

## 一类五次方振子系统的叉形分叉及振动共振研究\*

杨建华<sup>†</sup> 刘后广 程刚

(中国矿业大学机电工程学院, 徐州 221116)

(2013年5月8日收到; 2013年6月6日收到修改稿)

研究了一类具有分数阶导数阻尼的五次方振子系统中的叉形分叉及振动共振现象. 基于快慢变量分离法, 消去系统中的高频激励成分, 得到关于慢变量的等效系统, 根据等效系统中稳态平衡点的变化情况研究了系统的叉形分叉现象. 结果表明: 高频信号幅值的递增变化会引起亚临界叉形分叉, 高频信号频率和分数阶导数阻尼阶数的递增变化都会引起超临界叉形分叉; 振动共振和叉形分叉是关联的, 当叉形分叉发生时, 振动共振曲线会出现两个峰值, 否则只会出现一个峰值. 通过解析结果和数值模拟结果的对比, 验证了解析分析的正确性.

**关键词:** 亚临界叉形分叉, 超临界叉形分叉, 分数阶导数阻尼, 振动共振

**PACS:** 05.45.-a, 47.20.Ky, 45.10.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.62.180503

## 1 引言

近年来, 振动共振 (vibrational resonance) 现象的研究引起了不同领域研究人员的关注. 振动共振现象由 Landa 和 McClintock<sup>[1]</sup> 首次提出, 他们受随机共振 (stochastic resonance) 现象的启发, 将随机共振系统中的噪声替换为高频的激励信号, 系统对低频信号响应的幅值随着外加高频信号幅值的变化呈现一种非线性关系, 高频信号可以在很大程度上起到增强低频信号响应的作用. 由于多频信号在不同领域有着广泛的应用价值, 振动共振在理论研究<sup>[2-5]</sup> 与实验研究<sup>[6-8]</sup> 等方面均取得了重要的进展. Yang 和 Liu<sup>[9-12]</sup> 采用数值方法研究了时滞系统的振动共振现象, 发现系统对低频信号的响应幅值与时滞反馈参数之间同时存在两种周期性变化的关系, 这两种周期恰好分别等于激励信号的周期. 之后, Jeevarathinam 等<sup>[13]</sup> 采用快慢变量分离法对这一结论给出了解析证明. 林敏和黄咏梅<sup>[14]</sup> 提出了基于振动共振的随机共振控制策略, 文献<sup>[15-18]</sup> 在有关神经网络系统中的振动共振研究中做了大量的工作.

有关振动共振的前期研究工作是在一些常规的系统模型中进行的, 然而许多复杂系统需要借助于分数阶模型进行描述. 分数阶微积分理论是解决当今诸多动力学难题的一个重要工具. 为此, Yang 和 Zhu<sup>[19,20]</sup> 研究了分数阶 Duffing 系统中的振动共振现象, 发现分数阶阻尼能够引起新的共振模式. 前述理论研究成果表明, 高频信号的变化将改变系统平衡点的个数, 这是一种分叉行为. 实质上, 平衡点的改变使系统发生的是叉形分叉. 目前, 在振动共振的相关文献中对叉形分叉行为尚无确切的描述, 且分数阶阻尼对此种分叉行为的影响也尚无研究. 鉴于此, 本文以一类具有双势阱势函数的五次方振子系统为研究对象, 研究高频信号和分数阶导数阻尼所引起的亚临界与超临界叉形分叉现象, 借助于解析方法给出叉形分叉的分叉点与分叉边界、系统响应的近似解及共振的位置与峰值, 并利用数值模拟对解析分析进行验证. 通过研究叉形分叉与振动共振行为之间的关系, 可以有效地控制低频信号在非线性系统响应中所起的作用.

## 2 叉形分叉

本文的研究模型为受双频信号激励的一类含

\* 中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2012QNA21) 和江苏省高校优势学科建设工程资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: jianhuayang@cumt.edu.cn

分数阶导数阻尼的五次方振子系统

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} + \omega_0^2 x + \beta x^3 + \gamma x^5 = f \cos(\omega t) + F \cos(\Omega t), \quad (1)$$

其中,  $\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}$  表示具有分数阶导数形式的阻尼项. 分数阶导数的定义较多, 常用的有 Riemann-Liouville 定义, Caputo 定义, 以及 Grünwald-Letnikov 定义, 这些定义在大部分情况下是等价的 [21]. 为方便数值计算, 本文采用 Grünwald-Letnikov 定义, 即

$$\left. \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \right|_{t=kh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(kh - jh), \quad (2)$$

其中二项式系数为

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!},$$

$j \geq 1$ . 考虑到实际的工程应用背景,  $\alpha$  的取值一般为  $0 < \alpha < 2$ . 方程 (1) 中的其他参数满足  $\omega_0^2 < 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ , 激励信号满足  $f \ll 1$ ,  $\omega \ll \Omega$ . 方程 (1) 的势函数为  $V(x) = \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4 + \frac{1}{6}\gamma x^6$ , 在本文参数的取值情况下, 势函数  $V(x)$  具有双势阱的形状, 如图 1 所示.

