

## 两二能级原子在共同环境下的量子关联动力学\*

贺志<sup>1)†</sup> 李龙武<sup>2)</sup>

1) (湖南文理学院物理与电子科学学院, 常德 415000)

2) (北京理工大学物理学院, 北京 100081)

(2013年4月14日收到; 2013年6月17日收到修改稿)

通过精确求解带有偶极-偶极相互作用的两二能级原子与一个共同热库相互作用模型, 得到了两原子间量子纠缠和量子失谐 (quantum discord) 的解析表达式. 综合考虑了环境的非马尔可夫效应、原子间的偶极-偶极相互作用以及原子的本征频率同腔模中心频率之间的失谐量对两原子间量子纠缠和 quantum discord 的影响. 研究显示: 在非马尔可夫机制下, 且原子的本征频率与腔模中心频率是共振时, 当两原子初态处于纠缠态时, 原子间偶极-偶极相互作用可以显著抑制包括量子纠缠和 quantum discord 等量子关联的衰减, 更特别的是, 如果原子的本征频率同腔模中心频率有一定的失谐时, 利用原子间偶极-偶极相互作用可大大地延长两原子退纠缠的时间; 当两原子初态处于可分离态时, 从短时间来看, 原子间偶极-偶极相互作用可以提高量子纠缠和 quantum discord 振荡的振幅, 而在长时间极限下, 原子间偶极-偶极相互作用不会改变量子纠缠和 quantum discord 达到的稳定值. 最后, 讨论了原子间偶极-偶极相互作用对量子纠缠和 quantum discord 动力学不同的影响.

关键词: 量子纠缠, 量子失谐, 共同环境, 偶极-偶极相互作用

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Hk

DOI: 10.7498/aps.62.180301

## 1 引言

量子纠缠是量子信息科学中的一个中心概念, 特别是它在执行各种量子任务如量子隐形传态、量子稠密编码、量子密钥分配等中扮演着关键性的作用. 但我们实际处理的系统不可避免地会同周围环境发生相互作用, 从而导致系统退相干的出现. 近年来, 基于纳米尺度的固态量子信息处理<sup>[1]</sup>中, 退相干控制已经成为要解决的关键问题. 而量子纠缠态遭遇由环境导致的退相干时是十分脆弱的. Yu 和 Eberly<sup>[2]</sup>研究了两 qubit 系统与各自独立的马尔可夫环境相互作用模型, 发现一个单 qubit 相干性的衰减比纠缠的衰减要慢一些, 而两 qubit 之间纠缠会在一段有限的时间内突然消失, 这种现象被称为纠缠猝死 (ESD). Ficek 和 Tanaš<sup>[3]</sup>研究了两 qubit 系统与共同真空场相互作用模型, 发现两 qubit 系统之间的纠缠不但会出现纠缠猝死, 而且

在经过一段时间后, 其纠缠还会恢复. Bellomo 等<sup>[4]</sup>研究了两 qubit 系统与自独立的非马尔可夫环境相互作用模型, 发现环境的非马尔可夫性也即记忆效应可以延长两 qubit 系统退纠缠时间. Maniscalco 等<sup>[5]</sup>研究了两 qubit 系统与共同的非马尔可夫环境相互作用模型的纠缠动力学性质, 但是他们的模型没有考虑两 qubit 系统之间的偶极-偶极相互作用对其纠缠动力学性质的影响. López 等<sup>[6]</sup>研究了两 qubit 系统与各自独立热库相互作用模型并揭示当两 qubit 系统纠缠突然消失, 那么相应的热库系统的纠缠必然会突然产生, 这种现象被叫做纠缠突生 (ESB). Zhang 等<sup>[7]</sup>研究了两 qubit 系统与各自独立的非马尔可夫热库相互作用模型, 讨论了失谐量对两 qubit 系统和热库系统纠缠动力学的影响. Wang 等<sup>[8]</sup>研究了两 qubit 系统与各自独立不同谱密度的非马尔可夫热库相互作用模型的量子关联动力学. Cai 等<sup>[9]</sup>研究了在非马尔可夫环境下经典场驱动

\* 国家自然科学基金专项基金 (批准号: 11247294)、湖南省教育厅一般项目 (批准号: 12C0826) 和湖南文理学院博士启动基金 (批准号: 13101039) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hz9209@126.com

