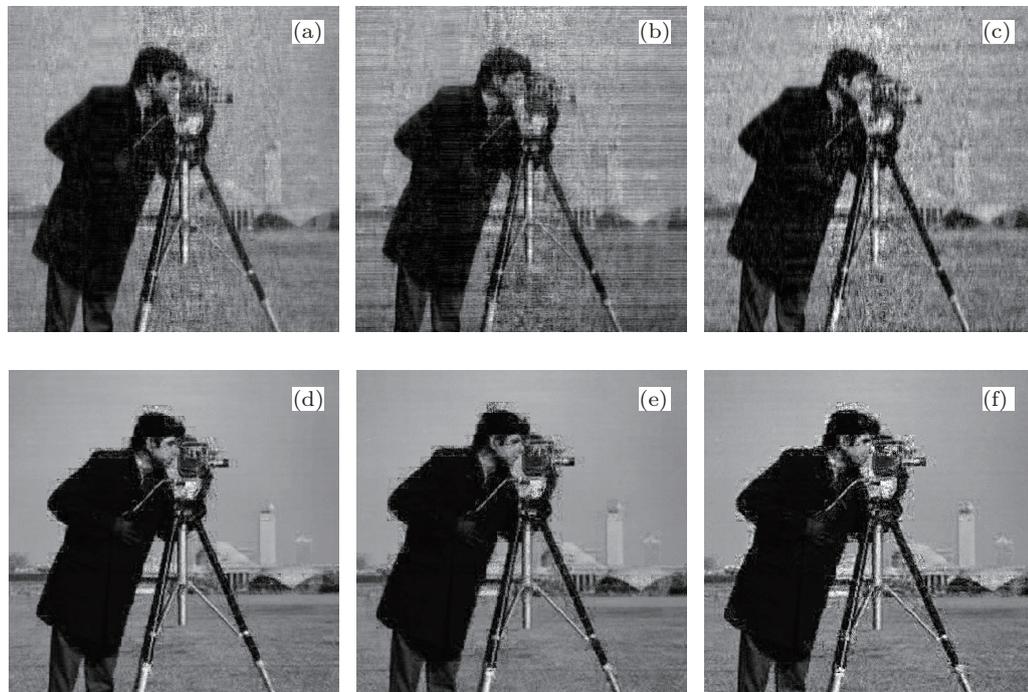


图 2 采样率 $M/N = 0.3$, cameraman 重建结果 (a), (b), (c) 未分块; (d), (e), (f) 分块; (a), (d) 本文算法; (b), (e) OMP 算法; (c), (f), 文献 [22] 算法

从图 2 所示结果可以看出, 三种算法采用分块思想后都能提高重建图像质量, 但重建图像边界清晰度也都不是很好. 因此分块是产生拖尾和干扰现

象的主要原因. 这是因为采用分块思想, 将图像分解为尺寸相同的块, 每个块包含不同的图像特征, 可分为: 平坦块、边界块、纹理块. 这些块在变换

域的稀疏度并不相同, 这样在分块重构时, 稀疏度小的块, 重建质量好, 稀疏度大的块, 重建质量差. 因此, 块与块之间的复原水平不一样, 使得重建出的图像存在块效应, 导致图像边缘存在拖尾和干扰现象.

其次, 将本文算法与基于分块的 OMP 算法进行对比, 选取 512×512 像素的 cameraman、barbara 两幅图片作为测试图片, 使用 256×512 的高斯随机矩阵作为测量矩阵进行采样. 重建结果如图 3 所示.



图 3 采样率 $M/N = 0.5$, cameraman, barbara 重建结果 (a), (d) 原始图像; (b), (e) 本文算法; (c), (f) OMP 算法

采样率 $M/N = 0.5$ 时, 对于图像 cameraman, 本文算法、OMP 算法重建信噪比分别为 35.88 dB, 34.45 dB, 本文算法信噪比高于 OMP 算法 1.43 dB. 同样条件下, 本文算法、OMP 算法对图像 barbara 重建信噪比分别为 31.86 dB, 31.56 dB, 本文算法的重建信噪比仍高于 OMP 算法.