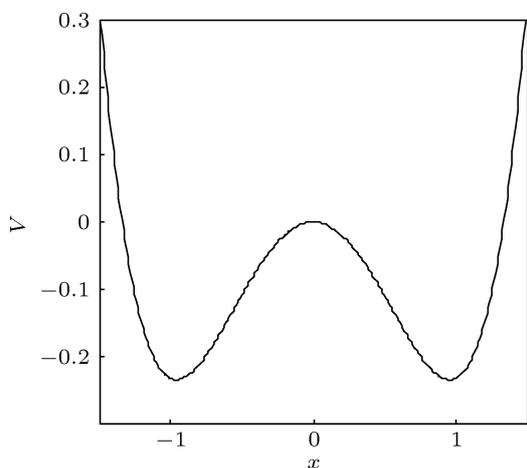


图 1 方程 (1) 的双稳态势函数,  $\omega_0^2 = -1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.1$

因为  $\Omega \gg \omega$ , 使用快慢变量分离法可以消去方程 (1) 中的快变量 [22]. 令  $x = X + \Psi$ , 其中  $X$  是周期为  $2\pi/\omega$  的慢变量,  $\Psi$  是周期为  $2\pi/\Omega$  的快变量. 据此, 方程 (1) 转化为

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \delta \frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} + \delta \frac{d^\alpha \Psi}{dt^\alpha} + \omega_0^2 X + \omega_0^2 \Psi + \beta(X^3 + 3X^2\Psi + 3X\Psi^2 + \Psi^3) + \gamma(X^5 + 5X^4\Psi$$

$$+ 10X^3\Psi^2 + 10X^2\Psi^3 + 5X\Psi^4 + \Psi^5) = f \cos(\omega t) + F \cos(\Omega t). \quad (3)$$

忽略所有的非线性项, 得到关于  $\Psi$  的线性方程为

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \delta \frac{d^\alpha \Psi}{dt^\alpha} + \omega_0^2 \Psi = F \cos(\Omega t). \quad (4)$$

解方程 (4) 得到

$$\Psi = \frac{F}{\mu} \cos(\Omega t + \theta), \quad (5)$$

其中

$$\mu^2 = \left( \omega_0^2 + \delta \Omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} - \Omega^2 \right)^2 + \left( \delta \Omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2, \quad (6)$$

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{\delta \Omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\omega_0^2 + \delta \Omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} - \Omega^2}.$$

将  $\Psi$  的解代入方程 (3), 并在  $[0, 2\pi/\Omega]$  内对所有的项进行积分, 得到

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \delta \frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} + C_1 X + C_2 X^3 + \gamma X^5 = f \cos(\omega t), \quad (7)$$

其中,  $C_1 = \omega_0^2 + \frac{3\beta F^2}{2\mu^2} + \frac{15\gamma F^4}{8\mu^4}$ ,  $C_2 = \beta + \frac{5\gamma F^2}{\mu^2}$ . 方程 (7) 的有效势函数为  $V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}C_1 x^2 + \frac{1}{4}C_2 x^4 + \frac{1}{6}\gamma x^6$ , 显然有效势函数受到高频信号及分数阶导数阻尼阶数的影响.

图 2 给出了几种不同情形下有效势函数的形状. 在图 2(a) 中, 随着  $F$  的增大, 有效势函数由双稳形状变为单稳形状; 在图 2(b) 中, 随着  $\Omega$  的增大, 有效势函数由单稳形状变为双稳形状; 在图 2(c) 中, 随着  $\alpha$  的增大, 有效势函数由单稳形状变为双稳形状.

方程 (7) 可能存在的平衡点为

$$X_0^* = 0, \quad X_{1,2}^* = \pm \left[ \frac{-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4\gamma C_1}}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

当  $C_1 < 0$  时, 方程 (7) 存在稳定的平衡点  $X_{1,2}^*$  和不稳定的平衡点  $X_0^*$ ; 当  $C_1 \geq 0$  时, 方程 (7) 只存在稳定的平衡点  $X_0^*$ . 若以  $\Omega$  或  $\alpha$  为控制参数, 难以得到使平衡点个数发生变化的临界值  $\Omega_c$  或  $\alpha_c$  的解析解, 但可以根据  $C_1 = 0$  得到其数值解. 若以  $F$  为自变量, 解  $C_1 = 0$  得到使平衡点个数发生变化的临

界值为

$$F_C = \left[ \frac{-12\beta\mu^2 + \sqrt{(12\beta\mu^2)^2 - 480\gamma\omega_0^2\mu^2}}{30\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

当  $0 \leq F < F_C$  时, 方程 (7) 存在稳定的平衡点  $X_{1,2}^*$  和不稳定的平衡点  $X_0^*$ . 当  $F \geq F_C$  时, 方程 (7) 只存在稳定的平衡点  $X_0^*$ .

