

波纹基底上含不溶性活性剂液滴的铺展稳定性*

李春曦 裴建军 叶学民†

(华北电力大学电站设备状态监测与控制教育部重点实验室, 保定 071003)

(2013年2月27日收到; 2013年4月23日收到修改稿)

针对波纹基底上含不溶性活性剂液滴的铺展历程, 采用润滑理论建立了液滴铺展数理模型, 推导出基态和扰动态下液膜厚度和活性剂浓度的演化方程组, 基于非模态稳定性理论分析了液滴铺展的稳定性及参数的影响规律. 研究表明: 扰动量在液滴中心及铺展前沿处很小, 在液膜最薄处达到最大值且活性剂浓度的负扰动现象比较明显; 扰动波数可增强液滴铺展稳定性, 但随扰动波数增加, 该稳定性逐渐下降甚至转变为不稳定. 增加 Marangoni 数将导致液滴铺展不稳定性加剧; 增大基底高度具有增强液滴铺展稳定的作用, Peclet 数和基底波数取适中值时有利于液滴铺展的稳定性.

关键词: 活性剂液滴, 非平整基底, 铺展, 非模态稳定性

PACS: 47.61.-k, 47.85.mf, 47.61.fg, 47.55.dk

DOI: 10.7498/aps.62.174702

1 引言

近年来, 以 MEMS 为主的技术发展使得微流体流动研究成为热点问题. 由于研究尺度为微米级甚至纳米级, 基底表面性质对流动的影响逐渐显现, 而且与宏观尺度不同的是, 微流动体系中的惯性力非常小, 液体黏性将对流动产生重要影响, 甚至有研究在基底表面人为设置凹槽或喷涂特殊物质形成凸起以增强基底表面上的输运和传热性能^[1].

关于基底表面性质对微流动的影响已取得不少研究成果. Matar 等^[2]对旋转圆盘表面上液膜流动特性的研究表明, 圆盘表面上的波纹和流量增大会共同促进液膜表面波纹的增加. Sadiq 等^[3]研究了波纹基底表面上的降膜流动, 通过线性稳定性和数值研究证实了基底高度增加有利于液膜流动的稳定性, 而基底周期宽度减小则会抑制液膜表面波纹的产生. Tatiana 等^[4]通过分析波纹基底对底部受热液膜形态、稳定性及速度场的影响, 发现热毛细力促使液膜变形, 但不一定导致液膜破断; 液膜在壁面凹陷处堆积形成隆起, 在壁面凸起处变得更薄, 并且较平壁面上受热液膜更加不稳定. 张程宾

等^[5]基于几何分形学研究了表面粗糙度对微通道内层流流动的影响, 得出随相对粗糙度增加, 流体流过粗糙表面产生的回流和分离对流动压降的影响愈加明显. 石自媛等^[6]利用格子 Boltzmann 方法数值研究了由固液界面引起的润湿性梯度驱动的液滴运动, 表明当润湿性梯度较大时, 液滴前进速度和接触角随时间变化出现振荡.

当液膜表面或内部含有活性剂时, 由活性剂浓度驱动的 Marangoni 效应将使液膜铺展前沿形成极其复杂的指进现象^[7], 即液膜前端出现手指状接触线. 这表明活性剂使液膜流动呈现出强非线性特征, 因此, 其流动稳定性研究在国内外引起了广泛关注. Troian 等^[8]首先采用经典的模态法对液膜厚度施加小扰动后进行了简单的稳定性分析. Matar 等采用模态化理论^[9]和非模态化理论^[10,11]研究了含不溶性活性剂和可溶性活性剂液滴/液膜的铺展过程稳定性, 其结果表明, 利用非模态化理论对液膜厚度和活性剂浓度均施加沿流向和展向的小扰动后, 得到的结果与模态化理论相符合. Hu^[12]采用模态化方法获得了含有不溶性活性剂的超薄液膜流动的线性稳定性. 李春曦等^[13]建立了气液界面剪切力作用下的二维剪切液膜表面波线性稳定

* 国家自然科学基金(批准号: 10972077, 11202079)和中央高校基本科研业务费(批准号: 13MS97)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yexuemin@163.com

性的理论模型,探讨了剪切力对液膜流动稳定性的影响.王欢^[14]结合非模态理论分析了活性剂液滴受热铺展的稳定性及物性参数的影响.

上述研究主要分别围绕基底表面性质和表面活性剂展开,并且稳定性分析主要针对平整基底且多数采用模态化理论.而采用非模态化理论分析在基底特征和表面活性剂耦合作用下液滴的铺展过程及其稳定性特征还尚未展开.因此,本文基于非模态稳定性理论对波纹基底上含不溶性活性剂液滴的铺展稳定性进行研究,探讨影响液滴铺展稳定性的因素及其特征.

2 数理模型和演化方程组

2.1 液滴铺展数理模型

如图1所示,波纹基底函数为 $s^*(x^*)$,上标*表示有量纲参数,在基底上预置一层厚度为 $H_b^* - s^*(x^*)$ 的液膜,此时活性剂液滴在同一溶液的预置液膜表面进行铺展.为简化分析,采用润滑理论(又称润滑近似)^[15]进行研究,假设

- 1) 黏性流体流动处于层流状态;
- 2) 活性剂液滴铺展为黏性不可压缩 Newton 等温流动,动力黏度 μ^* 和密度 ρ^* 为常数;
- 3) 惯性力和重力均忽略不计,液滴铺展由毛细力主导;
- 4) 液滴初始最大厚度 H^* 与流动方向尺度 L^* 相比非常小,即 $\epsilon = H^*/L^* \ll 1$;
- 5) 在所述几何条件下可以忽略表面法线方向上的任何运动;
- 6) 壁面为无滑移无渗透界面,液膜自由表面外为无黏性气体.

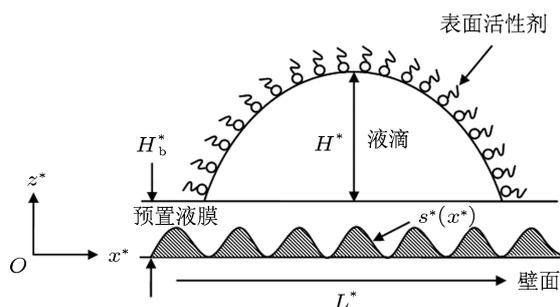


图1 波纹基底上含不溶性活性剂液滴的铺展示意图

2.2 基态和扰动态演化方程组

黏性不可压缩牛顿流体的控制方程为

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (1)$$

$$\rho^* [\mathbf{u}_t^* + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^*] = -\nabla^* p^* + \mu^* \nabla^{*2} \mathbf{u}^*, \quad (2)$$

式中, $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$ 为速度矢量, u^* , v^* 和 w^* 分别为 x^* , y^* 和 z^* 方向的速度,下角标 t^* 表示对时间的偏微分, p^* 为压强.

