

## 基于 Duffing 振子的微弱周期信号混沌检测性能研究\*

范剑<sup>1)3)</sup> 赵文礼<sup>2)†</sup> 王万强<sup>2)</sup>

1) (河北工业大学机械学院, 天津 300401)

2) (杭州电子科技大学机械工程学院, 杭州 310018)

3) (台州学院机械工程学院, 台州 318000)

(2013年3月24日收到; 2013年6月4日收到修改稿)

不同的混沌振子具有不同的混沌检测性能. 本文围绕 Duffing 振子的混沌检测方法, 从混沌系统临界点相图的突变性、混沌区间保持性以及混沌临界点的容噪性等三个方面的检测性能做了进一步研究, 并分别分析了影响这些性能的因素, 最后围绕这三个方面对两个不同混沌振子的混沌检测性能做了分析和比较.

**关键词:** 混沌检测, 微弱信号检测, Duffing 方程, 检测性能

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.180502

## 1 引言

基于混沌系统对初值或参数的敏感特性可以从强噪声背景中提取有用的微弱信号. 近年来, 对基于 Duffing 振子的混沌检测系统微弱信号检测研究尤为突出. 冯奇<sup>[1]</sup>分析了噪声对 Duffing 振子的影响; 王冠宇等<sup>[2]</sup>研究了 Duffing 振子在强噪声背景中进行信号检测的基本原理及其可行性; 文献 [3—5] 基于 Duffing 振子分别使用不同类型的激励进行了仿真研究; 聂春燕<sup>[6]</sup>基于 Duffing 振子对未知频率信号的检测方法做了仿真研究; 李香莲<sup>[7]</sup>对淹没在噪声中的汽车微弱振动信号做了混沌振子识别的研究; 文献 [8—10] 设计了 Duffing 振子系统的电路, 并仿真研究了 Duffing 电路对于不同频率响应的适应性; 本文作者所在的研究团队对强噪声背景下低频信号的混沌检测做了有益的探索, 进一步设计制作了基于 Duffing 振子的微弱信号检测电路, 实现了在强噪声背景下对某些微弱正弦信号的实验检测<sup>[11]</sup>. 上述研究成果分别从理论分析论证、软件仿真验证和电路实验验证等方面基于 Duffing 振子对微弱周期信号的混沌检测进行了研究, 为基于该理论实现对工程中常见信号在强噪声

背景下的检测应用提供了依据.

同时我们也注意到, 上述文献中的 Duffing 振子系统是使用同一组参数构建的. 然而不同的混沌振子具有不同的混沌检测性能. 为了能更有效地实现基于 Duffing 振子的微弱周期信号检测, 本文重点从混沌系统临界点相图的突变性、混沌区间保持性以及临界相变的容噪性能等方面做进一步研究, 目前这些方面的研究鲜有文献述及. 研究混沌系统的这些检测性能, 可以针对检测要求, 更好地选择不同的混沌振子, 对基于 Duffing 振子的微弱信号混沌检测的工程应用具有重要的实际意义.

## 2 Duffing 振子混沌检测性能分析

目前, 利用 Duffing 振子检测微弱信号的过程可以描述为混沌系统准备和混沌检测两个阶段. 前者是选择一个对测量信号敏感的混沌系统, 并调节参数使之处于混沌临界状态, 后者是根据系统从混沌到大周期状态的相变响应来判别信号的存在并做测量<sup>[11]</sup>. Duffing 振子原型如下:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + ax + bx^3 = \gamma \cos(\omega t), \quad (1)$$

式中:  $\delta$  为阻尼系数,  $a, b$  为非线性项系数,  $\gamma, \omega$  分

\* 国家自然科学基金 (批准号: 50875070)、浙江省教育厅科研项目和台州市科技计划资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhaowlc@163.com