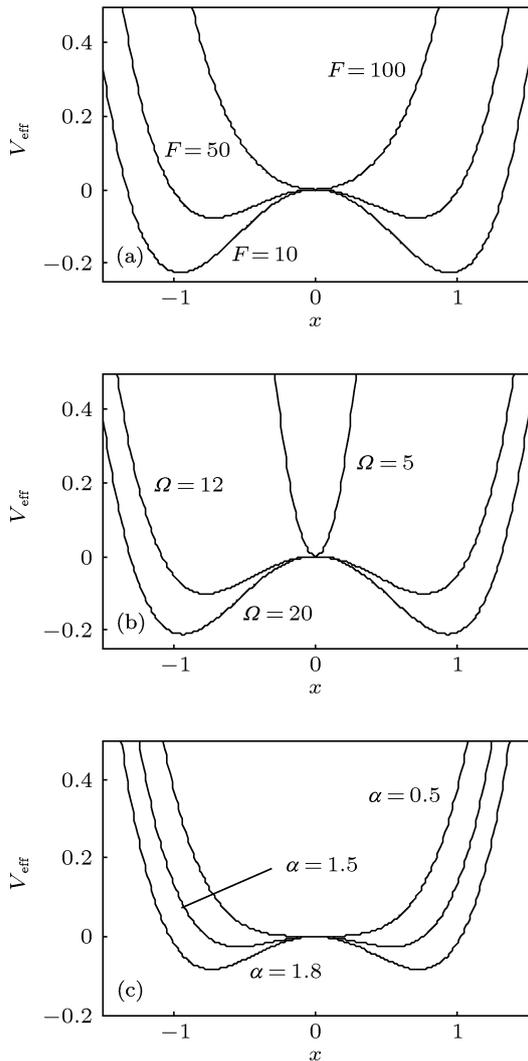


图2 方程 (7) 的有效势函数  $V_{\text{eff}}$  (a) 参数  $F$  不同引起有效势函数形状的变化,  $\alpha = 0.5, \Omega = 10$ ; (b) 参数  $\Omega$  不同引起有效势函数形状的变化,  $\alpha = 1.5, F = 80$ ; (c) 参数  $\alpha$  不同引起有效势函数形状的变化,  $F = 80, \Omega = 10$ ; 其他计算参数均为  $\omega_0^2 = -1, \delta = 1, \beta = 1, \gamma = 0.1$

图3给出了方程 (7) 的稳态平衡点与参数  $F$  及  $\alpha$  之间的关系. 图3(a)中的曲线给出了分岔点  $F_C$  与分数阶导数阻尼的阶数  $\alpha$  之间的函数关系, 该图表明当  $\alpha < 1$  时,  $F_C$  的值无明显变化; 当  $\alpha > 1$  时, 随着  $\alpha$  的增大,  $F_C$  的值也增大. 在曲线的上方区域,

方程 (7) 具有单稳态势函数, 在曲线的下方区域, 方程 (7) 具有双稳态势函数. 图3(b)—(d)给出了方程 (7) 的平衡点与参数  $F$  之间的函数关系, 随着  $F$  的增大, 稳定平衡点  $X_{1,2}^*$  将消失, 不稳定的平衡点  $X_0^*$  转化为稳定的平衡点. 这是一种分叉行为, 称为亚临界叉形分叉 (subcritical pitchfork bifurcation)<sup>[23]</sup>. 图3(e)—(f)给出了方程 (7) 的平衡点与参数  $\alpha$  之间的函数关系, 随着  $\alpha$  的增大, 稳定的平衡点  $X_0^*$  将转化为不稳定的平衡点, 并将出现稳定的平衡点  $X_{1,2}^*$ , 这种分叉行为称为超临界叉形分叉 (supercritical pitchfork bifurcation)<sup>[23]</sup>. 可见, 参数  $F$  和  $\alpha$  引起的是不同的叉形分叉行为.