低浓度下的表面张力关系式为

$$\sigma^* = \sigma_0^* - \alpha_T^* \Gamma^*, \quad (3)$$

式中, σ^* 为溶液表面张力, σ_0^* 为无活性剂时预置液膜表面张力, α_T^* 为浓度引起的表面张力梯度, Γ^* 为液滴表面活性剂浓度.

在固体壁面处,满足无滑移无渗透条件

$$z^* = s^*, u^* = v^* = w^* = 0. \quad (4)$$

在气液界面上,满足切向和法向应力平衡方程

$$z^* = h^* + s^*, \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{t}^* = \nabla^* \sigma^* \cdot \mathbf{t}^*, \quad (5)$$

$$z^* = h^* + s^*, \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{n}^* = k^* \sigma^*, \quad (6)$$

式中, \mathbf{n}^* 和 \mathbf{t}^* 为界面处单位法向和切向矢量,

$$\mathbf{n}^*(x^*, y^*, z^*) = [-(h_{x^*}^* + s_{x^*}^*), -h_{y^*}^*, 1] \\ \times [1 + (h_{x^*}^* + s_{x^*}^*)^2 + h_{y^*}^{*2}]^{-1/2},$$

$$\mathbf{t}_{x^*}^*(x^*, y^*, z^*) = [1, 0, h_{x^*}^* + s_{x^*}^*] \\ \times [1 + (h_{x^*}^* + s_{x^*}^*)^2 + h_{y^*}^{*2}]^{-1/2},$$

$$\mathbf{t}_{y^*}^*(x^*, y^*, z^*) = [0, 1, h_{y^*}^*] [1 + (h_{x^*}^* + s_{x^*}^*)^2 + h_{y^*}^{*2}]^{-1/2};$$

k^* 为界面平均曲率,

$$k^* = \{ (h_{x^*}^* + s_{x^*}^*) (1 + h_{y^*}^{*2}) - 2(h_{x^*}^* + s_{x^*}^*) h_{y^*}^* h_{x^*}^* h_{y^*}^* \\ + h_{y^*}^* [1 + (h_{x^*}^* + s_{x^*}^*)^2] \} \\ \times [1 + (h_{x^*}^* + s_{x^*}^*)^2 + h_{y^*}^{*2}]^{-3/2};$$

T^* 为液体的应力张量; h^* 为液膜厚度.

气液界面上的运动学边界条件为

$$z^* = h^* + s^*, h_t^* + u_s^* (h_{x^*}^* + s_{x^*}^*) + v_s^* h_{y^*}^* = w_s^*, \quad (7)$$

式中, u_s^* , v_s^* 和 w_s^* 分别表示气液界面处 x^* , y^* 和 z^* 方向的速度.

活性剂浓度的对流-扩散方程为

$$\Gamma_t^* + \nabla_s^* \cdot (\mathbf{u}_s^* \Gamma^*) + \Gamma^* (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}^*) k^* = D_s^* \nabla^{*2} \Gamma^*, \quad (8)$$

式中, D_s^* 为液滴表面活性剂扩散系数.

定义下列无量纲变换对上述方程及边界条件进行无量纲化(无上标*表示无量纲量)

$$(x^*, y^*, z^*, h^*, s^*) = L^*(x, y, z, h, s),$$

$$(u^*, v^*, w^*) = U^*(u, v, w),$$

$$t^* = \frac{L^*}{U^*}t, \quad p^* = \frac{S^*}{H^*}p,$$

$$\Gamma^* = \Gamma_m^* \Gamma, \quad \sigma^* = S^* \sigma + \sigma_m^*,$$

式中, $U^* = \frac{S^* H^*}{\mu^* L^*}$, $S^* = \sigma_0^* - \sigma_m^*$. U^* 为 Marangoni 速度, σ_m^* 为初始状态下液滴表面活性剂浓度最高时的表面张力; S^* 为铺展系数, 是最大与最小表面张力的差值; Γ_m^* 为液滴表面活性剂的最大浓度.

对于无量纲化后的方程组, 依据润滑理论保留数量级为 $\geq O(\epsilon)$ 的项, 可得

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (9)$$

$$u_{zz} = p_x, \quad (10)$$

$$v_{zz} = p_y, \quad (11)$$

$$p_z = 0, \quad (12)$$

$$\Gamma_t + (u_s \Gamma)_x + (v_s \Gamma)_y = \frac{1}{Pe} (\Gamma_{xx} + \Gamma_{yy}), \quad (13)$$

式中, 气液界面处的 Peclet 数 Pe 表示活性剂分子的对流运输与扩散运输的相对比例, 即 $Pe = U^* L^* / D_s^*$, 下角标 x, y 和 z 分别表示对 x, y 和 z 方向的偏微分.

表面张力关系式

$$\sigma = 1 - M\Gamma, \quad (14)$$

式中, Marangoni 数 M 表示由活性剂浓度梯度驱动的 Marangoni 效应的强弱程度, 即 $M = \alpha_T \Gamma_m^* / S^*$.

无量纲形式的边界条件为

$$z = s, u = v = w = 0, \quad (15)$$

$$z = h + s, u_z = \sigma_x, \quad (16)$$

$$z = h + s, v_z = \sigma_y, \quad (17)$$

$$z = h + s, p = -C(h_{xx} + h_{yy} + s_{xx}), \quad (18)$$

$$z = h + s, h_t + u_s(h_x + s_x) + v_s h_y = w_s, \quad (19)$$

式中, 毛细数 C 表示活性剂浓度对表面张力的影响, 从而反映了对液体流动的影响, 即 $C = \epsilon^2 \sigma_m^* / S^*$.