别为外激励的幅值和激励频率. 上述文献中都使用了这样的一组参数来构建混沌检测系统:  $\delta = 0.5$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $\omega = 1$  (以下简称参数 (I)). 根据参数 (I) 通过仿真可以得到方程 (1) 的激励  $-x$  值庞加莱图, 如图 1 所示. 图中横坐标表示外激励幅值  $\gamma$  的变化 (本文  $\gamma$  取 0—15 的变化范围, 取值间隔 0.001), 纵坐标表示各庞加莱截面上的  $x$  值. 从图 1 可以看出, 随着激励幅值的逐渐增大, 该系统相图首先表现为单周期, 然后经短暂的倍周期分岔过渡到混沌区; 接着在  $\gamma$  等于 0.827 时, 相图立即由混沌转变为单周期; 激励幅值从 6.062 开始, 相图随激励幅值增加又发生倍周期分岔并逐渐进入到第二个混沌区; 当  $\gamma$  增大到 8.961, 相图又突然转为三周期, 并将这种三周期状态一直保持到激励幅值为 9.972, 随后在三周期的基础上随着激励继续增加, 发生倍周期分岔后进入第三个混沌区, 最后随着激励幅值的增大, 在这个混沌区末尾出现倒分岔现象, 当激励等于 12.683 时系统相图又恢复为单周期, 并一直保持到仿真设置的激励上限值.

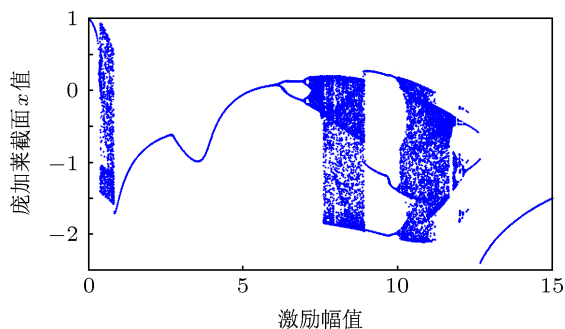


图 1 激励  $-x$  值庞加莱图 (参数 I)

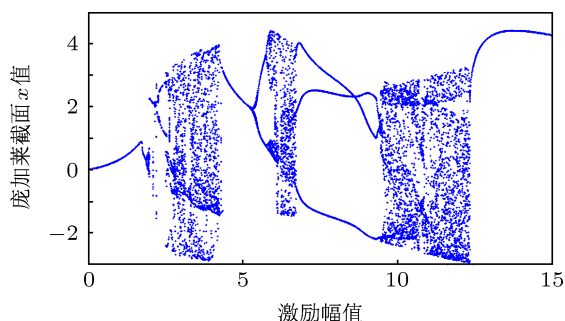


图 2 激励  $-x$  值庞加莱图 (参数 II)

我们也可以适当改变 (1) 式中 Duffing 方程的参数获得其他形式的混沌振子, 比如设置参数 (II):  $\delta = 0.5$ ,  $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $\omega = 1$ , 该混沌振子的激励  $-x$  庞加莱截面图如图 2 所示, 其变化过程与图 1 比较

类似, 但混沌临界点和发生倍周期分岔的位置各有不同, 由此也会导致不同混沌振子检测性能的差异. 下面从混沌系统临界点相图的突变性、混沌区间保持性以及混沌临界点的容噪性等三个方面的检测性能做进一步分析.

## 2.1 临界点相图突变性

根据混沌检测的特点, 结合上述相变过程, 以图 1 为例, 我们一般会选取  $\gamma = 0.826$  作为混沌检测系统的临界点, 是因为在幅值检测精度为 0.001 时, 该临界点附近的相图有敏锐的突变性——从混沌状态立即进入单周期状态 (也称做大周期态). 此处, 我们把相图在临界点的突变性作为混沌检测本质性能. 当然, 在图 1 中也可以选取  $\gamma = 8.96$  作为混沌检测的临界点, 因为在该点也有较好的相变特性 (从混沌状态立即进入三周期状态). 同样, 如果选择图 2 所示的混沌振子, 也可以根据检测精度及相图突变性选择比较敏锐的混沌临界点.