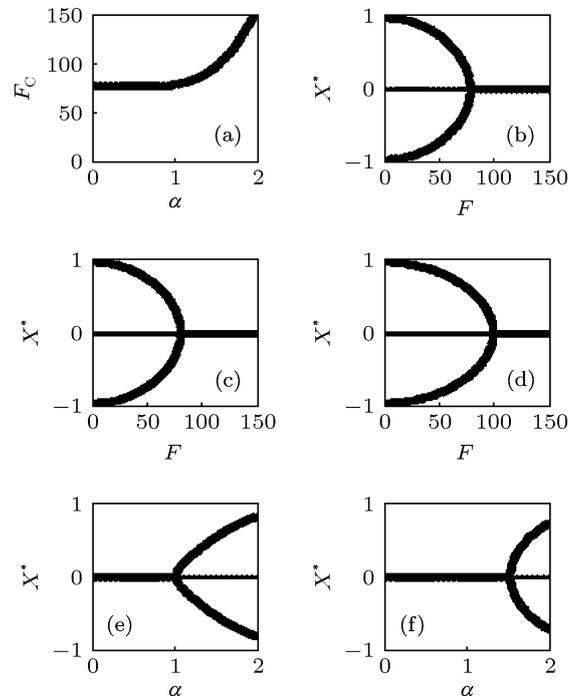


图3 (a) 分岔点  $F_C$  与  $\alpha$  之间的关系; (b)—(d) 参数  $F$  变化引起的亚临界叉形分叉; (e)—(f) 参数  $\alpha$  变化引起的超临界叉形分叉; 图中粗实线为稳定平衡点, 细实线为不稳定平衡点; 计算参数为  $\omega_0^2 = -1, \delta = 1, \beta = 1, \gamma = 0.1, \Omega = 10$ ; (b)  $\alpha = 0.5$ ; (c)  $\alpha = 1.0$ ; (d)  $\alpha = 1.5$ ; (e)  $F = 80$ ; (f)  $F = 100$ .

直接数值模拟方程 (1) 的相图可以验证图3中结论的正确性. 一般而言, 相图给出的是在位移-速度平面上系统响应的轨线. 在  $\alpha$  取值不同的情况下, 图4给出了参数  $F$  变化引起相图上稳态平衡点的变化情况. 该图表明, 对于相同的  $\alpha$  取值,  $F$  取值的不同可导致相图上稳态平衡点的不同. 经过计算可知, 在图4(a), (b), (d), (e), (g), (h) 中, 满足  $F < F_C$ , 系统在相图上存在两个稳定的平衡点  $X_{1,2}^*$ . 在图4(c), (f), (i) 中, 满足  $F > F_C$ , 系统在相图上只存在一个稳定的平衡点  $X_0^*$ . 参数  $F$  引起的亚临界叉形

分叉在图 4 中得到了验证. 图 5 给出了分数阶导数阻尼阶数  $\alpha$  的变化引起系统相图变化的情况. 在图 5(a), (b) 中, 参数取值满足  $C_1 > 0$ , 系统在相图上存在一个稳定的平衡点  $X_0^*$ . 在图 5(c), (d) 中, 参数的

取值满足  $C_1 < 0$ , 在相图上系统存在两个稳定的平衡点  $X_{1,2}^*$ . 分数阶导数阻尼阶数的取值变化所引起的超临界叉形分叉现象在图 5 中得到了验证.