Jaynes-Cummings 模型中原子的熵压缩性质. Chen 等<sup>[10]</sup>研究了 Tavis-Cummings 模型中的偶极相互作用以及失谐量对两原子纠缠的影响. Shan 等<sup>[11]</sup>研究了在 Tavis-Cummings 模型中 X 型初态两原子的纠缠突然死亡与突然产生. Hu 等<sup>[12]</sup>研究了强度相关耦合双 Jaynes-Cummings 模型中的纠缠和量子失谐. 在上述文献中, 大多数文献都是围绕研究两原子与各自独立热库相互作用模型和两原子与共同热库相互作用模型, 但是这些研究一般都没考虑原子间的偶极 - 偶极相互作用; 而一些文献如研究 Tavis-Cummings 模型虽然考虑了原子间的偶极 - 偶极相互作用, 但很少考虑周围环境对系统退相干的影响. 最近, 我们注意到 Han 等<sup>[13-15]</sup>利用赝模方法研究了类似的模型中量子关联动力学. 本文采用拉普拉斯变换求解薛定谔方程, 得到了其模型中对应波函数的精确数学表达式. 因此本文综合考虑了环境的非马尔可夫效应、原子间的偶极 - 偶极相互作用以及原子的本征频率同腔模中心频率之间的失谐量等因素对原子系统间量子关联动力学的影响. 我们知道, 采用赝模方法可以用来处理整个系统有超过一个激发数的情况, 但一般只能给出其数值计算的结果. 另外, 一般赝模方法只能用来研究原子的本征频率同腔模中心频率相同也即共振的情况, 而不能用来处理失谐的情况. 而本文中用拉普拉斯变换求解薛定谔方程可以处理原子的本征频率同腔模中心频率有失谐的情况, 这样更加符合实际的考虑.

另一方面, 近年来在量子信息科学中出现了一种不同于量子纠缠的另一种量子关联 - 量子失谐 (quantum discord)<sup>[16,17]</sup>. 人们对 quantum discord 的研究产生了浓厚的兴趣. Datta 等<sup>[18]</sup>和 Lanyon 等<sup>[19]</sup>分别从理论和实验表明 quantum discord 是 DQC1 模型能够以指数加速的根源. Luo<sup>[20]</sup>详细讨论了两个 qubit 系统中的 quantum discord. Werlang 等<sup>[21]</sup>研究了两个 qubit 系统在各种马尔可夫环境中的 quantum discord 动力学演化特性, 发现 quantum discord 不会像量子纠缠那样发生纠缠猝死现象而是渐进地消失. Mazzola 等<sup>[22]</sup>研究了类似的模型, 发现对于某些初态, 其 quantum discord 完全不受退相干的影响. 所以这种新的量子关联 quantum discord 在量子信息科学的某些方面可能体现出比量子纠缠更加独特的优势.

在上述研究的启发下, 本文主要通过拉普拉斯

变换求解薛定谔方程, 得到了其模型中对应波函数的精确数学表达式. 本文将综合考虑环境的非马尔可夫效应、原子间的偶极 - 偶极相互作用以及原子的本征频率同腔模中心频率之间的失谐量等因素对原子系统间量子关联 (包括量子纠缠和 quantum discord) 动力学的影响.

## 2 理论模型与量子关联度量

### 2.1 理论模型

考虑两个全同二能级原子与一个共同零温度玻色热库相互作用模型, 该模型在旋波近似下对应的哈密顿量可写为 (令  $\hbar = 1$ )

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad (1)$$

其中

$$H_0 = \sum_{i=1}^2 \omega_0 \sigma_i^+ \sigma_i^- + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k, \quad (2)$$

$$H_I = \sum_{i=1}^2 \sum_k \left( g_k \sigma_i^+ b_k + g_k^* \sigma_i^- b_k^\dagger \right) + D \sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^2 \sigma_i^+ \sigma_k^-. \quad (3)$$

这里,  $\sigma_i^+ = |1\rangle_i \langle 0|$  和  $\sigma_i^- = |0\rangle_i \langle 1|$  是对应原子 ( $i = 1, 2$ ) 的泡利升降算符,  $\omega_0$  是原子的本征频率,  $b_k^\dagger$  和  $b_k$  分别是热库中任意  $k$  模的产生和湮没算符,  $g_k$  是原子与任意  $k$  模之间的耦合参数,  $D = [\tilde{d}\tilde{d} - 3(\tilde{d}\tilde{r}_{12})^2/r_{12}^3]/r_{12}^3$  是原子间的偶极 - 偶极相互作用强度,  $\tilde{d}$  和  $r_{12}$  分别是原子的电偶极量和两原子间的距离. 为了方便, 下面将在相互作用绘景中对该模型进行讨论. 在相互作用绘景中, 对应模型的哈密顿量变成

$$H_I(t) = \sum_{i=1}^2 \left[ \sigma_i^+(t) B(t) + \sigma_i^-(t) B^\dagger(t) \right] + D \sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \sigma_i^+ \sigma_j^-, \quad (4)$$

其中,  $\sigma_i^\pm(t) = \sigma_i^\pm \exp(\pm i\omega_0 t)$  ( $i = 1, 2$ ),  $B(t) = \sum_k g_k b_k \exp(-i\omega_k t)$ . 注意到,  $\left[ H, \sum_{i=1}^2 \sigma_i^+ \sigma_i^- + \sum_k b_k^\dagger b_k \right] = 0$ , 所以整个系统的激发数在演化过程中始终是保守的. 假设整个系统只有一个激发数的情况, 且两原子最初处于态  $|\phi\rangle_{12} = \cos\theta|10\rangle_{12} + \sin\theta|01\rangle_{12}$ , 热库处于真空态  $|\bar{0}\rangle_r, |\bar{0}\rangle_r = \prod_{k=1} |\bar{0}_k\rangle_r$ ,