值得一提的是, 临界点的相变特性是与幅值检测精度相对应的. 由于 Duffing 振子通向混沌的道路是发生倍周期分岔<sup>[12]</sup>, 从图 1 可以看出, 连接其中的任何一个混沌区都有两个方向的入口, 且这两个方向都是以倍周期分岔方式进入混沌区的, 只是进入混沌的过程可以是使激励幅值做正向渐增, 也可以是使激励幅值做反向递减. 不过有的混沌系统在某些点的附近分岔过程发生较快, 而在有些点的附近分岔过程相对较缓. 幅值检测精度要适合于倍周期分岔的过程. 比如在检测精度为 0.001 时的精度边界点上,  $\gamma = 0.826$  (混沌态) 和  $\gamma = 0.827$  (大周期态) 表现出敏锐的相图突变, 这是因为倒分岔过程已经在最小检测精度内就完成了; 如果提高检测精度到 0.00001, 在  $\gamma = 0.826$  附近绘制小区间激励  $-x$  庞加莱截面图如图 3 所示, 发现混沌系统在该区间内 ( $\gamma = 0.826—0.827$ ) 发生了倒分岔现象. 可见, 在该检测精度下, 与原来精度对应的混沌临界点相图突变性能变差甚至消失了. 所以我们不能期望和幻想使用同一个混沌振子在任何检测精度上都可以获得敏锐的临界点相图突变性. 上述分析也提醒我们, 在做混沌检测时, 要根据系统的幅值检测精度去选择合适的混沌振子.

需要指出的是, 通常的混沌临界点是选择在随激励幅值渐增方向的相变位置, 我们认为在幅值检测精度允许的前提下, 同样也可以选择在随激励幅值渐减方向的相变点, 只要它的临界点突变性呈现

敏锐的特点即可.

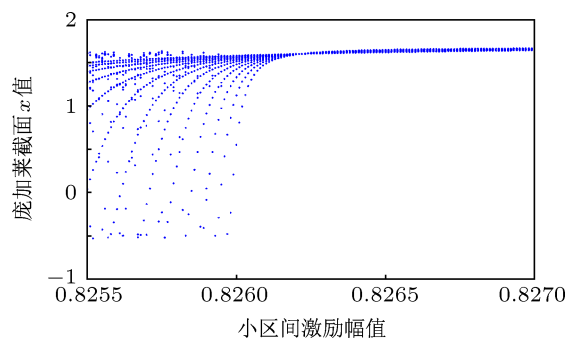


图3 放大区间的激励  $-x$  值庞加莱图 (参数 D)

## 2.2 临界混沌区间保持厚度

在检测信号的过程中, 若发生了相图的突变 (比如从混沌到大周期的转变), 说明待测信号中含有与激励信号一致的频率, 下一步的工作便是检测该信号的大小. 采取的做法一般是通过反方向调整激励幅值, 使相图又回复到混沌临界状态. 但事实上, 在反方向调整的过程中, 很可能越过混沌临界点, 从而需要来回反复的调整. 这时有一个潜在的情况需要引起重视, 即混沌临界点的邻接混沌区间应该保持足够的“厚”, 以至于在调整过程中不会被轻易地越过. 我们称其为临界混沌区间的保持性. 如果混沌保持区间太薄, 以至于反向调整时被迅速穿过该区域, 则必然导致检测结果的错误甚至无法完成检测.