结合 (9) 式—(18) 式, 通过积分可得液膜厚度和表面活性剂浓度的演化方程组

$$h_t = -\nabla \cdot \left(C \frac{h^3}{3} \nabla \nabla^2 (h + s) - M \frac{h^2}{2} \nabla \Gamma \right), \quad (20)$$

$$\Gamma_t = \frac{\nabla^2 \Gamma}{Pe} - \nabla \cdot \left(\frac{C}{2} h^2 \Gamma \nabla \nabla^2 (h + s) \right.$$

$$\left. - M h \Gamma \nabla \Gamma \right). \quad (21)$$

为研究活性剂液滴的铺展稳定性, 需对各特征量施加展向扰动, 即分解为基态量 $(h_0, \Gamma_0)(x, t)$ 和扰动量 $(h_1, \Gamma_1)(x, t)$ ^[16,17], 分析特征量在基态和扰动态下的演化历程

$$(h, \Gamma)(x, y, t) = (h_0, \Gamma_0)(x, t) + (h_1, \Gamma_1)(x, t) \exp(iky), \quad (22)$$

式中, 下角标“0”和“1”分别代表基态和扰动态, k 为波数.

将 (22) 式分别代入 (20) 式和 (21) 式中, 可得基态和扰动态下的液膜厚度和表面活性剂浓度的演化方程组

$$h_{0t} = \left[-\frac{C}{3} h_0^3 (h_{0xxx} + s_{xxx}) + M \frac{1}{2} h_0^2 \Gamma_{0x} \right]_x, \quad (23)$$

$$\Gamma_{0t} = \frac{\Gamma_{0xx}}{Pe} - \left[\frac{C}{2} h_0^2 \Gamma_0 (h_{0xxx} + s_{xxx}) - M h_0 \Gamma_0 \Gamma_{0x} \right]_x, \quad (24)$$

$$h_{1t} = \left(-\frac{C}{3} h_0^3 h_{1xxx} + \frac{C}{3} k^2 h_0^3 h_{1x} - C h_0^2 h_{0xxx} h_1 \right)_x + \frac{M}{2} (h_0^2 \Gamma_{1x} + 2 h_0 h_1 \Gamma_{0x})_x + \frac{C}{3} k^2 h_0^3 h_{1xx} - \frac{C}{3} k^4 h_0^3 h_1 - \frac{M}{2} k^2 h_0^2 \Gamma_1, \quad (25)$$

$$\Gamma_{1t} = \frac{\Gamma_{1xx} - k^2 \Gamma_1}{Pe} - \frac{C}{2} (h_0^2 h_{0xxx} \Gamma_1 + 2 h_0 h_{0xxx} h_1 \Gamma_0 + h_0^2 h_{1xxx} \Gamma_0 - k^2 h_0^2 h_{1x} \Gamma_0)_x + M (h_0 \Gamma_0 \Gamma_{1x} + h_0 \Gamma_{0x} \Gamma_1 + h_1 \Gamma_0 \Gamma_{0x})_x - \frac{C}{2} (k^4 h_0^2 h_1 \Gamma_0 - k^2 h_0^2 h_{1xx} \Gamma_0) - M k^2 h_0 \Gamma_0 \Gamma_1. \quad (26)$$

3 数值模拟及非模态理论

3.1 数值计算初始和边界条件

采用 PDECOL 程序^[18,19] 模拟演化方程 (23) 式—(26) 式. 选取 $0 < x < 30$ 的一维区域进行计算, 模拟中对网格数为 1000, 2000 和 3000 等进行无关性验证, 其中网格数为 1000 的偏差略大, 网格数为 2000 的偏差仅为 0.06%, 当网格数提高到 3000 时偏差几乎不变, 而此时计算时长增加较多. 因此, 在满足精度和减少计算时间的条件下, 将计算区域划分成 2000 的均匀网格.

程序中的初始条件为

$$h_0(x, 0) = (1 + H_b - D - x^2)F(1 - x) + (H_b - D)F(x - 1) + D - s(x), \quad (27)$$

$$s(x) = D/2[\sin(k_0x) + 1], \quad (28)$$

$$\Gamma_0(x, 0) = \Gamma_c F(1 - x), \quad (29)$$

$$h_1(x, 0) = \Gamma_1(x, 0) = \exp(-x^2), \quad (30)$$

式中, $F(x) = 0.5[1 + \tanh(100x)]$ 为 Heaviside 阶跃函数; $s(x)$ 为波纹状基底函数. 其中, 无量纲最大预置液膜厚度 $H_b = 0.2$, 基底高度 $D = 0.1$ 和波数 $k_0 = 1$, 初始活性剂浓度 $\Gamma_c = 1$.

程序中的边界条件为

$$h_{0x}(\infty, t) = h_{0xxx}(\infty, t) = 0, \quad (31)$$

$$\Gamma_{0x}(\infty, t) = 0, \quad (32)$$

$$h_{1x}(0, t) = h_{1x}(\infty, t) = 0, \quad (33)$$

$$h_{1xxx}(0, t) = h_{1xxx}(\infty, t) = 0, \quad (34)$$

$$\Gamma_{1x}(0, t) = \Gamma_{1x}(\infty, t) = 0. \quad (35)$$

铺展过程中, 保证活性剂总摩尔质量守恒

$$\int_0^{+\infty} \Gamma_0 dx = 1. \quad (36)$$

3.2 非模态稳定性理论

流动稳定性研究的经典方法是线性稳定性理论中的模态展开法, 即正则模方法. 但含活性剂液滴的铺展过程和扰动控制方程都属于高度非正则, 是与初始条件有关的初值问题^[20], 无法用模态法进行稳定性分析, 所以非模态稳定性理论^[21]是求解此类问题的重要方法. 非模态稳定性方法主要考察某时刻扰动能量的增长情况, 因此也称瞬态增长法.

定义在 $t = \tau$ 时刻, 扰动能量为

$$E_q(\tau) \equiv \int_0^{+\infty} (q - q_\infty)^2(x, \tau) dx, \quad (37)$$

式中, $q = (h_0, \Gamma_0, h_1, \Gamma_1)$, $q_\infty = (H_b - s(x), 0, 0, 0)$.

活性剂液滴铺展时, 涉及液膜厚度和表面活性剂浓度的扰动, 其扰动能量放大比分别为

$$G_h(t) = \frac{E_{h_1}(t)/E_{h_0}(t)}{E_{h_1}(t=0)/E_{h_0}(t=0)}, \quad (38)$$

$$G_\Gamma(t) = \frac{E_{\Gamma_1}(t)/E_{\Gamma_0}(t)}{E_{\Gamma_1}(t=0)/E_{\Gamma_0}(t=0)}, \quad (39)$$

式中, $E_{i1}(t)$, $E_{i1}(t=0)$ 和 $E_{i0}(t)$, $E_{i0}(t=0)$ 分别为 t 时刻和初始时刻的扰动和基态能量.