这样整个系统的初态可写成  $|\phi(0)\rangle = |\phi\rangle_{12}|\bar{0}\rangle_r$ . 那么整个系统态在任意时刻  $t$  可表示成

$$|\phi(t)\rangle = [c_1(t)|10\rangle_{12} + c_2(t)|01\rangle_{12}]|\bar{0}\rangle_r + \sum_{k=1}^N D_k(t)|00\rangle_{12}|1_k\rangle_r. \quad (5)$$

根据相互作用绘景中的薛定谔方程  $\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle = -iH_I(t)|\phi(t)\rangle$  和方程 (4) 和 (5), 得到下面的系数方程

$$\dot{c}_1(t) = -i \sum_k g_k \exp[i(\omega_0 - \omega_k)t] D_k(t) - iDc_2(t), \quad (6)$$

$$\dot{c}_2(t) = -i \sum_k g_k \exp[i(\omega_0 - \omega_k)t] D_k(t) - iDc_1(t), \quad (7)$$

$$\dot{D}_k(t) = -ig_k^* \exp[-i(\omega_0 - \omega_k)t] \times [c_1(t) + c_2(t)]. \quad (8)$$

将方程 (8) 积分并考虑到初始条件  $D_k(0) = 0$ , 得到

$$D_k(t) = -i \int_0^t dt_1 g_k^* \exp[-i(\omega_0 - \omega_k)t_1] \times [c_1(t_1) + c_2(t_1)]. \quad (9)$$

接着将方程 (9) 代入方程 (6) 和 (7), 得到  $c_1(t), c_2(t)$  满足的方程

$$\dot{c}_1(t) = - \int_0^t dt_1 f(t-t_1)[c_1(t_1) + c_2(t_1)] - iDc_2(t), \quad (10)$$

$$\dot{c}_2(t) = - \int_0^t dt_1 f(t-t_1)[c_1(t_1) + c_2(t_1)] - iDc_1(t), \quad (11)$$

这里, 记忆核  $f(t-t_1) = \int d\omega J(\omega) \exp[i(\omega_0 - \omega)(t-t_1)]$  是与热库的谱密度  $J(\omega)$  有关的. 假设热库具有洛伦兹谱特征<sup>[23]</sup>, 它下面的表达式:

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_0 - \delta - \omega)^2 + \lambda^2}, \quad (12)$$

其中,  $\delta$  表示原子的本征频率  $\omega_0$  与腔模中心频率  $\omega_c$  之间的失谐量, 即  $\delta = \omega_0 - \omega_c$ . 参数  $\lambda$  定义了原子与腔模耦合的谱宽度, 它与热库的关联时间有关,  $\tau_B = \lambda^{-1}$ . 参数  $\gamma_0$  是与系统的弛豫时间  $\tau_R$  有关,  $\tau_R = \gamma_0^{-1}$ . 从而对方程 (10) 和 (11) 做相应的拉普拉斯变换, 再根据初始条件  $c_1(0) = \cos \theta, c_2(0) = \sin \theta$ , 最后做拉普拉斯逆变换以后, 可得到

$c_1(t), c_2(t)$  的数学表达式

$$c_1(t) = e^{iDt} \left\{ \cos \theta - (\cos \theta + \sin \theta) \left[ \frac{-2i(2bD - i\gamma_0\lambda)}{a^2 - B^2} + e^{-\frac{Bt}{2}} \left[ e^{-\frac{at}{2}} \frac{\chi - iaD}{a(a+B)} + e^{\frac{at}{2}} \frac{\chi + iaD}{a(a-B)} \right] \right] \right\}, \quad (13)$$

$$c_2(t) = e^{iDt} \left\{ \sin \theta - (\cos \theta + \sin \theta) \left[ \frac{-2i(2bD - i\gamma_0\lambda)}{a^2 - B^2} + e^{-\frac{Bt}{2}} \left[ e^{-\frac{at}{2}} \frac{\chi - iaD}{a(a+B)} + e^{\frac{at}{2}} \frac{\chi + iaD}{a(a-B)} \right] \right] \right\}, \quad (14)$$

这里,  $a = \sqrt{[\lambda - i(D + \delta)]^2 - 4\gamma_0\lambda}, B = \lambda + i(3D - \delta), b = \lambda + i(D - \delta), \chi = iD(b - 2iD) + \gamma_0\lambda$ . 如果我们把热库的态写成集合的形式, 即让  $|\bar{1}\rangle_r = (1/D(t)) \sum_{k=1}^N D_k(t)|1\rangle_r$ , 那么  $D(t) = \sqrt{1 - |c_1(t)|^2 - |c_2(t)|^2}$ , 最后方程 (5) 可化成紧凑的形式:

$$|\phi(t)\rangle = [c_1(t)|10\rangle_{12} + c_2(t)|01\rangle_{12}]|\bar{0}\rangle_r + D(t)|00\rangle_{12}|\bar{1}\rangle_r. \quad (15)$$

## 2.2 量子关联度量

对于一般两 qubit 系统之间量子关联的度量最著名的是量子纠缠度, 包括 Concurrence<sup>[24]</sup> 和 Negativity<sup>[25]</sup>. 本文将用 Concurrence(C) 来讨论两原子间的量子纠缠. 假设一个 X 型的两 qubit 系统的密度算符在基矢  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  中能表示成

$$\rho_{12} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & v \\ 0 & y & u & 0 \\ 0 & u^* & z & 0 \\ v^* & 0 & 0 & w \end{pmatrix}, \quad (16)$$