两种算法在不同采样率下图像重建信噪比及成像时间对比如表 1、表 2 所示.

表 1 图像 cameraman, 本文算法与基于分块 OMP 算法性能比较

采样率	信噪比/dB		成像时间/s	
	本算法	OMP	本算法	OMP
0.4	33.00	33.54	196.33	305.27
0.5	35.88	34.45	202.37	629.83
0.6	36.06	35.48	206.68	1141.16
0.7	37.77	36.88	215.54	1805.71

表 2 图像 barbara, 本文算法与基于分块 OMP 算法性能比较

采样率	信噪比/dB		成像时间/s	
	本算法	OMP	本算法	OMP
0.4	30.87	30.98	188.55	280.86
0.5	31.86	31.56	191.67	577.20
0.6	33.18	32.31	197.67	991.35
0.7	34.43	33.28	198.72	1749.74

从表 1、表 2 可以看出, 在采样率为 0.4 的时候, 虽然本文算法比 OMP 算法重建图像信噪比略低一些, 成像时间却减少了 36%左右, 而且随着采样率的提高, 本文算法的重构信噪比高于 OMP 算法, 成像时间远小于 OMP 算法. 特别当采样率为 0.7 时, 本文算法的成像时间减少了 88%左右.

最后, 将本文算法与文献 [22] 中算法进行对比, 选取 512×512 像素的 barbara 和 mandrill 作为测试图片. 图像重建结果如图 4 所示.

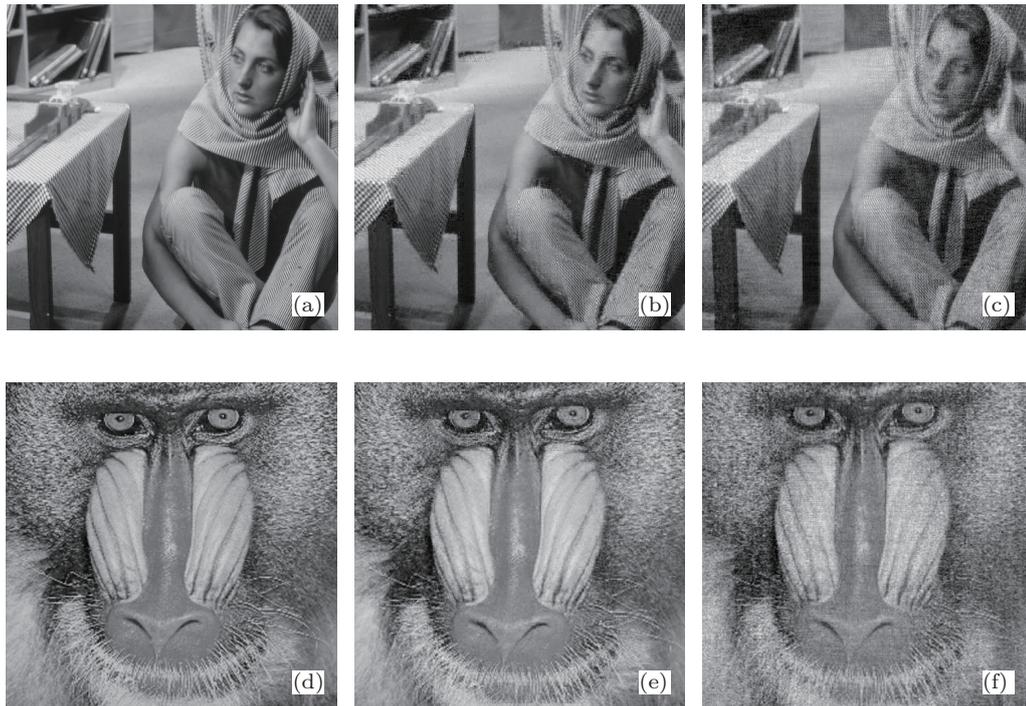


图4 采样率 $M/N = 0.5$, barbara, mandrill 重建结果 (a), (d) 原始图像; (b), (e) 本文算法; (c), (f) 文献 [22] 算法

采样率 0.5 时, 本文算法、文献 [22] 中算法重建图像 barbara 的信噪比分别为 31.86 dB, 30.48 dB, 本文算法信噪比高于文献 [22] 中算法 1.38 dB. 重建图像 (e), (f) 的信噪比分别为 30.97 dB, 29.73 dB, 本文算法重建信噪比高出文献 [22] 算法 1.24 dB.