在此基础上, 液滴厚度和表面活性剂浓度的瞬态扰动增长率为

$$\lambda_h(t) = \frac{1}{G_h} \frac{dG_h}{dt} = \lambda_{h_1} - \lambda_{h_0}, \quad (40)$$

$$\lambda_\Gamma(t) = \frac{1}{G_\Gamma} \frac{dG_\Gamma}{dt} = \lambda_{\Gamma_1} - \lambda_{\Gamma_0}, \quad (41)$$

式中

$$\lambda_{h_0} = \frac{1}{E_{h_0}} \frac{dE_{h_0}}{dt}, \quad \lambda_{\Gamma_0} = \frac{1}{E_{\Gamma_0}} \frac{dE_{\Gamma_0}}{dt}, \quad (42)$$

$$\lambda_{h_1} = \frac{1}{E_{h_1}} \frac{dE_{h_1}}{dt}, \quad \lambda_{\Gamma_1} = \frac{1}{E_{\Gamma_1}} \frac{dE_{\Gamma_1}}{dt}. \quad (43)$$

若 $\lambda_i(t) < 0$, 则系统表现为“瞬态稳定”, 反之, 若 $\lambda_i(t) > 0$, 则为“瞬态不稳定”.

4 演化历程和稳定性分析

4.1 演化历程

图 2 为 $k = 4$ 时波纹基底上含不溶性活性剂液滴的演化历程. 在活性剂浓度引起的 Marangoni 效应驱动下, 液滴中心厚度逐渐减小, 铺展前沿变厚, 液膜最薄处不断远离液滴中心且最小液膜厚度持续减小. 同时受波纹基底的影响, 液滴铺展前沿逐渐衍生出类基底形状的子波结构, 最小液膜厚度明显下降并最终低于基底高度 0.1, 如图 2(a). 这是因为液膜流经波纹基底表面时, 基底波谷使此处液体局部压力减小、流速增大, 造成凹陷现象; 而基底波峰使此处液体局部压力增加、流速减小, 形成隆起现象. 图 2(b) 表明活性剂浓度梯度随演化时间不断减小, 活性剂分子扩散范围变大, 而且活性剂浓度在液膜最薄处下降速度最快.

由图 2(c) 和 (d) 可知, 扰动态下的液膜厚度 h_1 和活性剂浓度 Γ_1 均呈单驼峰型变化, 并随时间演变, h_1 和 Γ_1 逐渐衰减为零. 其中, 扰动量 h_1 的峰值出现在液膜最薄处, Γ_1 的峰值出现在活性剂浓度下降速度最快处, 而在液滴中心及铺展前沿处 h_1 和 Γ_1 极小, 且 Γ_1 有明显的负扰动现象出现, 如图 2(e) 和 (f) 所示.

图 3 所示为波纹基底上的液滴铺展半径 R_f 随 t 的变化情况. 从图中可以看出, R_f 随 t 持续增大, 且近似满足关系 $R_f \sim t^{1/3}$, 这与 Zhao 等^[22] 在研究圆柱状表面的液滴动态润湿特性时所得的结论完全符合.

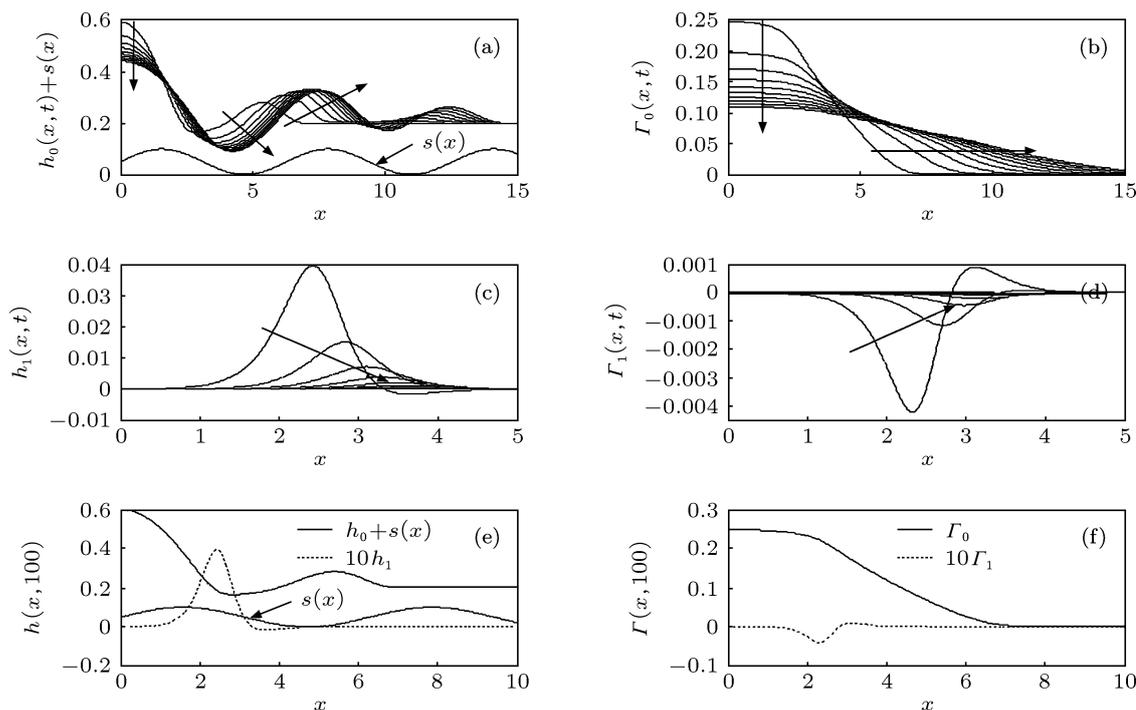


图2 液膜厚度和活性剂浓度的基态和扰动态演化过程 ($k = 4, t = 100-1000, \Delta t = 100$)