其中  $x, y, z, w$  都是实数且满足  $x + y + z + w = 1$ . 对于这种 X 型的密度矩阵, 其两 qubit 系统之间的纠缠也即 Concurrence 有下列分析表达式<sup>[26]</sup>:

$$C = 2 \max\{0, |v| - \sqrt{yz}, |u| - \sqrt{xw}\}. \quad (17)$$

所以根据方程 (17), 方程 (15) 对应态的两原子间的 Concurrence 为

$$C(t) = 2|c_2(t)c_1^*(t)|. \quad (18)$$

近年来, 人们研究发现用量子纠缠来定义各子系统之间的量子关联可能太过于苛刻, 提出了另外一种非常流行的度量量子关联方法——quantum

discord (QD)<sup>[14,15]</sup>. 对于 X 型的两 qubit 系统的密度矩阵如方程 (16), 其 QD 有分析表达式<sup>[27]</sup>:

$$QD_{a1}(\rho) = \min\{QD_1(\rho), QD_2(\rho)\}, \quad (19)$$

其中  $QD_{a1}(\rho)$  表示对第一个子系统进行测量后的 QD,

$$QD_1(\rho) = S(\rho^{a1}) - S(\rho^{a1a2}) - R, \quad (20)$$

$$QD_2(\rho) = S(\rho^{a1}) - S(\rho^{a1a2}) - T. \quad (21)$$

类似地, 当对第二个子系统进行测量后的 QD 可表示成

$$QD_{a2}(\rho) = \min\{QD_3(\rho), QD_4(\rho)\}, \quad (22)$$

其中

$$QD_1(\rho) = S(\rho^{a2}) - S(\rho^{a1a2}) - M, \quad (23)$$

$$QD_2(\rho) = S(\rho^{a2}) - S(\rho^{a1a2}) - N. \quad (24)$$

方程 (20), (21), (23), (24) 中  $M, N, R, T$  的定义可参阅文献 [27], 由于它们的表达式比较长, 这里没有给出.  $S(\rho^i) = -\text{Tr}(\rho^i \log_2 \rho^i)$  ( $i = a1, a2$ ) 分别对应约化子系统  $a1$  和  $a2$  的 von Neumann 熵,  $S(\rho^{a1a2}) = -\text{Tr}(\rho^{a1a2} \log_2 \rho^{a1a2})$  是整个系统的联合熵. 注意到, 当密度矩阵方程 (16) 中满足  $x = w$  或  $y = z$  时, 则有  $QD_{a1}(\rho) = QD_{a2}(\rho)$ <sup>[20,28]</sup>.

### 3 结果与讨论

本文主要讨论原子间的偶极 - 偶极相互作用强度  $D$  对两原子间量子关联包括量子纠缠和 quantum discord 的影响. 注意到当  $(\theta = 3\pi/4)$  即两原子初态处于  $(|10\rangle_{12} - |01\rangle_{12})/\sqrt{2}$ , 那么在该模型中两原子初态将不会受到退相干的影响, 这个结论已经被文献 [29] 指出, 但在其模型中没有考虑原子间的偶极 - 偶极相互作用.

1) 首先考虑在马尔可夫机制下 ( $\lambda = 5\gamma_0, \delta = 0$ ), 原子间偶极 - 偶极相互作用  $D$  对两原子间量子纠缠  $C$  的影响, 已假设两原子初态处于另外一种最大纠缠态 ( $\theta = \pi/4$ ), 如图 1 所示. 从图 1 中可看到: 在马尔可夫机制下, 随着  $D$  的增大, 两原子间纠缠  $C$  将会相应地增加, 但其增幅不是很明显. 这说明当不考虑环境的记忆效应也即非马尔可夫性时, 原子间偶极 - 偶极相互作用  $D$  对两原子间量子纠缠  $C$  的影响是有限的. 但接下来要讨论在非马尔可夫机制下, 原子间偶极 - 偶极相互作用  $D$  对两原子间量子纠缠  $C$  的影响. 我们将会看到: 与马尔

可夫机制相比, 非马尔可夫机制能导致截然不同的结果.

2) 考虑在非马尔可夫机制下 ( $\lambda = 0.1\gamma_0$ ), 偶极 - 偶极相互作用  $D$  对两原子间量子纠缠的影响, 如图 2 所示. 图 2(a) 和 (b) 分别代表原子本征频率与热库腔模中心频率在共振 ( $\delta = 0$ ) 和有一定失谐 ( $\delta = 8\lambda$ ) 情况下, 两原子间纠缠  $C$  对不同的偶极 - 偶极相互作用  $D$  随无量纲参量  $\gamma_0 t$  的演化曲线. 这里已假设两原子最初处于最大纠缠态, 即  $\theta = \pi/4$ , 且令  $\lambda = 0.1\gamma_0$ .

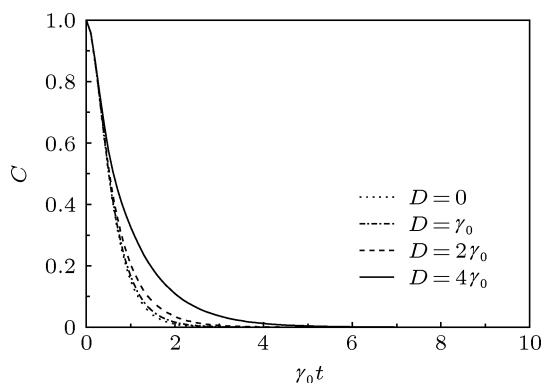


图 1 两原子间纠缠  $C$  在马尔可夫机制下 ( $\lambda = 5\gamma_0$ ) 对不同的偶极 - 偶极相互作用强度  $D$  随无量纲参量  $\gamma_0 t$  的演化曲线 (已令  $\delta = 0, \theta = \pi/4$ )

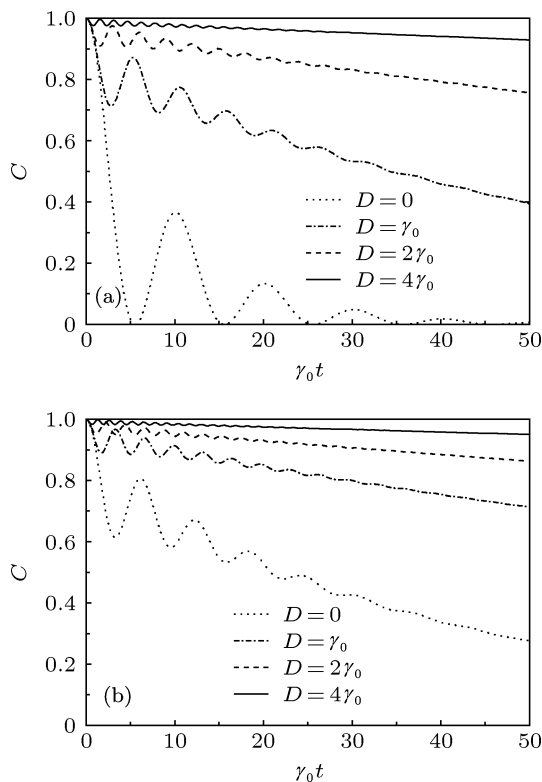


图 2 两原子间纠缠  $C$  在不同的偶极 - 偶极相互作用强度  $D$  随无量纲参量  $\gamma_0 t$  的演化曲线 (a)  $\delta = 0$ ; (b)  $\delta = 8\lambda$  (已令  $\lambda = 0.1\gamma_0, \theta = \pi/4$ )

从图 2(a) 可以看出: 随着  $D$  的不断增大, 两原子间纠缠保持得非常好. 与马尔可夫机制相比 (如图 1 所示), 偶极 - 偶极相互作用  $D$  大大提高了两原子退纠缠的时间. 更有兴趣的是, 我们发现: 当没有考虑原子间偶极 - 偶极相互作用, 即  $D = 0$ , 在  $\gamma_0 t = 50$  时, 两原子间纠缠从开始的最大纠缠衰减到几乎完全消失; 而当考虑原子间偶极 - 偶极相互作用, 如  $D = 4\gamma_0$ , 同样在  $\gamma_0 t = 50$  时, 两原子间纠缠量  $C$  能保持到大约 0.929. 其实之所以两原子间纠缠会保持得这么好, 其原因是: 两原子间纠缠动力学由参数  $\lambda$  和偶极 - 偶极相互作用强度  $D$  所共同决定. 我们知道: 参数  $\lambda$  同热库的关联时间是有关的,  $\tau_B = \lambda^{-1}$ , 热库的关联时间越长也即  $\lambda$  越小 ( $\lambda = 0.1\gamma_0$ ), 表示热库的记忆效应即非马尔可夫性也就越大, 这样原子系统中耗散到热库中的信息和能量也将更多返回系统, 所以热库的记忆效应有助于两原子间纠缠的保持, 再考虑到原子间偶极 - 偶极相互作用  $D$  也有利于两原子间纠缠. 综合这两方面的因素, 将不难理解在非马尔可夫机制下的两原子间纠缠会比在马尔可夫机制下的两原子间纠缠会保持得好.

图 2(b) 表示考虑在非马尔可夫机制 ( $\lambda = 0.1\gamma_0$ ), 但原子本征频率与热库腔模中心频率一定失谐 ( $\delta = 8\lambda$ ), 偶极 - 偶极相互作用  $D$  对两原子间量子纠缠的影响. 从图 2(b) 中可看到: 随着  $D$  的不断增大, 两原子间纠缠将会保持得比在图 2(a) 中更好. 例如, 当选择  $D = 4\gamma_0$ , 则在  $\gamma_0 t = 50$  时, 两原子间纠缠量  $C$  能达到大约 0.950. 其原因是: 在失谐情况下, 两原子间纠缠动力学是由失谐量  $\delta$  和偶极 - 偶极相互作用强度  $D$  共同决定的. 而原子本征频率与热库腔模中心频率有一定失谐时, 表示原子与热库腔模间相互作用就会减弱, 与共振情况相比, 两原子间的纠缠将会更少受热库的影响, 再考虑到偶极 - 偶极相互作用  $D$  也有利于两原子间纠缠. 因此根据这两个因素, 将不难理解在失谐情况下的两原子间纠缠就会比在共振情况下的两原子间纠缠保持得更好. 总之, 在非马尔可夫机制下, 原子间偶极 - 偶极相互作用可以显著地抑制两原子间退纠缠从而延长其退纠缠的时间.