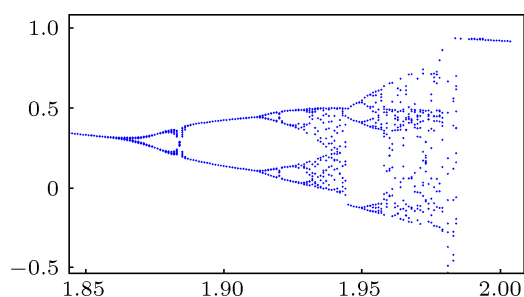


图4 混沌临界点 1.98 附近区域放大图

这就提示我们, 在选择混沌振子及其混沌临界点时要结合临界混沌区间保持厚度做适当选取. 当然, 该厚度并非越大越好, 只是作为估算临界点附近混沌区域的调整裕度, 用以选择混沌临界点以及指导测量过程中的粗调和微调动作. 值得注意的是,

该厚度的估算是以临界点相图突变性为前提的, 否则它就失去了估算的实际意义. 比如取检测精度为 0.01, 通过估算, 在图 1 中混沌临界点 0.82 的邻接混沌区间厚度约为 0.4 (0.42—0.82); 图 2 中的 1.98 处也有一个混沌临界点, 将其附近区域放大可得到如图 4 所示, 可估算其临界混沌区间厚度约为 0.02 (1.96—1.98). 可见, 相对于检测精度而言, 若将后者选为混沌临界点显然是“单薄”一些了.

## 2.3 临界相变的混沌阈值容噪性能

对比常规的信号检测方法, 混沌检测方法的一个较为突出的优点就是能获得较高的信噪比 (SNR). 文献 [1] 和 [13] 从理论上比较深入地分析了噪声对混沌系统的影响, 认为噪声在有限时间内使系统产生复杂运动, 但最终趋于规则; 而且在统计意义下, 零均值的噪声不会改变系统原有的运动趋势, 只是在原有轨迹附近做震荡. 图 5 是在偏离临界点的某大周期状态下加入某强度噪声前后的相图, 可见加噪后的相图仍保持周期态, 只不过因为受到噪声的扰动而使得周期轮廓变得有些粗糙.

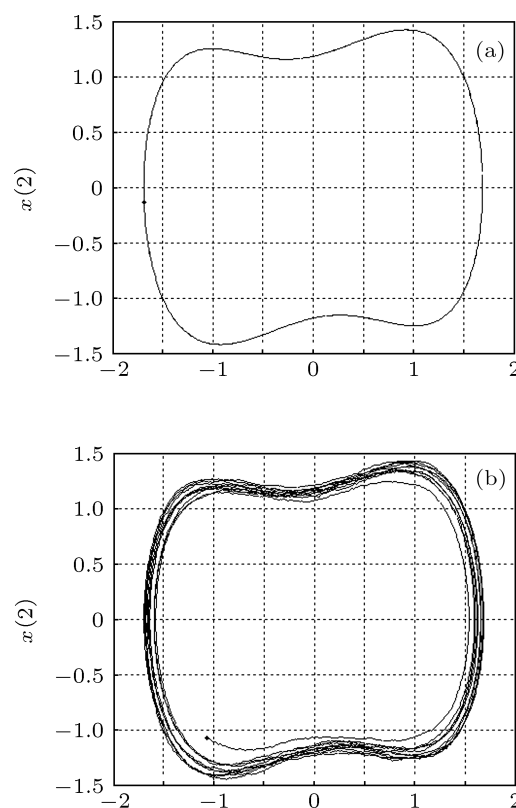


图5 在激励中加入噪声之前 (a) 和之后 (b) 对比相图

但是噪声强度会对混沌阈值产生影响. 往 (1) 式等号右侧的激励项中添加高斯白噪声  $\Gamma(t)$  (以下所述噪声均指白噪声), 方程如 (2) 式所示:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + ax + bx^3 = \gamma\cos(\omega t) + \Gamma(t). \quad (2)$$

取用前述的系统参数 (I), 并使加入的白噪声强度在 (0—1) 范围内以 0.05 的间隔逐渐递增, 然后通过数值方法测试 (2) 式在各强度噪声作用下混沌振子的混沌阈值, 得到混沌阈值与噪声强度变化关系如图 6 所示.