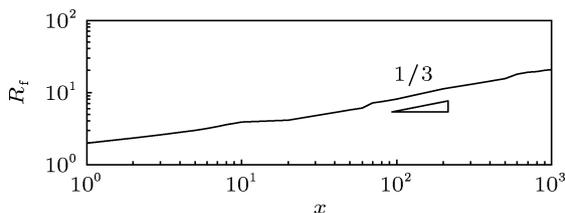


图3 液滴铺展半径 R_t 随时间 t 的发展关系

4.2 铺展稳定性分析

图4表明,当不考虑扰动波数的影响时,即 $k = 0$ 时,扰动能量放大比 G_h 和 G_Γ 随时间 t 持续增长,但增长率均很小.而此时 λ_h 在铺展历程中始终大于0,且 λ_Γ 在 $t > 200$ 时也一直大于0,说明无扰动波数时的液滴铺展不稳定.随 k 增加, G_h 和 G_Γ 的减小速率不断提高,且 G_h 和 G_Γ 随 t 持续降低.同时, λ_h 和 λ_Γ 随 k 增加逐渐小于0,如 $k = 2$ 和 4 的情形.特别当 $k = 4$ 时, λ_h 和 λ_Γ 均小于0,此时液滴铺展趋于稳定,因此选取 $k = 4$ 可得到比较稳定的结果,并由此得出增加扰动波数可以强液滴铺展稳定性.但当 $k = 6$ 时, G_h 和 G_Γ 在 $t > 500$ 时不再持续降低,且 λ_h 和 λ_Γ 均大于0,此时液滴铺展不稳定.这表明液滴铺展保持稳定的扰动波数 k 为一有限范围,其稳定性并非随 k 增加一直保持稳定.

为全面分析扰动波数 k 的影响,图5给出了较大 k 值时扰动能量放大比和瞬态扰动增长率的变化.

该图表明,较大 k 值时 G_h 和 G_Γ 随 t 的变化与 $k = 6$ 的情形类似,即 G_h 和 G_Γ 的变化分为两个阶段.定义扰动能量保持不变的时刻为 t_s , 1) 当 $t < t_s$ 时, G_h 和 G_Γ 迅速降低; 2) $t > t_s$ 时, G_h 和 G_Γ 则保持定值.随 k 增加,在 $t < t_s$ 范围内, G_h 和 G_Γ 减小速率明显增大,特别当 $k \geq 20$ 时, G_h 和 G_Γ 几乎呈垂直下降, t_s 不断缩短并最终接近于0,如图5(e)所示;而在 $t > t_s$ 的 G_h 和 G_Γ 无变化,只是维持的定值有所减小.

根据图5(c)和图5(d)可知, $t > t_s$ 时的 λ_h 和 λ_Γ 恒大于0,又因随 k 增加 t_s 不断缩短,因此 λ_h 和 λ_Γ 在整个铺展历程中几乎都大于0,即较大 k 值时的液滴铺展随 k 增加更加不稳定.

结合图4和图5可知,扰动波数 k 取较小值时,液滴铺展历程趋于稳定.其中当 $k \leq 4$ 时,随 k 增加,其稳定性增强;当 $k \geq 6$ 时,随 k 增加,液滴铺展不稳定性加剧.相比其他扰动波数, $k = 4$ 时液滴铺展的稳定性更为显著.

4.3 参数对铺展稳定性的影响

图6为 $k = 4$ 时 Marangoni 数 M 的影响, M 取值不同时,其稳定性呈现截然不同的变化.当 M 从1提高至20时, G_h 和 G_Γ 由下降趋势转变为增长趋

势, 而 λ_h 和 λ_r 也由小于 0 转变为大于 0, 特别是当 $M = 20$ 时, λ_h 和 λ_r 随 t 增加始终大于 0, 即在整个演化历程中液滴铺展均不稳定, 由此可知增大 M 值将导致液滴铺展趋于不稳定. 这是由于 M 值增大时, 活性剂浓度诱发的 Marangoni 效应增强, 使液膜最薄处的最小液膜厚度持续减小, 而扰动量 h_1 和

Γ_1 的峰值恰好出现在液膜最薄处, 从而导致液滴铺展更不稳定. Warner 等^[10] 对可溶性活性剂液滴在薄液膜表面上的铺展稳定性结果表明, Marangoni 效应增强会使最小液膜厚度减薄, 指进现象加剧, 是引起液滴铺展不稳定的主要原因, 图 6 所得结论与此一致.