3) 考虑在非马尔可夫机制下 ( $\lambda = 0.1\gamma_0$ ), 偶极 - 偶极相互作用  $D$  对两原子间量子关联  $QD$  的影响, 如图 3 所示. 图 3(a) 和 (b) 分别代表原子本征频率与热库腔模中心频率在共振 ( $\delta = 0$ ) 和有一

定失谐 ( $\delta = 8\lambda$ ) 情况下, 两原子间  $QD$  在不同的偶极 - 偶极相互作用强度  $D$  随无量纲参量  $\gamma_0 t$  的演化曲线. 这里已假设两原子最初处于最大纠缠态, 即  $\theta = \pi/4$ , 且令  $\lambda = 0.1\gamma_0$ . 注意到这里已设  $\theta = \pi/4$ , 所以对于方程 (16) 的密度矩阵中  $y = z$ , 这样将会有  $QD_{a1} = QD_{a2} = QD$ . 很明显, 从图 3(a) 和 (b) 看, 原子间偶极 - 偶极相互作用  $D$  对  $QD$  影响的总体趋势同对量子纠缠的影响一样, 即随着  $D$  的不断增大, 两原子间  $QD$  保持得越来越好. 但仔细比较图 3 和图 2, 我们发现: 在非马尔可夫机制 ( $\lambda = 0.1\gamma_0$ ) 下, 量子纠缠  $C$  比  $QD$  要恢复得更好一些. 也就是说对于一个两 qubit 系统中其量子纠缠如 Concurrence 并不一定会小于其他量子关联的定义如 quantum discord. 例如, 同样在  $D = 4\gamma_0$ ,  $\delta = 0$  的条件下, 当  $\gamma_0 t = 50$  时, 两原子间纠缠量  $C$  能保持到大约 0.929, 而  $QD$  只能保持到大约 0.842. 类似地, 在  $D = 4\gamma_0$ ,  $\delta = 8\lambda$  的条件下, 当  $\gamma_0 t = 50$  时, 两原子间纠缠量  $C$  能保持到大约 0.950, 而  $QD$  只能保持到大约 0.877.

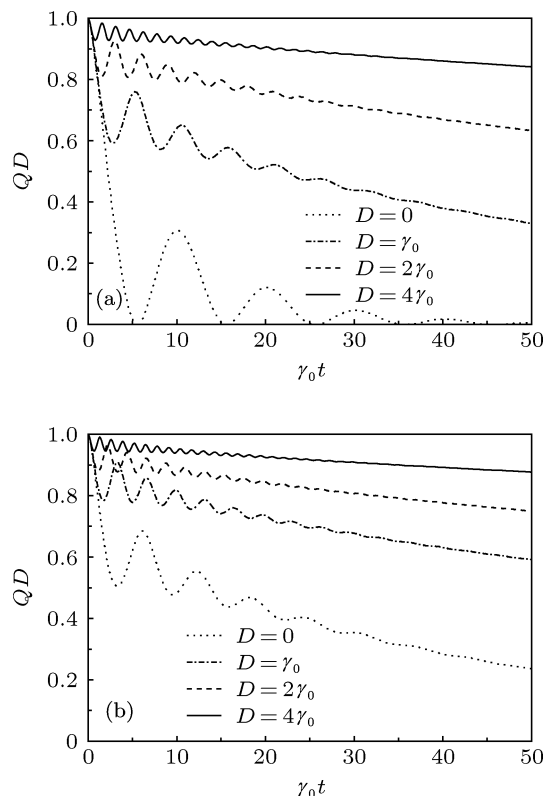


图 3 两原子间量子关联  $QD$  对不同的偶极 - 偶极相互作用强度  $D$  随无量纲参量  $\gamma_0 t$  的演化曲线 (a)  $\delta = 0$ ; (b)  $\delta = 8\lambda$  (已令  $\lambda = 0.1\gamma_0$ ,  $\theta = \pi/4$ )

4) 当两原子初态是分离态 ( $\theta = \pi/2$ ) 时, 两原子间各种量子关联 (包括  $C$  和  $QD$ ) 对不同的偶极 - 偶极相互作用强度  $D$  随无量纲参量  $\gamma_0 t$  的演化

曲线, 如图 4 所示 (其中图 4(a) 代表  $D = 0$ , 图 4(b) 代表  $D = \gamma_0$ ). 注意到, 我们已经选取了两原子初态是分离态 ( $\theta = \pi/2$ ), 所以对于方程 (16) 的密度矩阵中  $y \neq z$ , 这样将会有  $QD_{a1} \neq QD_{a2}$ . 图 4(a) 显示: 当不考虑偶极 - 偶极相互作用  $D$  时, 在短时间内看,  $QD_{a1}$  和  $QD_{a2}$  各自随  $\gamma_0 t$  有差别的呈振荡式上升; 但在长时间极限下, 它们最后都将达到一个共同的稳定值 0.412. 而  $C$  虽然也是呈振荡式的增加, 但其振荡的振幅都要比  $QD_{a1}$  和  $QD_{a2}$  大, 直到最后达到一个稳定值 0.5.

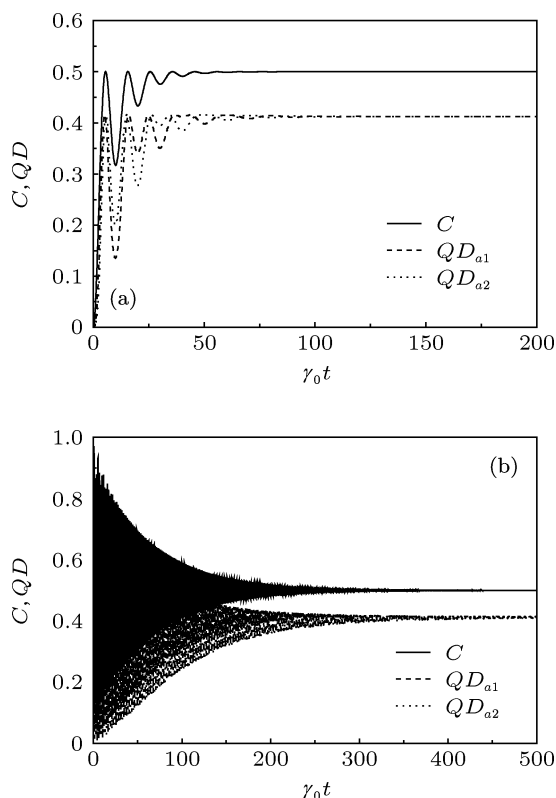


图 4 两原子间各种量子关联 (包括  $C$  和  $QD$ ) 随无量纲参量  $\gamma_0 t$  的演化曲线 (a)  $D = 0$ ; (b)  $D = \gamma_0$  (已令  $\lambda = 0.1\gamma_0$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\delta = 0$ )

从图 4(b) 中可以看出: 偶极 - 偶极相互作用  $D$  可以提高  $C$ ,  $QD_{a1}$  和  $QD_{a2}$  振荡的振幅, 但并不能改变它们各自最后达到的稳定值. 对于  $C$ ,  $QD_{a1}$  和  $QD_{a2}$  各自最后达到的稳定值解释如下: 在  $t = 0$  时, 两原子系统的初态是  $\rho_a(0) = \cos^2 \theta |10\rangle_{12} \langle 10| + \sin \theta \cos \theta (|10\rangle_{12} \langle 01| + |01\rangle_{12} \langle 10|) + \sin^2 \theta |01\rangle_{12} \langle 01|$ . 在长时间极限下, 两原子系统的密度算符有下列的形式

$$\rho_a(t \rightarrow \infty) = (1 + \sin 2\theta)/2 |00\rangle_{12} \langle 00| + \frac{(\cos \theta - \sin \theta)^2}{4(|10\rangle_{12} \langle 10| + |01\rangle_{12} \langle 01|)}$$

$$- \frac{(\cos \theta - \sin \theta)^2}{4(|10\rangle_{12} \langle 01| + |01\rangle_{12} \langle 10|)}. \quad (25)$$

可以明显看到在长时间极限下, 两原子系统对应的密度算符只和两原子初态有关而与其他参数无关. 因此两原子间的量子纠缠和 quantum discord 在长时间极限下所具有的量子关联值也就只与两原子初态有关而与其他参数无关, 即它们都有一个稳定值. 这里当选择  $\theta = \pi/2$  时, 根据方程 (18), (19) 和 (22), 最后可得到相应的各种量子关联稳定值  $C = 0.5$ ,  $QD_{a1} = QD_{a2} = 0.412$ .

## 4 结论

考虑两个二能级原子包括原子间的偶极 - 偶极相互作用在内与一个共同热库相互作用模型. 我们分别从马尔可夫机制和非马尔可夫机制研究了原子间的偶极 - 偶极相互作用对两原子间量子纠缠和 quantum discord 动力学的影响. 通过分析和讨论, 发现: 1) 当两原子初态处于纠缠态时, 对于其量子纠缠, 在非马尔可夫机制下, 且原子的本征频率与腔模中心频率是共振时, 当两原子初态处于纠缠态时, 原子间偶极 - 偶极相互作用可以显著抑制包括量子纠缠和 quantum discord 等量子关联的衰减, 更特别的是, 如果原子的本征频率同腔模中心频率有一定的失谐量时, 利用原子间偶极 - 偶极相互作用可大大地延长两原子退纠缠的时间; 对于 quantum discord, 原子间偶极 - 偶极相互作用也有类似的影响, 只是它对量子纠缠的增加更敏感, 换句话说, 该模型中两原子间量子纠缠并不一定会小于其他量子关联的定义如 quantum discord; 对于原子间偶极 - 偶极相互作用在非马尔可夫机制, 且原子的本征频率与腔模中心频率是共振还是失谐下能显著地抑制量子关联包括量子纠缠和 quantum discord 的衰减, 我们给出了相应的理论解释; 2) 当两原子初态处于分离态时, 从短时间来看, 原子间偶极 - 偶极相互作用可以提高量子纠缠和 quantum discord 振荡的振幅; 但从长时间极限来看, 原子间偶极 - 偶极相互作用不会改变量子纠缠和 quantum discord 达到的稳定值, 其稳定值也被得到. 总之, 原子间的偶极 - 偶极相互作用在抑制两个二能级原子与一个共同热库相互作用模型中两原子间量子关联的衰减有显著的作用, 这将为在量子信息处理中实现量子纠缠、quantum discord 控制的研究提供一定的指导.