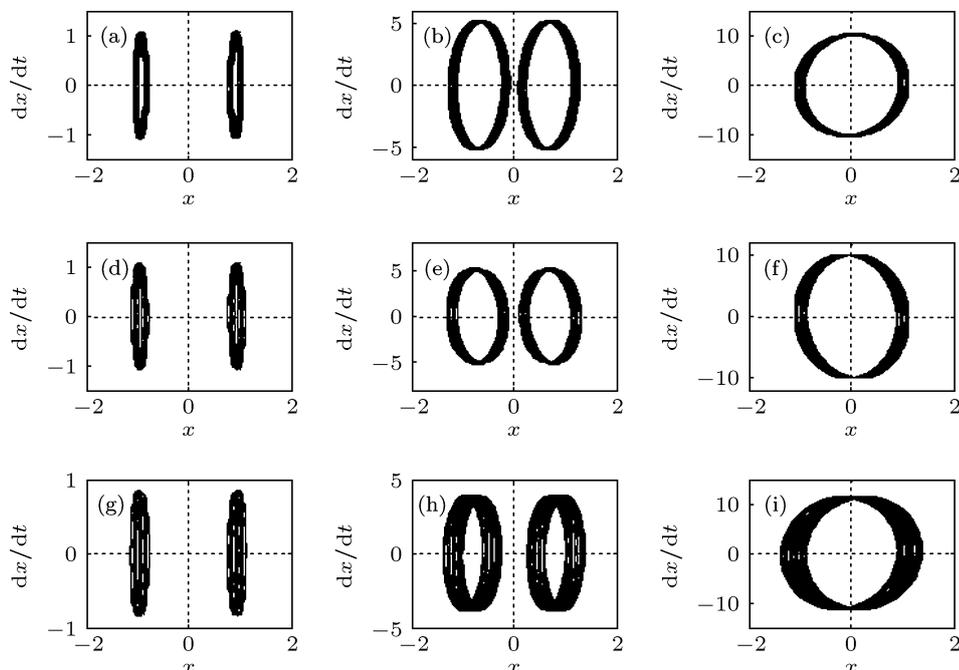


图 4 对应于不同  $\alpha$  值, 参数  $F$  变化引起相图上稳态平衡点的变化. 计算参数为  $\omega_0^2 = -1, \delta = 1, \beta = 1, \gamma = 0.1, f = 0.1, \omega = 0.8, \Omega = 10$ ; (a)  $\alpha = 0.5, F = 10$ ; (b)  $\alpha = 0.5, F = 50$ ; (c)  $\alpha = 0.5, F = 100$ ; (d)  $\alpha = 1.0, F = 10$ ; (e)  $\alpha = 1.0, F = 50$ ; (f)  $\alpha = 1.0, F = 100$ ; (g)  $\alpha = 1.6, F = 10$ ; (h)  $\alpha = 1.6, F = 50$ ; (i)  $\alpha = 1.6, F = 150$

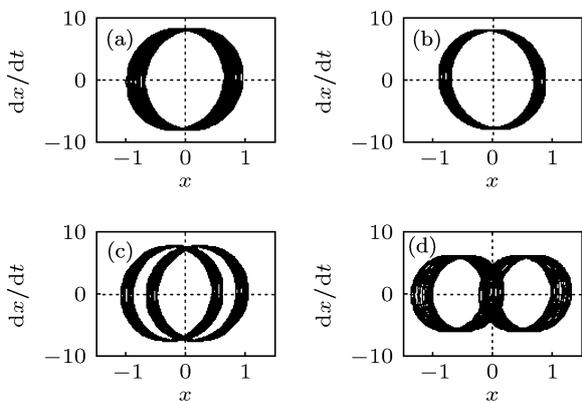


图 5 参数  $\alpha$  变化引起相图上稳态平衡点的变化. 计算参数为  $\omega_0^2 = -1, \delta = 1, \beta = 1, \gamma = 0.1, f = 0.1, \omega = 0.8, \Omega = 10, F = 80$ ; (a)  $\alpha = 0.5$ ; (b)  $\alpha = 1.0$ ; (c)  $\alpha = 1.2$ ; (d)  $\alpha = 1.6$

图 6 给出了方程 (7) 的稳态平衡点与参数  $\Omega$  及  $\alpha$  之间的关系. 图 6(a) 中的曲线给出了分岔点  $\Omega_C$  与分数阶导数阻尼的阶数  $\alpha$  之间的函数关系, 该图表明当  $\alpha < 1$  时,  $\Omega_C$  的值与  $\alpha$  之间无明显的变化关系; 当  $\alpha > 1$  时, 随着  $\alpha$  的增大,  $\Omega_C$  的值减小. 在曲线的上方区域, 方程 (7) 具有双稳态的势函数, 在曲线的下方区域, 方程 (7) 具有单稳态的势函数. 图 6(b)—(d) 给出了方程 (7) 的平衡点与参数  $\Omega$

之间的函数关系, 随着  $\Omega$  的增大, 稳定的平衡点  $X_0^*$  将转化为不稳定的平衡点, 并将出现稳定的平衡点  $X_{1,2}^*$ , 即高频信号的频率  $\Omega$  将使系统发生超临界叉形分叉. 图 7 通过直接数值模拟方程 (1) 的相图,

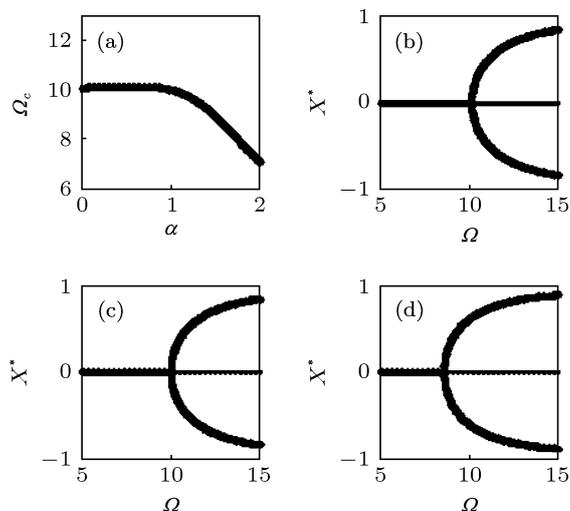


图 6 (a) 分岔点  $\Omega_C$  与  $\alpha$  之间的关系; (b)—(d) 参数  $\Omega$  变化引起超临界叉形分叉; 图中粗实线为稳定平衡点, 细实线为不稳定平衡点; 计算参数为  $\omega_0^2 = -1, \delta = 1, \beta = 1, \gamma = 0.1, F = 80$ ; (b)  $\alpha = 0.6$ ; (c)  $\alpha = 1.0$ ; (d)  $\alpha = 1.6$