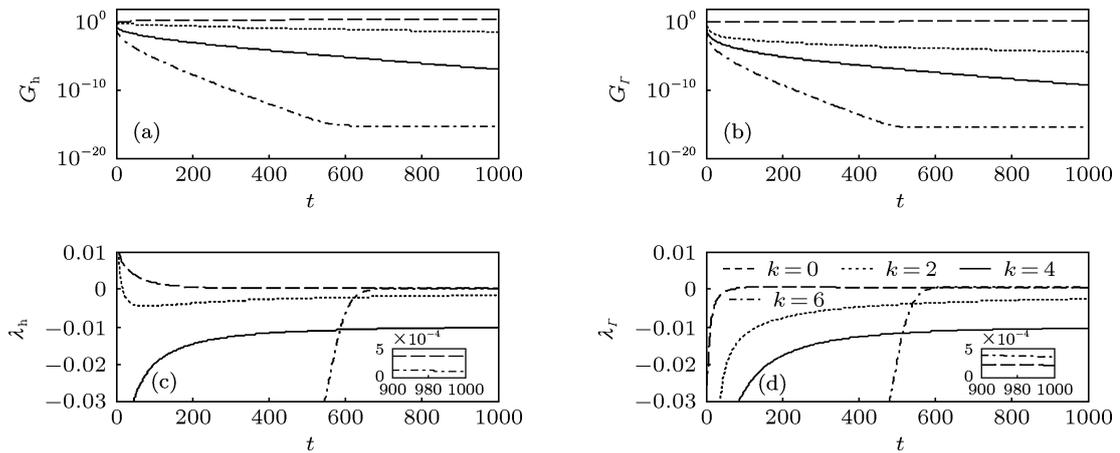


图 4 较小 k 值时的扰动能量放大比和瞬态扰动增长率

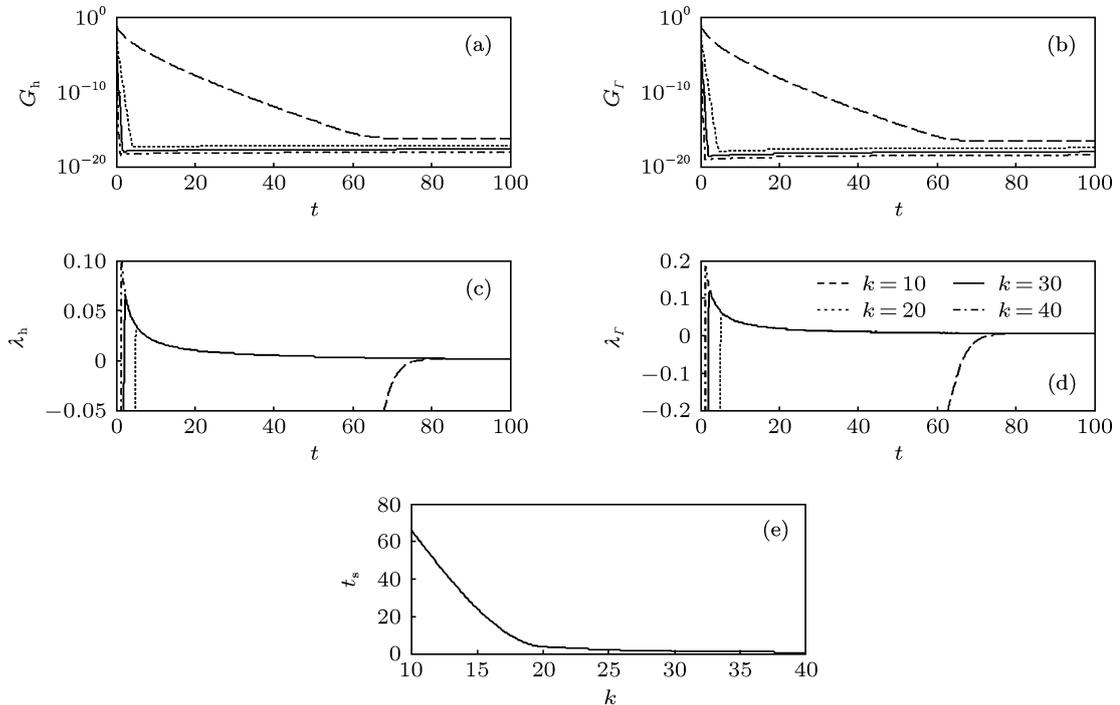


图 5 较大 k 值时的扰动能量放大比和瞬态扰动增长率

由 Peclet 数定义可知, Pe 表征液滴表面活性剂分子的扩散速度, 因此小 Pe 值对应大的扩散速度. 当 $Pe = 10$ 时, 活性剂分子迅速分布于液滴及预置液膜表面, 使液滴铺展仅受波纹基底的影响. 由图 7 可知, 在铺展中前期 $t < 600$ 时, $Pe = 10$ 对应的 G_h

和 G_r 减小速率最大, λ_h 和 λ_r 均小于 0, 此时液滴铺展稳定性最强; 而在铺展后期 $t > 600$ 时, G_h 和 G_r 则维持恒定, 此时 λ_h 和 λ_r 恒大于 0, 表明在铺展后期, 随液滴铺展前沿变长, 液膜覆盖波纹基底的部分逐渐增大, 基底特征的影响不断突出, 伴随

流动阻力的作用, 共同使得液滴铺展变得不稳定. 当 Pe 增大时, G_h 和 G_r 的降低速率明显减缓, 而 λ_h 和 λ_r 始终小于 0, 因此 Pe 增大促使液滴铺展稳定. 但比较 $Pe = 100$ 和 1000 情形可知, 过大 Pe 对应下的稳定性有所下降. 因此, 通过上述分析表明, Pe 取适中值时, 液滴铺展稳定性会更强.

根据 (28) 式可知, 基底高度 D 是改变基底不平整度的重要参数, 而基底不平整度会影响液滴铺展的稳定性. 图 8 为 $k = 4$ 时基底高度 D 的影响, 随 D 增加, G_h 和 G_r 的减小速率不断增大, 且 λ_h 和 λ_r 始终小于 0, 因此可通过增加基底高度进而增强液滴铺展的稳定性, 该结果与 Sadiq 等^[3] 所得稳定性研究结果一致. 其中, $D = 0.1$ 和 0.5 对应的 G_h 和 G_r 减小速率几乎相同, 且 λ_h 和 λ_r 的差别也很小. 但当 $D = 1$ 且在铺展中后期 $t > 500$ 时, G_h 和 G_r 的减小速率显著变大, λ_h 和 λ_r 也出现明显的下降.

由此可知, 当 $D \leq 0.5$ 时, 增大 D 对液滴铺展的稳定性影响很小; 当 $D \geq 0.5$ 时, 随 D 增大, 液滴铺展稳定性增强. 这是因增大 D 后对应的最大预置液膜厚度 H_b 也随之增加, 即预置液膜总量变大, 由此减弱基底特征对液滴铺展的影响, 因而稳定性有所提高.

基底波数 k_0 也是影响基底不平整度的重要参数. 图 9 为 $k = 4$ 时基底波数 k_0 的影响. 由图可知, 当 k_0 由 1 提高为 2 时, G_h 和 G_r 的减小速率变大, 且 λ_h 和 λ_r 始终小于 0, 液滴铺展稳定性增强. 但当波数 k_0 增至 3 时, G_h 和 G_r 在铺展后期维持定值, 此时 λ_r 大于 0, 液滴铺展趋于不稳定. 而当 $k = 4$ 时, G_h 和 G_r 又减小缓慢, 且 λ_h 和 λ_r 始终小于 0, 液滴铺展呈现稳定特征, 但与 $k_0 = 2$ 时相比, 其稳定性较弱. 因此, 扰动波数 $k = 4$ 时, 基底波数 $k_0 = 2$ 时液滴铺展更加稳定, 而 $k_0 = 3$ 时液滴的铺展后期呈现不稳定特征.