- [1] Buluta I, Ashhab S, Nori F 2011 *Rep. Prog. Phys.* **74** 104401
- [2] Yu T, Eberly J H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140404
- [3] Ficek Z, Tanaš R 2006 *Phys. Rev. A* **74** 024304
- [4] Bellomo B, Lo Franco R, Compagno G 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 160502
- [5] Maniscalco S, Francica F, Zaffino R L, Gullo N L, Plastina F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 090503
- [6] López C E, Romero G, Lastra F, Solano E, Retamal J C 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 080503
- [7] Zhang Y J, Man Z X, Xia Y J 2009 *Eur. Phys. J. D* **55** 173
- [8] Wang X Y, Ding B F, Zhao H P 2012 *Chin. Phys. B* **22** 040308
- [9] Cai C J, Fang M F, Xiao X, Huang J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210303 (in Chinese) [蔡诚俊, 方卯发, 肖兴, 黄江 2012 物理学报 **61** 210303]
- [10] Chen L, Shao X Q, Zhang S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 188
- [11] Shan C J, Liu J B, Chen T, Liu T K, Huang Y X, Li H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6799 (in Chinese) [单传家, 刘继兵, 陈涛, 刘堂昆, 黄燕霞, 李宏 2010 物理学报 **59** 6799]
- [12] Hu Y H, Tan Y G, Liu Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 074202 (in Chinese) [胡要花, 谭勇刚, 刘强 2013 物理学报 **62** 074202]
- [13] Han W, Zhang Y J, Xia Y J 2011 *Int. J. Quant. Inf.* **9** 1413
- [14] Han W, Cui W K, Zhang Y J, Xia Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230302 (in Chinese) [韩伟, 崔文凯, 张英杰, 夏云杰 2012 物理学报 **61** 230302]
- [15] Han W, Zhang Y J, Xia Y J 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010306
- [16] Ollivier H, Zurek W H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 017901
- [17] Henderson L, Vedral V 2001 *J. Phys. A* **34** 6899
- [18] Datta A, Shaji A, Caves C M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 050502
- [19] Lanyon B P, Barbieri M, Almeida M P, White A G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 200501
- [20] Luo S 2008 *Phys. Rev. A* **77** 042303
- [21] Werlang T, Souza S, Fanchini F F, Villas Boas C J 2009 *Phys. Rev. A* **80** 024103
- [22] Mazzola L, Piilo J, Maniscalco S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 200401
- [23] Breuer H P, Petruccione F 2002 *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford: Oxford University Press) p472
- [24] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [25] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
- [26] Yu T, Eberly J H 2007 *Quantum Inf. Comput.* **7** 459
- [27] Ding B F, Wang X Y, Zhao H P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 100302
- [28] Ali M, Rau A R P, Alber G 2010 *Phys. Rev. A* **81** 042105
- [29] Mazzola L, Maniscalco S, Piilo J, Suominen K A, Garraway B M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 042302

# Quantum correlation dynamics of two two-level atoms in common environment\*

He Zhi<sup>1)†</sup> Li Long-Wu<sup>2)</sup>

1) (College of Physics and Electronics, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

2) (School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(Received 14 April 2013; revised manuscript received 17 June 2013)

## Abstract

By exactly solving the model of two two-level atoms with dipole-dipole interaction, interacting with a common environment, quantum entanglement and quantum discord of two atoms are obtained. In this paper, the influences of the non-Markovian effect of environment, the dipole-dipole interaction of two atoms and the detunings of the central frequency of the cavity and the transition frequency of the atoms on quantum entanglement and quantum discord dynamics of two atoms are comprehensively considered. The study shows that in the non-Markovian regime and the resonant case, if two atoms are initially in the entangled state, the damping of quantum entanglement and quantum discord will be remarkably suppressed. More specially, in the off-resonant case, the disentanglement time of the two atoms can be considerably prolonged. On the other hand, if two atoms are initially in the separable state, the dipole-dipole interaction can enhance the amplitude of oscillations of quantum entanglement and quantum discord in a short time, but the steady values of quantum entanglement and quantum discord cannot be changed by the dipole-dipole interaction in the long-time limit. Finally, the different influences of the dipole-dipole interaction on quantum entanglement and quantum discord also are discussed.

**Keywords:** quantum entanglement, quantum discord, common environment, dipole-dipole interaction

**PACS:** 03.65.Ud, 03.67.Hk

**DOI:** 10.7498/aps.62.180301

\* Project supported by the Special Funds of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11247294), the Research Foundation of Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 12C0826), and the Doctor Foundation Startup from Hunan University of Arts and Science, China (Grant No. 13101039).

† Corresponding author. E-mail: hz9209@126.com