验证了图 6 中结论的正确性. 当  $\alpha$  取值相同时, 随着  $\Omega$  的逐渐增大, 在系统响应的相图上, 稳态的平衡点将由  $X_0^*$  变为  $X_{1,2}^*$ , 也可以经过计算  $C_1$  的值得到这一结论, 在图 7(a), (d), (g) 中, 满足  $C_1 > 0$ , 系统

在相图上只存在一个稳定的平衡点  $X_0^*$ . 在图 7(b), (c), (e), (f), (h), (i) 中, 满足  $C_1 < 0$ , 系统在相图上存在两个稳定的平衡点  $X_{1,2}^*$ . 参数  $\Omega$  引起的超临界叉形分叉在图 7 中得到了验证.

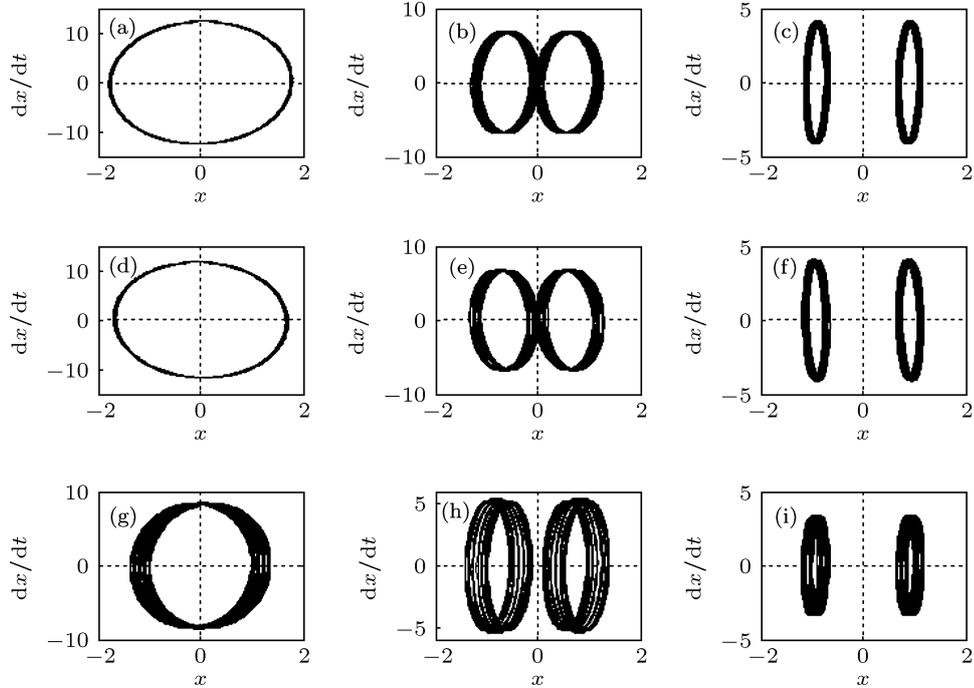


图 7 对应于不同  $\alpha$  值, 参数  $\Omega$  变化引起相图上稳态平衡点的变化. 计算参数为  $\omega_0^2 = -1, \delta = 1, \beta = 1, \gamma = 0.1, f = 0.1, \omega = 0.8, F = 80$ ; (a)  $\alpha = 0.6, \Omega = 7$ ; (b)  $\alpha = 0.6, \Omega = 12$ ; (c)  $\alpha = 0.6, \Omega = 20$ ; (d)  $\alpha = 1.0, \Omega = 7$ ; (e)  $\alpha = 1.0, \Omega = 12$ ; (f)  $\alpha = 1.0, \Omega = 20$ ; (g)  $\alpha = 1.6, \Omega = 7$ ; (h)  $\alpha = 1.6, \Omega = 12$ ; (i)  $\alpha = 1.6, \Omega = 20$

### 3 振动共振

为计算系统对低频信号的响应, 令  $Y = X - X^*$ , 代入方程 (7) 得

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \delta \frac{d^\alpha Y}{dt^\alpha} + C_3 Y + C_4 Y^2 + C_5 Y^3 + C_6 Y^4 + \gamma Y^5 = f \cos(\omega t), \quad (10)$$

其中  $C_3 = C_1 + 3C_2 X^{*2} + 5\gamma X^{*4}$ ,  $C_4 = 3C_2 X^* + 10\gamma X^{*3}$ ,  $C_5 = C_2 + 10\gamma X^{*2}$ ,  $C_6 = 5\gamma X^*$ . 在相应的线性方程中寻找  $Y$  的近似解