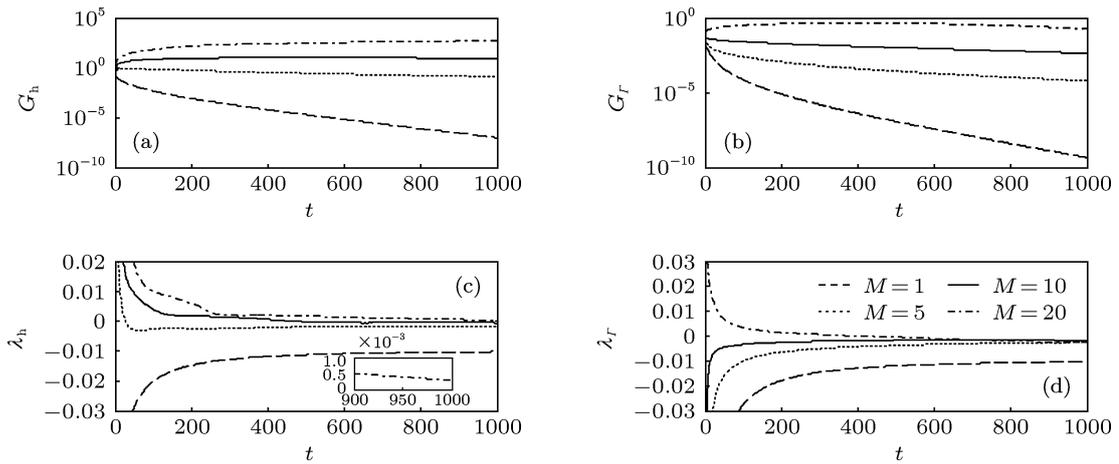


图 6 $k = 4$ 时 Marangoni 数 M 的影响

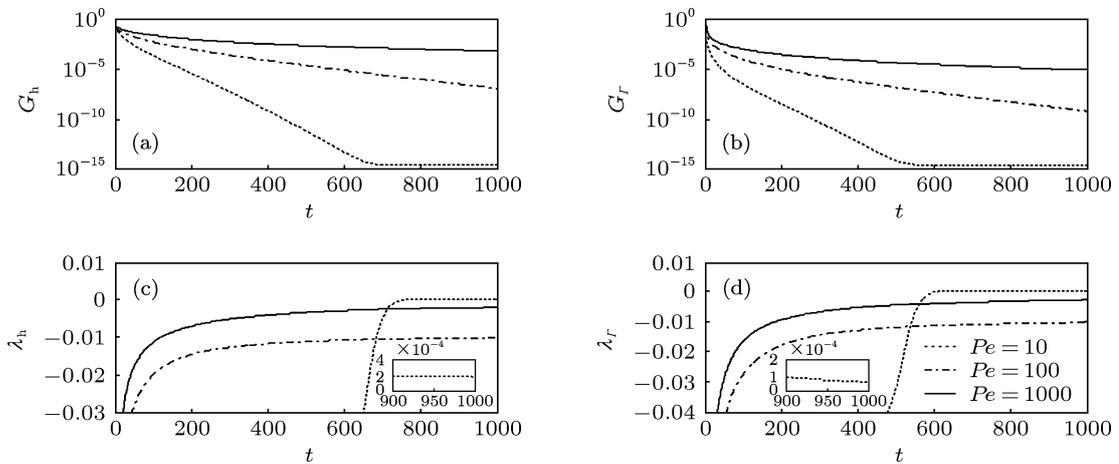


图 7 $k = 4$ 时 Peclet 数 Pe 的影响

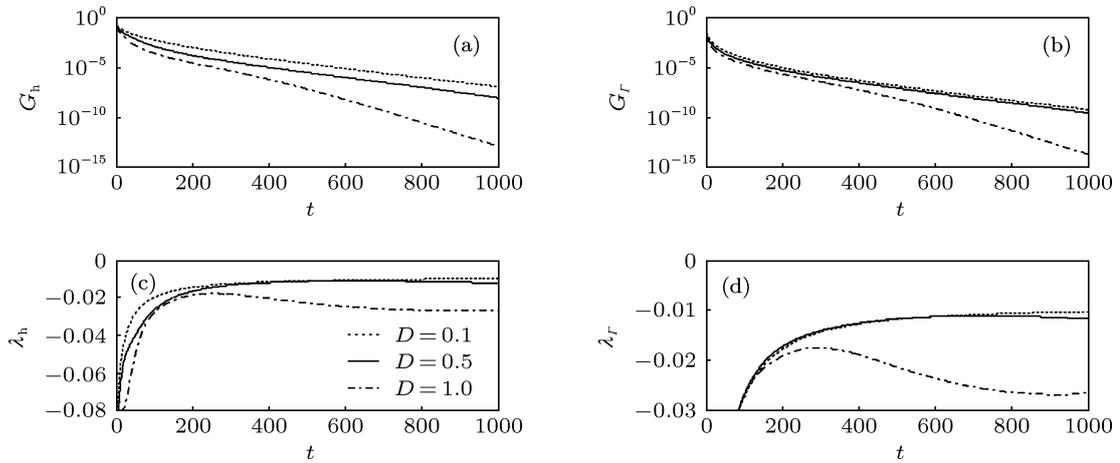


图8 $k=4$ 时基底高度 D 的影响

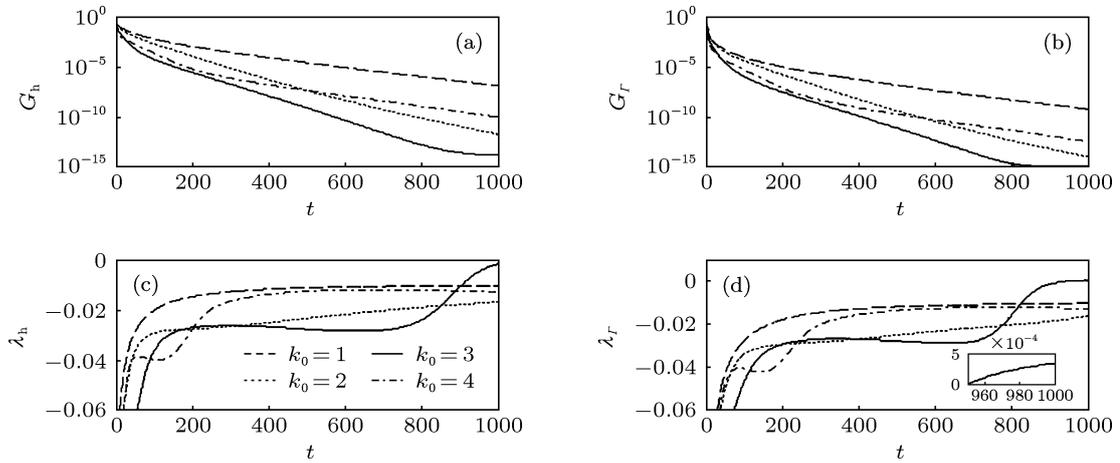


图9 $k=4$ 时基底波数 k_0 的影响

5 结论

基于非模态稳定性理论,分析了波纹基底上含不溶性活性剂液滴的铺展特征,以及不同参数对扰动能量放大比和瞬态扰动增长率的影响.主要结论如下:

1. 扰动量 h_1 和 Γ_1 均呈现单驼峰型变化,且随时间持续,扰动量 h_1 和 Γ_1 逐渐衰减为零.其中,在液滴中心及铺展前沿处扰动量极小,扰动量 h_1 的峰值出现在液膜最薄处,扰动量 Γ_1 的峰值出现在活性剂浓度下降速度最快处,且 Γ_1 负扰动现象比较明显.

2. 扰动波数 k 对铺展稳定性具有显著的影响.无扰动波数 k 时液滴铺展最不稳定,当 k 由较小值增至较大值时,铺展由稳定转变为不稳定.其中,当 $k \leq 4$ 时,随 k 增加,液滴铺展的稳定性增强;当 $k \geq 6$ 时,随 k 增加,液滴铺展的不稳定加剧.相比其他扰动波数, $k=4$ 时的液滴铺展稳定性较强.

3. 增大 M 值促使液滴铺展不稳定性增强; Pe 取适中值(如 $Pe=100$) 有利于增强铺展稳定性;基底高度 D 的变化不会导致液滴铺展出现不稳定情况,且随 D 增大,液滴铺展稳定性变强;基底波数 $k_0=2$ 时液滴铺展更稳定, $k_0=3$ 时液滴的铺展后期呈现不稳定特征.

- [1] Ma A X, Wei J J, Yuan M Z, Fang J B 2009 *J. Eng. Thermol Physics* **30** 1324 (in Chinese) [马爱香, 魏进家, 袁敏哲, 方嘉宾 2009 工程热物理学报 **30** 1324]
- [2] Matar O K, Sisoiev G M, Lawrence C J 2008 *Chem. Eng. Sci.* **63** 2225
- [3] Sadiq M R, Tatiana G R, Stephan P 2012 *Phys. Fluids* **24** 014104
- [4] Tatiana G R, Alexander A, Peter S 2005 *Exp. Therm Fluid Sci.* **29** 765
- [5] Zhang C B, Chen Y P, Shi M H, Fu P P, Wu J F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7050 (in Chinese) [张程宾, 陈永平, 施明恒, 付盼盼, 吴嘉峰 2009 物理学报 **58** 7050]
- [6] Shi Z Y, Hu G H, Zhou Z W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2595 (in Chinese) [石自媛, 胡国辉, 周哲玮 2010 物理学报 **59** 2595]
- [7] Hamraoui A, Cachile M, Poulard C, Cazabat A M 2004 *Colloids Surf. A* **250** 215
- [8] Troian S M, Herbolzheimer E, Safran S A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 333
- [9] Matar O K 2002 *Phys. Fluids* **14** 4216
- [10] Warner M R E, Craster R V, Matar O K 2004 *Phys. Fluids* **16** 2933
- [11] Edmonstone B D, Matar O K, Craster R V 2005 *Physica D* **209** 62
- [12] Hu G H 2005 *Phys. Fluids A* **17** 088105
- [13] Li C X, Wang S L, Ye X M 2009 *Proc. CSEE*. **29** 60 (in Chinese) [李春曦, 王松岭, 叶学民 2009 中国电机工程学报 **29** 60]
- [14] Wang H 2012 *Spreading and Stability Analysis of a Surfactant-laden drop on Thermally Driven Thin Liquid Film* (Baoding: North China Electric Power University) (in Chinese) [王欢 2012 表面活性剂溶液的受热铺展过程稳定性研究 (保定: 华北电力大学)]
- [15] Zhao Y P 2012 *Physical Mechanics of Surface and Interface* (Beijing: Science Press) pp185–186m (in Chinese) [赵亚溥 2012 表面与界面物理力学 (北京: 科学出版社) 第 185—186 页]
- [16] Warner M R E, Craster R V, Matar O K 2004 *J. Fluid Mech.* **510** 169
- [17] Edmonstone B D, Matar O K, Craster R V 2006 *J. Colloid Interface Sci.* **293** 222
- [18] Wang S L, Li C X, Ye X M 2011 *Proc. CSEE* **31** 60 (in Chinese) [王松岭, 李春曦, 叶学民 2011 中国电机工程学报 **31** 60]
- [19] Wang S L, Li C X, Ye X M 2011 *CIESC J* **62** 2512 (in Chinese) [王松岭, 李春曦, 叶学民 2011 化工学报 **62** 2512]
- [20] Fischer B J, Troian S M 2003 *Phys. Rev.* **67** 016309
- [21] Zhou H, Zhao G F 2003 *Hydrodynamic Stability* (Beijing: National Defense Press) pp2–4m (in Chinese) [周恒, 赵耕夫 2003 流动稳定性 (北京: 国防工业出版社) 第 2—4 页]
- [22] Yuan Q Z, Zhao Y P 2013 *J. Fluid Mech.* **716** 171

Stability of liquid droplet containing insoluble surfactant spreading over corrugated topography*

Li Chun-Xi Pei Jian-Jun Ye Xue-Min[†]

(Key Laboratory of Condition Monitoring and Control for Power Plant Equipment, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

(Received 27 February 2013; revised manuscript received 23 April 2013)

Abstract

For the spreading of an insoluble surfactant-laden droplet over the corrugated topography, the lubrication theory is used to establish the physical and mathematical models of the spreading of droplet and to derive the base state and disturbance evolution equations for thin liquid film thickness and surfactant concentration. The stability of droplet spreading on topography surfaces, as well as the effects of several parameters are investigated based on the non-modal stability theory. Results show that disturbance quantities reach minimum at the droplet center and spreading fronts, and achieve the maximum in thinning regions, and the negative disturbance of surfactant concentration is quite obvious. Disturbance wave number can enhance the stability of the droplet spreading, but with increasing wave number, the stability tends to be weak and even transform into instability. The spreading stability is distinctly promoted with decreasing Marangoni number or increasing corrugated topography height. The droplet evolution displays a much stable spreading for moderate values of Peclet number and topography wave number.

Keywords: surfactant-laden droplet, topography surface, spreading, non-modal stability

PACS: 47.61.-k, 47.85.mf, 47.61.fg, 47.55.dk

DOI: 10.7498/aps.62.174702

* Project supported by the Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972077, 11202079), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (Grant No. 13MS97).

[†] Corresponding author. E-mail: yexuemin@163.com