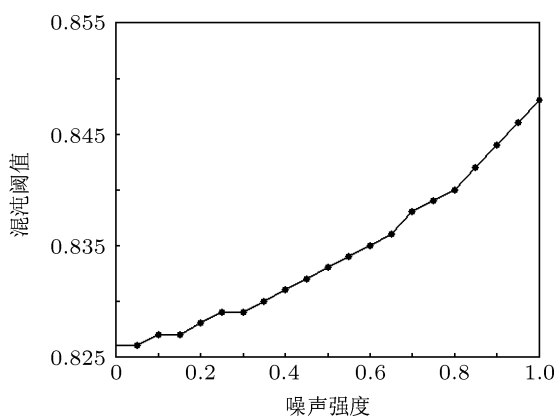


图 6 混沌阈值与噪声强度变化关系图 (参数 I 系统)

由图 6 可以看出, 当噪声强度较小时 (小于 0.05), 系统的混沌阈值基本不受影响; 但当噪声增加到一定强度后, 混沌阈值将随噪声强度的提高而增大, 在测试的整个范围内, 噪声强度增大到 1 时, 混沌阈值增大的幅度约为 0.022. 该实验结果表明: 噪声强度对 Duffing 振子的混沌阈值会造成一定的影响, 这样势必对强噪声背景下周期信号大小的测量带来误差. 文献 [14, 15] 也分析指出了噪声会对临界状态产生影响甚至会改变系统临界状态. 所以混沌检测信号的测量值要考虑噪声强度对阈值的影响, 也就是说测量信号的大小需要根据含噪混沌阈值与纯激励阈值的差值做修正. 如果信号的幅值小于含噪阈值与纯激励阈值之差, 那么这样的含噪信号是测量不出来的, 因为激励幅值加含噪信号的幅值仍小于含噪混沌的临界阈值, 加入含噪信号后混沌系统当然不会发生相变. 显然, 在某一噪声强度下, 若含噪混沌阈值偏离纯激励混沌系统阈值越小, 则该系统的混沌检测能力就越强. 我们从这个角度提出临界相变的混沌容噪性能, 也就是混沌检测系统的阈值容忍噪声的能力. 把含噪混沌阈值与纯激励混沌阈值之差定义为对应于该强度噪声的

混沌容噪量, 其表达式为

$$\text{混沌容噪量}(\delta) = \text{含噪混沌阈值}(\gamma_n) - \text{纯激励混沌阈值}(\gamma_d). \quad (3)$$

混沌容噪量与混沌系统和混沌临界点的选取有关系, 越小的混沌容噪量意味着可以获得更低的信噪比 (SNR). 不过, 混沌检测的信噪比是和对应的噪声强度联系在一起的. 因为不同噪声强度下的混沌阈值是不一样的 (如图 6 所示), 如果换一个噪声强度, 将有一个新的含噪混沌阈值与之对应, 所以我们认为脱离对应的噪声强度而单纯地讨论混沌检测信噪比是没有实际意义的.

### 3 两个不同混沌振子的混沌检测性能比较

下面分别对参数设置为  $\delta = 0.5, a = -1, b = 1, \omega = 1$  的 Duffing 振子取 0.826 作为临界点 (以下称为 A 振子) 和参数设置为  $\delta = 0.5, a = -1, b = 3, \omega = 1$  的 Duffing 振子取用 0.476 作为临界点 (以下称为 B 振子) 做上述检测性能的比较分析, 设检测精度为 0.001.

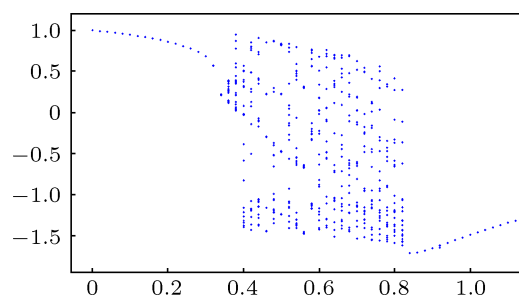


图 7 A 振子激励 -x 值庞加莱截面图

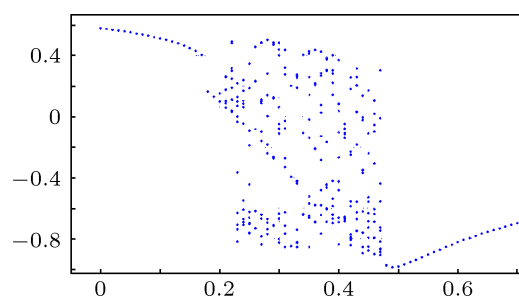


图 8 B 振子激励 -x 值庞加莱截面图

首先绘制 A 振子和 B 振子的激励 -x 值庞加莱截面图, 如图 7 和图 8 所示. 可以发现这两个混沌临界点在该精度下的相图突变性都较好, 且这两点

的临界混沌保持区间相对于检测精度而言都比较厚,符合混沌检测条件.它们之间较为明显的区别是从混沌到大周期发生的激励位置各不相同,A振子发生在0.826,B振子发生在0.476.

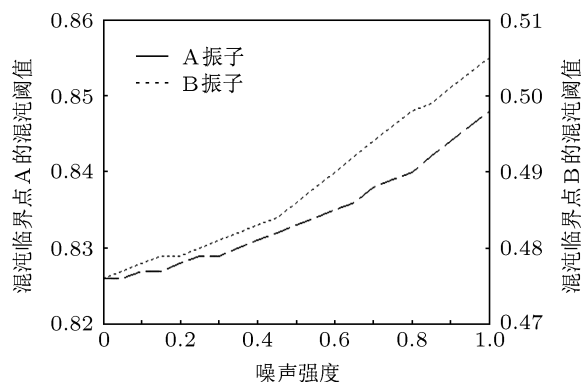


图9 混沌临界点与噪声强度变化关系图

为了考察这两个混沌振子在上述两临界点的容噪性能,分别给出含噪混沌阈值与噪声强度的变化关系,如图9所示.随着噪声强度的增加,上述两个混沌振子的含噪混沌阈值都增加.为了比较这两者的混沌容噪性能,继续计算并绘制得到混沌容噪量与噪声强度关系曲线图(如图10),可以发现A振子的曲线一直处于B振子曲线下方,这说明对于同一噪声强度,A振子的含噪阈值偏离程度小于B振

子,表明A振子的容噪性能优于B振子.由这个分析,可以通过适当改变方程(1)中参数的方法来获得混沌容噪性能更好的混沌振子.

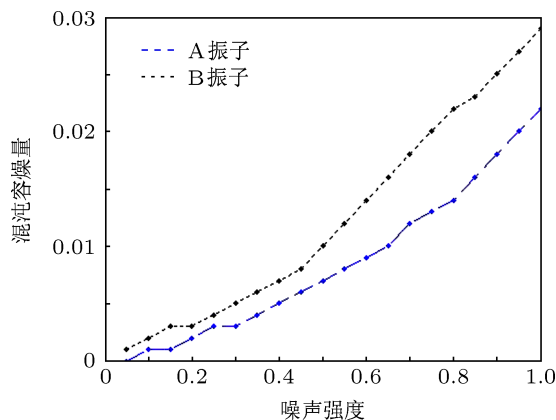


图10 混沌容噪量与噪声强度关系曲线图

## 4 结论

在基于Duffing振子的微弱周期信号混沌检测中,可以从混沌临界点相图突变性、临界混沌区间保持厚度以及临界相变的混沌阈值容噪性能等三个方面去比较不同的混沌振子并选择较好的混沌临界点.但是,混沌振子的参数及其表现出来的这三个方面性能之间的关系还有待于进一步的研究.

[1] Feng Q 1994 *J. Tongji Univ.* **22** 69 (in Chinese) [冯奇 1994 同济大学学报 **22** 69]  
 [2] Wang G Y, Tao G L, Chen X, Lin J Y 1997 *Chin. J. Sci. Instrum.* **18** 209 (in Chinese) [王冠宇,陶国良,陈行,林建亚 1997 仪器仪表学报 **18** 209]  
 [3] Li Y, Yang B J, Shi Y W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 526 (in Chinese) [李月,杨宝俊,石要武 2003 物理学报 **52** 526]  
 [4] Li Y, Shi Y W, Ma H T, Yang B J 2004 *Acta Electron. Sin.* **32** 87 (in Chinese) [李月,石要武,马海涛,杨宝俊 2004 电子学报 **32** 87]  
 [5] Gandino E, Marchesiello S 2010 *MPE* **2010** 695025  
 [6] Nie C Y 2009 *The Weak Signal Detection and Chaotic System* (Beijing: Tsinghua University Press) pp89–103 (in Chinese) [聂春燕 2009 混沌系统与弱信号检测(北京:清华大学出版社)第89—103页]  
 [7] Li X L 2005 *Chin. J. Appl. Mech.* **22** 628 (in Chinese) [李香莲 2005 应用力学学报 **22** 628]  
 [8] Wang Y S, Xiao Z C, Sun J, Fan H D 2008 *J. Circuits Syst.* **13** 132 (in Chinese) [王永生,肖子才,孙瑾,范洪达 2008 电路与系统学报 **13** 132]  
 [9] Zhang R B, Chu F H, Ran L, Guo J G 2011 *The 19th International Con-*

*ference on Computers in Education, ICCE 2011* Chiang Mai, Thailand, November 28–December 2, 2011 p417  
 [10] Hu W J, Liu Z Z, Li Z H 2011 *Electronics and Signal Processing* (Berlin: Springer-Verlag) p831  
 [11] Zhao W L, Huang Z Q, Zhao J X 2011 *J. Circuits Syst.* **16** 120 (in Chinese) [赵文礼,黄振强,赵景晓 2011 电路与系统学报 **16** 120]  
 [12] Lu T X, Zhang J Q 2010 *Introduction to Nonlinear Physics* (Hefei: University of Science and Technology of China Press) pp109–136 (in Chinese) [陆同兴,张季谦 2010 非线性物理概论(合肥:中国科学技术大学出版社)第109—136页]  
 [13] Li Y, Yang B J 2004 *The Detecting Theory of Chaotic Oscillators* (Shanghai: The Electronics Industry Publishing House) pp64–68 (in Chinese) [李月,杨宝俊 2004 混沌振子检测引论(上海:电子工业出版社)第64—68页]  
 [14] Wang Y S, Jiang W Z, Zhao J J, Fan H D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2053 (in Chinese) [王永生,姜王志,赵建军,范洪达 2008 物理学报 **57** 2053]  
 [15] Xie T, Wei X Y 2008 *Chin. J. Sci. Instrum.* **29** 1265 (in Chinese) [谢涛,魏学业 2008 仪器仪表学报 **29** 1265]

# Study on the weak sinusoidal signal detection property using Duffing chaos system\*

Fan Jian<sup>1)3)</sup> Zhao Wen-Li<sup>2)†</sup> Wang Wan-Qiang<sup>2)</sup>

1) (*School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China*)

2) (*College of Mechanical Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China*)

3) (*Department of Mechanical Engineering, Taizhou University, Taizhou 318000, China*)

( Received 24 March 2013; revised manuscript received 4 June 2013 )

## Abstract

Chaotic detection method can be used to pick out the weak sinusoidal signal submerged in noise. Three types of detection properties of this method are proposed in this paper, i.e., sharp change ability of phase diagram, maintenance zone of chaos, and the sufferance with noise of the chaos critical point. After analyzing the factors influencing these three properties, two different chaotic systems are compared according to the three properties.

**Keywords:** chaotic detection, weak signal detection, duffing equation, detection property

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.180502

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50875070), the Scientific Research Fund of Zhejiang Education Department and the Development Program of Taizhou, China.

† Corresponding author. E-mail: zhaowlcn@163.com