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \delta \frac{d^\alpha Y}{dt^\alpha} + C_3 Y = f \cos(\omega t). \quad (11)$$

设  $Y = A_L \cos(\omega t + \varphi)$ , 代入方程 (11) 解得

$$A_L = \frac{f}{\sqrt{\left(\delta \omega^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} + C_3 - \omega^2\right)^2 + \left(\delta \omega^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2}\right)^2}}, \quad (12)$$

$$\varphi = -\tan^{-1} \frac{\delta \omega^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2}}{\delta \omega^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} + C_3 - \omega^2}.$$

为了研究振动共振, 通常定义响应幅值为  $Q = A_L/f$ , 表示的是微弱低频信号通过非线性系统后被放大的倍数, 因此

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\left(\delta \omega^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} + C_3 - \omega^2\right)^2 + \left(\delta \omega^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2}\right)^2}}. \quad (13)$$

为了验证解析分析的正确性, 还需给出相应的数值解, 采用数值方法计算响应幅值的公式为  $Q = \sqrt{Q_{\sin}^2 + Q_{\cos}^2}/f$ , 其中  $Q_{\sin} = \frac{2}{rT} \int_0^{rT} x(t) \sin(\omega t) dt$ ,  $Q_{\cos} = \frac{2}{rT} \int_0^{rT} x(t) \cos(\omega t) dt$ ,  $T = 2\pi/\omega$  表示低频信号的周期,  $r$  是一个足够大的正实数, 本文的数值仿真采用  $r = 100$ . 在本文的理论分析中, 假设只存在周期为  $2\pi/\omega$  的慢变量和周期为  $2\pi/\Omega$  的快变量, 而忽略了其他高次谐波, 这是因为相比于基频成分而言其他高次谐波的幅值非常小. 在图 8 中,

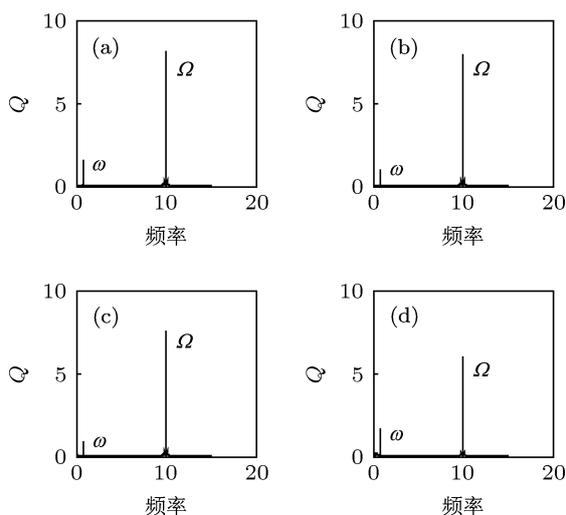


图8 对应于不同  $\alpha$  取值, 系统响应幅值  $Q$  在不同频率处的分布 计算参数为  $\omega_0^2 = -1, \delta = 1, \beta = 1, \gamma = 0.1, f = 0.1, \omega = 0.8, \Omega = 10, F = 80$ ; (a)  $\alpha = 0.5$ ; (b)  $\alpha = 1.0$ ; (c)  $\alpha = 1.2$ ; (d)  $\alpha = 1.6$

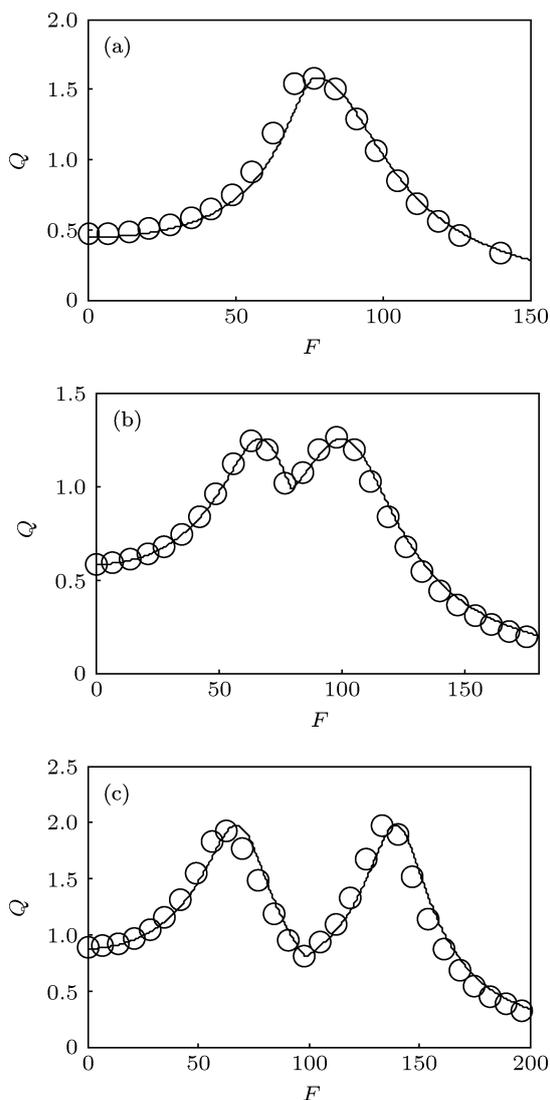


图9 对应于不同  $\alpha$  取值, 系统响应幅值与控制参数  $F$  之间的关系 计算参数为  $\omega_0^2 = -1, \delta = 1, \beta = 1, \gamma = 0.1, f = 0.1, \omega = 0.8, \Omega = 10$ ; (a)  $\alpha = 0.5$ ; (b)  $\alpha = 1.0$ ; (c)  $\alpha = 1.5$

对于不同的  $\alpha$  取值, 数值模拟发现系统响应幅值只集中在低频信号的频率  $\omega$  和 高频信号的频率  $\Omega$  处, 在其他频率处的响应幅值几乎为零, 这就验证了前述假设的正确性. 为了进一步验证本文理论分析的可行性, 在  $\alpha$  取值不同时, 图 9 给出了振动共振曲线的两种不同模式. 在图 9(a) 中, 自变量  $F$  的变化不会引起叉形分叉, 方程 (13) 中所隐含的  $X^*$  不会发生变化, 此时系统只会出现一个峰值, 与峰值对应的  $F$  值可以直接通过求解  $\frac{dQ}{dF} = 0$  得到. 在图 9(b) 和图 9(c) 中, 自变量  $F$  的变化会引起亚临界叉形分叉, 因此当  $F < F_C$  时, 需要代入  $X_0^*$  求解方程 (13). 当  $F \geq F_C$  时, 需要代入  $X_{1,2}^*$  求解方程 (13). 叉形分叉的发生导致图 9(b) 和 (c) 中的响应幅值曲线都会出现两个峰值, 且这两个峰值的大小完全相等, 通过求解方程 (13) 的极大值得到这两个峰值的大小为  $Q_{\max}^1 = Q_{\max}^2 = \frac{1}{\delta \omega^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2}}$ . 分叉点  $F = F_C$  是响应幅值曲线的一个转折点, 在该点处响应幅值取得极小值. 图 9 通过解析计算结果和数值计算结果的对比, 发现这两种计算结果之间的误差非常小, 可以忽略不计, 这就进一步证明了本文解析分析的正确性.

### 4 结论

本文以同时受低频信号和高频信号激励的含分数阶导数阻尼的五次方振子系统为研究模型, 重点讨论了该系统的叉形分叉行为及振动共振现象. 以前的研究文献中提到高频信号幅值的变化将会引起系统平衡点的变化. 在本文中, 将外加激励引起平衡点的变化归结为叉形分叉行为. 解析分析表明, 高频信号幅值的递增变化会引起亚临界叉形分叉, 高频信号频率的递增变化会引起超临界叉形分叉. 同时, 分数阶导数阻尼阶数的递增变化也会引起超临界叉形分叉. 通过数值模拟相图上系统平衡点的变化情况, 验证了有关亚临界叉形分叉和超临界叉形分叉预测的正确性. 叉形分叉的发生直接影响振动共振曲线的模式, 如果控制参数的变化会引起叉形分叉, 则共振曲线呈现双峰模式, 在分叉点处共振曲线取得极小值. 如果控制参数的变化不会引起叉形分叉, 则共振曲线呈现单峰模式. 通过对响应幅值的数值模拟, 进一步验证了解析分析的正确性.

虽然目前对振动共振的研究已经涉及到各种不同的系统, 但有以下问题尚未解决. 首先, 如何分析调频或调幅信号所引起的振动共振, 如果仍然运用快慢变量分离法进行分析将会发现此时得到的解析结果和数值结果误差非常大, 因此需要寻找新

的方法解决这一问题. 再者, 非简谐的周期信号所引起振动共振的解析分析尚未见报道. 而这两类信号在工程领域的应用非常广泛, 研究这两类信号激励下非线性系统的振动共振现象有重要的意义. 本文的后续工作将致力于这两类问题的解决.

- 
- [1] Landa P S, McClintock 2000 *J. Phys. A* **33** L433
  - [2] Gitterman M 2001 *J. Phys. A* **34** L355
  - [3] Blekhman I I, Landa P S 2004 *Int. J. Non-Linear Mech.* **39** 421
  - [4] Jeyakumari S, Chinnathambi V, Rajasekar S, Sanjuan M A F 2009 *Phys. Rev. E* **80** 046608
  - [5] Jeyakumari S, