

复杂交通运输网络上的拥挤与效率问题研究*

肖尧^{1)†} 郑建风^{1)2)‡}

1) (北京交通大学交通运输学院, 北京 100044)

2) (北京交通大学城市交通复杂系统理论与技术教育部重点实验室, 北京 100044)

(2013年4月20日收到; 2013年5月13日收到修改稿)

本文研究复杂交通运输网络上的拥挤与效率问题。在无标度网络、随机网络以及小世界网络等不同拓扑结构中, 探讨了不同的能力分配方式和不同的 OD (Origin-Destination) 交通需求分布对网络拥挤度和效率的影响。随着平均交通需求的增加, 分析无标度网络、随机网络以及小世界网络从自由流状态到交通拥堵状态的变化规律。为便于比较, 本文侧重研究网络拥挤度的倒数, 并将其定义为通畅度。研究发现网络中的通畅度与效率之间存在线性相关关系, 并且不同网络中的线性比例系数(或斜率)是不同的, 从而体现了不同网络具有不同的运输性能。

关键词: 复杂网络, 拥挤, 效率

PACS: 89.75.-k, 02.60.-x

DOI: 10.7498/aps.62.178902

1 引言

关于复杂网络的相关研究, 逐渐受到越来越多研究学者的关注, 在物理学、生物学、计算机网络和通信等多个领域都已开展了不同程度的工作^[1]。1998年, Watts 和 Strogatz^[2]发现了小世界效应, 并建立起第一个小世界网络模型, 简称 WS 模型; Barabási 和 Albert^[3]在 1999 年揭示了网络的无标度特性, 提出了一个可以构造无标度网络的 BA 模型, 复杂网络的研究也从此开启了一个新阶段。

一般地, 网络是由各个节点以及连接各个节点的边构成, 其中节点可以代表自然系统或者人造系统中各个个体, 而边则表示各个个体之间的相互关系。现实生活中的能源网络、交通运输网络、互联网络和万维网络都是复杂网络系统。本文侧重研究交通运输网络, 其中如地铁网络^[4], 城市道路网络^[5], 航空网络^[6-8], 海运网络^[9]等都为复杂网络, 并受到了较多关注。针对交通运输网络, 很多研究都致力于从两个方面改善运输效率^[10-13]: 对于给定的底层网络, 如何确定最优运输路径及方式; 对

于一个给定的运输策略, 何种网络结构是最优的。除此之外, 交通拥堵问题也是交通运输网络中常常研究的方面。

在过去的大部分研究^[10-13]中, 人们都将边上的费用或行驶时间视作固定的或者是随机给出的。随后, Wu 等^[14-16], Zhao 和 Gao^[17]通过引入费用函数描述的拥挤效应来研究复杂交通运输网络中的拥挤和效率问题。然而, 得到的研究结果都是基于一些简单的假设条件: 网络中所有边的能力固定, 且为相同的常数; 任何两点之间的 OD 交通需求相同, 且为 1。本文则主要研究不同的能力分配方式和不同的 OD 交通需求分布对网络上的拥挤和效率的影响。不同于以往的研究, 本文引入了网络拥挤度的倒数, 并定义为通畅度, 侧重分析不同网络上的通畅度和效率之间的相关关系。

本文侧重研究的复杂交通运输网络, 主要涉及城市交通网络、航空网络和海运网络等。为了分析比较不同网络拓扑结构对网络上的通畅度和效率的影响, 本文研究 3 种不同类型的网络, 即无标度网络、随机网络和小世界网络。

一般地, 当不考虑隧道或高架桥时, 城市交通

* 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2012CB725400) 和国家自然科学基金(批准号: 71131001, 71222101) 资助的课题。

† 通讯作者。E-mail: rickyspy@163.com

‡ 通讯作者。E-mail: jfzheng@bjtu.edu.cn

网络是一类平面网络。为了缓解某些区域的交通拥挤等原因，在很多大城市，例如北京，搭建了不少高架桥。高架桥的引入，类似于 Watts-Strogatz 小世界网络^[2]中的长程边，从而使得城市交通网络具有一定的小世界特性。

以往的研究^[6–9]表明，航空网络和海运网络具有一定的小世界效应和无标度特性。当研究航空网络和海运网络方面的相关问题时，与研究城市交通网络方面的相关问题时的主要区别在于采用不同形式的费用函数，具体可以参见文献[18—20]。在航空网络和海运网络中，费用函数具有规模经济效益（或规模报酬递增）的特性；而在城市交通网络中，费用函数具有规模报酬递减的特性，表现为拥挤效应。

另外，本文还研究了随机网络上的通畅度和效率，目的主要是为了与小世界网络和无标度网络上的结果进行比较。

2 费用函数

用户均衡（user equilibrium, UE）与系统最优（system optimum, SO）是 Wardrop^[21]于 1952 年提出的两种准则对应的交通网络平衡配流方式。在 UE 状态下，系统中每个交通参与者都力图选择其起讫点间费用最小的路径，并最终不存在单个交通参与者能通过单方面改变其路径而降低其费用，从而达到稳定状态。在 SO 状态下，系统中所有交通参与者服从统一调度，为实现系统整体最优化选取路径。理论上 SO 是最合理的方式，但由于交通参与者之间的非合作博弈关系导致其实际上很难实现，从而交通参与者会更期望交通流可以达到 UE 状态。

1956 年，Beckmann 等^[22]将 UE 问题转换成了一个等价数学规划模型：

$$\min Z(x) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x) dx, \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}, \quad \forall r, s, \quad (2)$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \quad \forall k, r, s, \quad (3)$$

$$x_{ij} = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs}, \quad \forall i, j, \quad (4)$$

其中， x_{ij} 表示边 (i, j) 上的流量， $t_{ij}(\cdot)$ 表示边 (i, j) 上的费用函数， f_k^{rs} 表示连接 OD 对 $r-s$ 的路径 k 上的流量， $\delta_{ij,k}^{rs}$ 表示若边 (i, j) 处在连接 $r-s$ 的路径 k 上，其值为 1，否则为 0。 (1) 式是模型中的目标函数，其本身并没有直观的经济含义； (2) 式表示路径流

量与 OD 流量间的守恒关系， (3) 式保证所有路径流量恒为正值， (4) 式表示边的流量与路径流量间的关联关系。

对于目标函数中费用函数，在不同的交通运输网络中，所采用的形式是不同的。在航空网络和海运网络中，费用函数具有规模报酬递增的特性，表现为规模经济效应；而在城市交通网络中，费用函数具有规模报酬递减的特性，表现为拥挤效应。为简单起见，本文中采用城市交通网络中经常使用的 BPR 函数^[23]，表示如下：

$$t_{ij} = t_{ij}^0 [1 + 0.15(x_{ij}/C_{e_{ij}})^4], \quad (5)$$

其中， t_{ij}^0 分别表示在边 (i, j) 上的零流时间， x_{ij} 表示在边 (i, j) 上的流量， $C_{e_{ij}}$ 表示在 (i, j) 边的能力。为便于分析，本文假设所有边的零流时间取值为 1。

3 数值模拟与结果

为了分析比较不同网络拓扑结构，本文研究 3 种不同类型的网络：无标度网络（BA）、随机网络（RN）和小世界网络（WS）。为了构造这三种类型的网络，本文利用 BA 模型生成无标度网络^[3]，采用二项式模型生成随机网络^[1]，通过 WS 模型（重连概率为 0.1）构造小世界网络^[2]。在数值模拟中，本文考虑网络的规模为 $N = 500$ ，节点平均度为 $\langle k \rangle = 6$ 。

为给网络中的各条边设置一个较为合理的能力，本文引入节点虚拟能力的概念。即 C_{ni} 表示节点 i 的虚拟通行能力，并且将虚拟通行能力平均分配给与其相连接的各条路段。对于任意一条特定路段 (i, j) ，我们假设其能力 $C_{e_{ij}}$ 从 $\frac{C_{ni}}{k_i}$ 和 $\frac{C_{nj}}{k_j}$ 中随机选取，其中 k_i 和 k_j 代表节点 i 和节点 j 的度数。

为了研究网络的性能，本文主要考虑拥挤度和效率两个指标。根据文献[20]，网络的拥挤度可以描述为

$$J = \frac{\sum_{i,j} x_{ij} t_{ij}}{\sum_{i,j} x_{ij} t_{ij}^0}. \quad (6)$$

显然 $J > 1$ 。为便于比较分析，本文取拥挤度的倒数 $1/J \in (0, 1)$ 作为参考指标，并不妨称之为通畅度

$$H = \frac{\sum_{i,j} x_{ij} t_{ij}^0}{\sum_{i,j} x_{ij} t_{ij}}. \quad (7)$$

根据 Latora 和 Marchiori 的研究^[24]，网络效率可以被定义为

$$E = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{1}{\tau_{ij}}, \quad (8)$$

其中, τ_{ij} 是 i 和 j 之间的最短路径长度。下面从两个不同交通需求分布的情况, 来研究不同网络中的通畅度和效率。

3.1 匀质交通需求分布

在匀质的交通需求分布的情况下, 我们假定每一个 OD 对具有相同的交通需求 q 。为了研究不同的能力分配方式对网络通畅度和网络效率的影响, 本节考虑两种不同的能力分配方式: 匀质的情况和异质的情况。

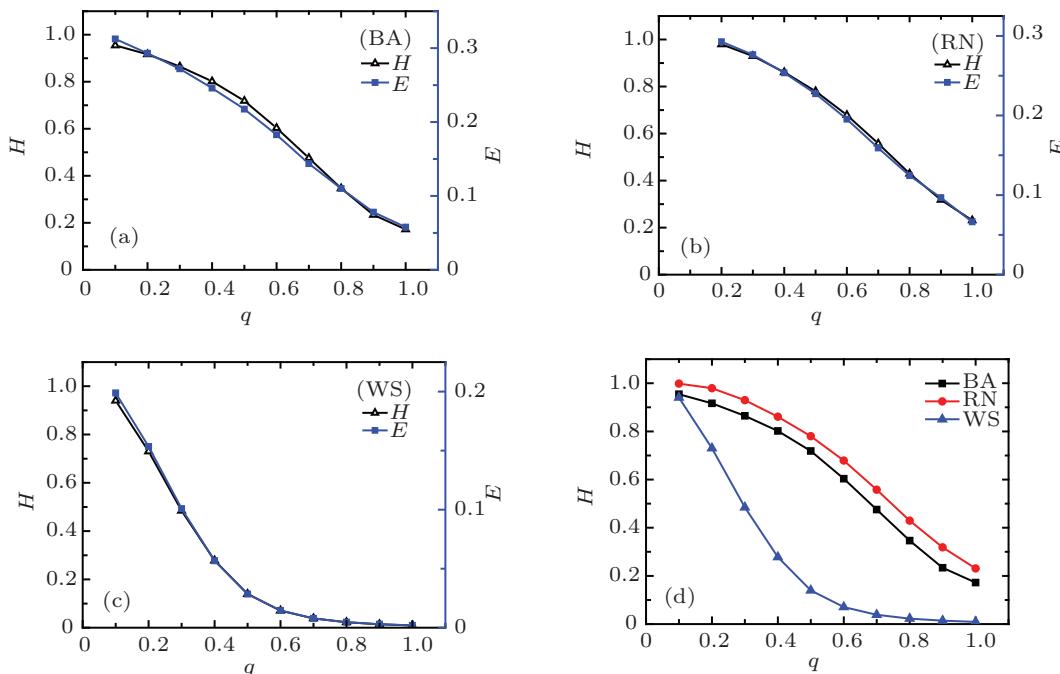


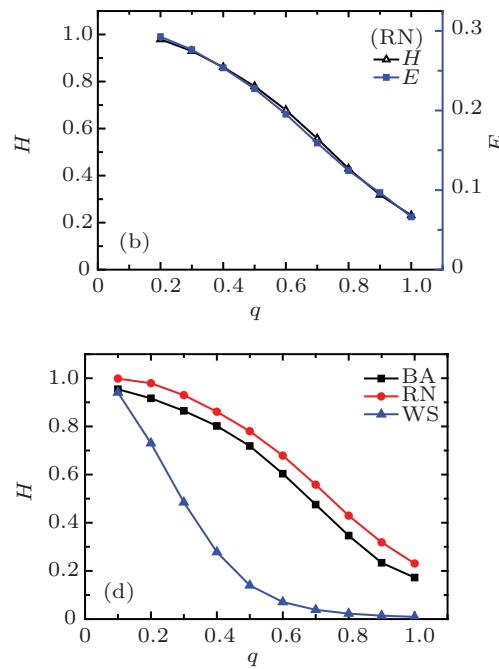
图 1 在匀质交通需求和匀质的能力分配的情况下, (a) 无标度网络、(b) 随机网络和 (c) 小世界网络的交通需求与通畅度、效率关系图; (d) 无标度网络、随机网络和小世界网络的通畅度比较图

图 1(d) 比较了不同网络中通畅度与交通需求的变化规律, 发现随机网络和无标度网络的对应曲线变化趋势类似, 并且两种网络对应的通畅度相当, 而小世界网络对应曲线随交通需求增加而相对前两者下降得更快。也就是说, 在这种情况下, 随机网络和无标度网络的运输效率是相当的, 而小世界网络的运输效率最差。这是因为小世界网络是匀质的网络, 几乎所有的节点具有相同的度数; 与小世界网络相比, 在无标度网络中, 存在不少度数较大的节点, 减少了 OD 之间最短路径上所需要通过的节点数量, 从而提高了运输效率; 与随机网络相比, 由于给每个节点分配相同的能力, 使得拥挤主要发生在无标度网络中度大的节点, 从而在一定程度上也限制了网络的运输效率。

3.1.1 匀质的能力分配

本节讨论匀质的能力分配方式, 即令网络中所有节点的虚拟能力相同并表示为 C 。

在图 1 中, 我们给出了当 $C = 1000$ 时的数值模拟结果。图 1(a)–(c) 为无标度网络 (BA)、随机网络 (RN)、小世界网络 (WS) 的网络性能指标通畅度 H 和效率 E 随着交通需求量 q 的改变而变化的情况。可以发现网络通畅度与网络效率的变化趋势类似, 随着交通需求 q 的增加, 网络通畅度 H 和网络效率 E 都不断降低。



我们还进一步研究了通畅度 H 和效率 E 间的关系, 如图 2 所示。可以发现, 各类型拓扑结构对应点连接而成的曲线近似于一条直线。同时根据

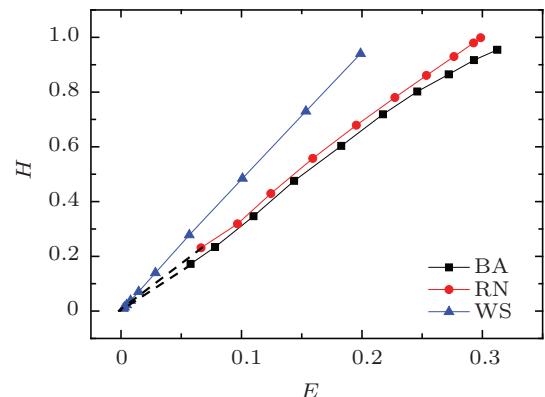


图 2 在匀质交通需求和匀质的能力分配情况下, 无标度网络、随机网络和小世界网络通畅度-效率关系图

效率与通畅度的定义, 对应曲线都应该通过原点, 可以表示为 $H = K \times E$, 其中 K 是比例系数. 通过线性拟合, 可以得到三种不同网络对应的 K 值, 见

表 1 在不同交通需求分布方式, 不同的能力分配方式下的效率-通畅度斜率 K 值表

交通需求分布方式	能力分配方式	K		
		BA	RN	WS
匀质交通需求分布	匀质的能力分配	3.177	3.388	4.757
		3.076	3.354	4.749
		3.021	3.345	4.743
	异质的能力分配	3.006	3.340	4.733
		3.013	3.341	4.737
		2.986	3.325	4.737
异质交通需求分布	匀质的能力分配	2.913	3.290	4.734

3.1.2 异质的能力分配

一般地, 网络中不同节点的能力是不同的, 并且节点的度越大, 能力也会越大. 所以本节假设节点的虚拟能力如下:

$$C_{ni} = \alpha k_i^\beta, \quad (9)$$

其中, α 和 β 是两个参数, k_i 是节点 i 的度.

在图 3 中, 我们给出了当 β 为 0.5, 1.0 和 1.5 时, 不同网络中的效率与通畅度的相关关系, 其中对应的 α 取值为 400, 200 和 100. 通过线性拟合得到了在不同的 β 值下的各网络的 K 值见表 1. 可以发现, 无标度网络对应的 K 值最小, 而小世界网络的 K 值最大. 即, 随着运输网络越来越拥堵, 效率由低到高依次为小世界网络、随机网络、无标度网络. 这与前一部分的分析是符合的. 同时由表中数据还可以看出随着 β 的增加, 不同网络对应的 K 值减小, 也就是说效率有所提高.

3.2 异质交通需求分布

实际中不同 OD 对的交通需求也是不同的. 对一个特定的 OD 对而言, 其交通需求应与其起始点和到达点的吸引力有关. 本节我们假设, 可以通过重力模型来预测 OD 交通需求^[20], 即

$$q_{ij} = \frac{k_i^{\theta_1} \cdot k_j^{\theta_2}}{\sum_{i \neq j} k_i^{\theta_1} \cdot k_j^{\theta_2}} \times q \times N \times (N - 1), \quad (10)$$

θ_1 和 θ_2 是两个参数, q 代表平均交通需求.

为便于研究, 设 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. 图 4 给出了当 θ 为 0.5, 1 和 1.5 时, 不同网络中的通畅度和效率的相关关系. 可以发现, 网络上交通需求越大, 网络的

表 1. 同时, 我们可以发现 K 值的大小, 也能体现网络的运输效率状况, 即 K 值越小, 网络的运输效率越高.

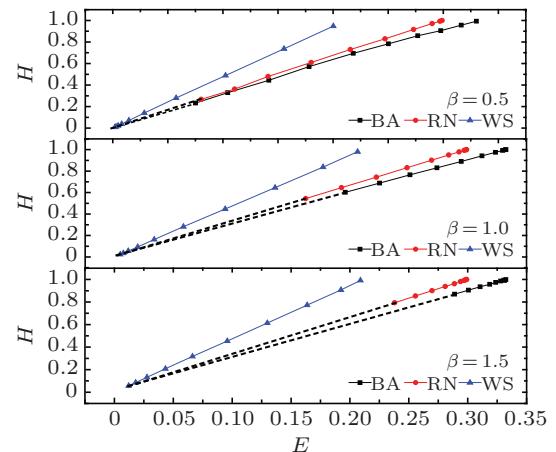


图 3 在匀质交通需求和异质的能力分配情况下, 当参数 β 取值不同时, 无标度网络、随机网络和小世界网络的畅通度与效率关系图

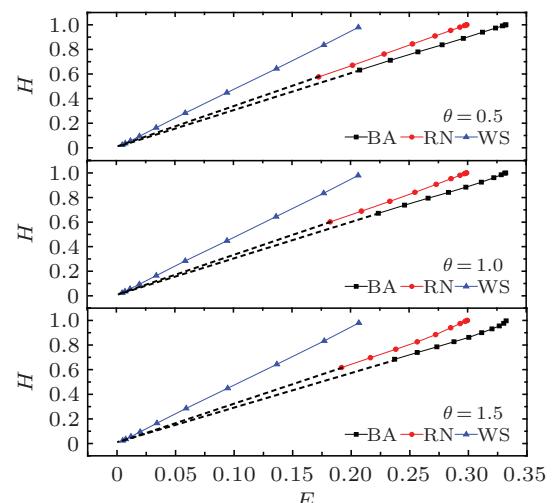


图 4 在异质交通需求和匀质的能力分配情况下, 当参数 θ 取值不同时, 无标度网络、随机网络和小世界网络的畅通度与效率关系图

效率也不断降低. 无论 θ 的取值, 无标度网络的效率总是最高, 随机网络次之, 小世界网络最差.

利用线性拟合得到各网络拟合直线的斜率 K 值列入表 1. 观察比较发现, 随着 θ 的增大, 无标度网络和随机网络的 K 值降低即网络效率提高, 但小世界网络的网络性能随着 θ 的取值增加而变化不明显.

4 结论与讨论

本文研究了不同网络中的通畅度与效率的问题. 探究了两种不同类型的交通需求分布: 匀质交通需求分布和异质交通需求分布. 并讨论了两种不

同的能力分配方式: 匀质的能力分配方式和异质的能力分配方式. 数值实验的结果显示, 对于相同的网络拥挤度或畅通度, 三种网络的效率由低到高依次为小世界网络, 随机网络和无标度网络. 同时本文进一步探究了不同网络中的通畅度和效率之间的线性相关关系, 以及比例系数.

希望本文结果可以帮助人们更好地了解复杂交通运输网络上的拥挤和效率相关问题. 另外, 根据现实中的交通需求分布, 如何来寻找出最合理的 ability 分配策略, 以提高道路通畅度和交通系统的效率, 是一个值得深入研究的问题.

-
- [1] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
[2] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
[3] Barabási A L , Albert R 1999 *Science* **286** 509
[4] Latora V, Marchiori M 2002 *Physica A* **314** 109
[5] Wu J J, Gao Z Y, Sun H J, Huang H J 2004 *Mod. Phys. Lett. B* **18** 1043
[6] Amaral L A N, Scala A, Barthelemy M, Stanley H E 2000 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **97** 11149
[7] Chi L P, Wang R, Su H, Xu X P, Zhao J S, Li W, Cai X 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1393
[8] Liu H K, Zhou T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 106 (in Chinese) [刘宏鲲, 周涛 2007 物理学报 **56** 106]
[9] Hu Y, Zhu D 2009 *Physica A* **388** 2061
[10] Echenique P, Gomez-Gardenes J, Moreno Y 2004 *Phys. Rev. E* **70** 056105
[11] Wang W X, Wang B H, Yin C Y, Xie Y B, Zhou T 2006 *Phys. Rev. E* **73** 026111
[12] Yan G, Zhou T, Hu B, Fu Z Q, Wan B H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 046108
[13] Wang D, Yu H, Jing Y W, Jiang N, Zhang S Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6802 (in Chinese) [王丹, 于灏, 井元伟, 姜囡, 张嗣瀛 2009 物理学报 **58** 6802]
[14] Wu J J, Gao Z Y, Sun H J, Huang H J 2006 *Europhys. Lett.* **74** 560
[15] Wu J J, Gao Z Y, Sun H J 2008 *Physica A* **387** 1025
[16] Wu J J, Gao Z Y, Sun H J 2008 *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology* **4** 69 (in Chinese) [吴建军, 高自友, 孙会君 2008 交通运输系统工程与信息 **4** 69]
[17] Zhao X M, Gao Z Y 2007 *Phys. lett.* **24** 283
[18] O'Kelly M E, Bryan D L 1998 *Transp. Res. B* **32** 605
[19] Alumur S A, Kara B Y 2008 *Euro. J. Oper. Res.* **190** 1
[20] Sheffi Y 1985 *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey)
[21] Wardrop J G 1952 *Proceedings of the Institute of Civil Engineers Part II* **1** 325
[22] Beckmann M, McGuire C B, Winsten C B 1956 *Studies in the Economics of Transportation* (New Haven: Yale University Press) p325
[23] Kim T J 1990 *Advanced Transport and Spatial Systems Model* (New York: Springer Verlag)
[24] Latora V, Marchiori M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 198701

Congestion and efficiency in complex traffic and transportation networks*

Xiao Yao^{1)†} Zheng Jian-Feng^{1)2)‡}

1) (*School of Traffic and Transportation, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China*)

2) (*MOE Key Laboratory for Urban Transportation Complex Systems Theory and Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China*)

(Received 20 April 2013; revised manuscript received 13 May 2013)

Abstract

This paper investigates the congestion and efficiency in complex traffic and transportation networks. Effects of different distributions of capacity and origin-destination traffic demand on the degree of congestion and efficiency are explored in different network topologies including scale-free networks, random networks and small-world networks. According to the increase of average traffic demand, the transition from free flow state to congested state is analyzed. For easy comparison, we discuss the reciprocal of the congestion degree, which is defined as the network unobstructedness. A linear relation between the degree of unobstructedness and efficiency in different networks is uncovered, and the linear proportional coefficients are different in scale-free networks, random networks and small-world networks. These coefficients can also be used to describe the different transport performance in different networks.

Keywords: complex networks, congestion, efficiency

PACS: 89.75.-k, 02.60.-x

DOI: 10.7498/aps.62.178902

* Project supported by the National Basic Research of China (Grant No. 2012CB725400), and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 71131001, 71222101).

† Corresponding author. E-mail: rickyspy@163.com

‡ Corresponding author. E-mail: jfzheng@bjtu.edu.cn