表3 图像 barbara, 本文算法与文献 [22] 算法性能比较

采样率	信噪比/dB		成像时间/s	
	本算法	文献 [22] 算法	本算法	文献 [22] 算法
0.4	30.87	29.62	188.56	621.92
0.5	31.86	30.48	191.67	986.14
0.6	33.18	31.76	197.67	1605.40
0.7	34.43	33.64	198.72	2323.62

表4 图像 mandrill, 本文算法与文献 [22] 算法性能比较

采样率	信噪比/dB		成像时间/s	
	本算法	文献 [22] 算法	本算法	文献 [22] 算法
0.4	30.01	29.11	184.02	588.99
0.5	30.97	29.73	186.22	1017.51
0.6	32.21	30.76	192.23	1554.53
0.7	33.72	32.43	220.35	2445.18

两种算法在不同采样率下图像重建信噪比及

成像时间对比如表 3、表 4 所示.

从表 3、表 4 可以看出, 与文献 [22] 算法对比, 在相同的采样率下本文算法得到的重建图像信噪比有所提高的基础上, 成像时间也大为缩短. 进一步验证了本文算法对于大像素物理成像的可行性和有效性.

4 结论

通过将罚函数法和修正 Hesse 阵序列二次规划方法结合, 并采用分块压缩感知思想, 提出一种全新的基于 l_p 范数的压缩感知图像重建算法. 通过对同一副图像采用不同的采样率进行图像重建. 在采样率仅为 0.3 下, 也能获得高达 32.23 dB 的信噪比, 重建图像清晰可辨. 并在不同采样率下与基于分块 OMP 算法进行对比, 所建立的压缩感知图像重建算法能使用更短的成像时间获得更高的成像质量. 进一步与文献 [22] 中的基于 l_p 的压缩感知图像重建算法进行对比, 在不同的采样率下, 本文算法无论在信噪比和成像时间上都优于文献 [22] 中的算法. 本文算法采用了分块压缩感知思想, 可以提高重建图像质量, 但在低采样率时会出现拖尾和干扰现象的块效应. 因此, 如何减小块效应, 使得在低采样率下使重建图像边界更加清晰, 需要进一

步研究. 本文所提出的基于 l_p 范数的压缩感知图像重建算法开辟了图像重建的新方法, 为各类物理成

像系统中奠定了理论基础, 特别适合于大像素图像重建问题.

- [1] Zhang Q S, Lv X X, Yu Q T, Liu G Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2764
- [2] Huang L M, Ding Z H, Hong W, Wang C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 023401 (in Chinese) [黄良敏, 丁志华, 洪威, 王川 2012 物理学报 **61** 023401]
- [3] Yang S H, Yin G Z, Xing D 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 094302
- [4] Zhang C H, Liu J Y 2006 *Physics* **35** 408
- [5] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 1289
- [6] Candes E J, Romberg J 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 489
- [7] Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, Laska J N, Sun T, Kelly K F, Baraniuk R G 2008 *IEEE Sig. Proc. Mag.* **25** 83
- [8] Filiipe M, Francisco M A, Miguel V C 2011 *Appl. Optics*. **50** 405
- [9] Chen T, Li Z W, Wang J L, Wang B, Guo S 2012 *Optics and Precision Engineering* **20** 2523 (in Chinese) [陈涛, 李正炜, 王建立, 王斌, 郭爽 2012 光学精密工程 **20** 2523]
- [10] Lustig M, Donoho D, Pauly J M 2007 *Magn. Reson. Med.* **58** 1182
- [11] Lingala S G, Hu Y, Dibella E, Jacob M 2011 *IEEE Trans. Med. Imaging* **30** 1042
- [12] Motefusco L B, Lazzaro D, Papi S, Guerini C 2011 *IEEE Trans. Med. imaging* **30** 1064
- [13] Bobin J, Starck J L, Ottensamer R 2008 *IEEE Sel. Top. Sig. Proc.* **2** 718
- [14] Lu M H, Shen X, Han S S 2011 *Acta Opt. Sin.* **31** 0711002 (in Chinese) [陆明海, 沈夏, 韩申生 2011 光学学报 **31** 0711002]
- [15] Bai X, Li Y Q, Zhao S M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044209 (in Chinese) [白旭, 李永强, 赵生妹 2013 物理学报 **62** 044209]
- [16] Mallat S, Zhang Z F 1993 *IEEE Trans. Sig. Proc.* **41** 3397
- [17] Tropp J A, Gilbert A C 2007 *IEEE Trans. Inform. Theory* **53** 4655
- [18] Needell D, Vershynin R 2009 *Found. Comput. Math.* **9** 317
- [19] Chen S, Saunders M A, Donoho D L 2001 *SIMA Review* **43** 129
- [20] Figueiredo M, Nowak R D, Wright S J 2007 *IEEE Sel. Top. Sig. Proc.* **1** 586
- [21] Bhaskar D, Kennedy K D 1999 *IEEE Trans. Sig. Proc.* **47** 187
- [22] Chartand R 2007 *IEEE Sig. Proc. Let.* **14** 707
- [23] Lu G 2007 *Proceedings of the 15th International Conference on Digital Signal Processing* Cardiff, UK, July 1-4, 2007 p403
- [24] Wang X Y, Guo X, Zhang D D 2012 *Chin. Phys. B* **21** 090507
- [25] Wang X Y, Wang Y X, Yun J J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 104202
- [26] Rao B D, Kreutz D K 1999 *IEEE Trans. Sig. Proc.* **47** 187

An algorithm for image reconstruction based on l_p norm*

Ning Fang-Li^{1)†} He Bi-Jing²⁾ Wei Juan²⁾

1) (School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

2) (State Key Laboratory of Integrated Services Networks, School of Telecommunication Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 6 May 2013; revised manuscript received 2 June 2013)

Abstract

Image reconstruction is one of the key technologies in the fields of physical imaging, which include optical imaging, photoacoustic imaging, sonar imaging, magnetic resonance imaging, and celestial imaging etc. Compressive sensing theory, the new research spot in recent years, describes that a small group of non-adaptive linear projections of a sparse or compressible signal contains enough information for signal reconstruction. Compressive sensing has been applied in many physical imaging systems. In this paper, we propose a new image reconstruction algorithm based on l_p norm compressive sensing by combining the penalty function and revised Hesse sequence quadratic programming, and using block compressive sensing. Several images, such as “cameraman”, “barbara” and “mandrill”, are chosen as the images for image reconstruction. First, we take different sampling rates for image reconstruction to verify the algorithm. When the sampling rate is as low as 0.3, the signal-to-noise ratio of the reconstructed image can reach up to 32.23 dB. Then, when the sampling rate is above 0.5, by comparing with OMP algorithm, reconstructed images can be obtained with a higher signal-to-noise ratio and a shorter imaging time. Especially, when the sampling rate is 0.7, the imaging time is reduced by 88%. Finally compared with the existing algorithm based on l_p norm compressive sensing, simulation results show that the new algorithm can improve the signal-to-noise ratio of reconstructed images, and greatly reduce the imaging time.

Keywords: image reconstruction, compressive sensing, penalty function, revised Hesse sequence quadratic programming

PACS: 42.30.Wb, 42.30.Va, 07.05.Pj

DOI: 10.7498/aps.62.174212

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51075329), the Shaanxi Science and Technology Research and Development Project, China (Grant No. 2012GY2-41), NPU Foundation for Fundamental Research, China (Grant No. NPU-FFR-JCY20130117), and the Graduate Starting Fund of Northwestern Polytechnical University, China (Grant No. Z2013029).

† Corresponding author. E-mail: ningfl@nwpu.edu.cn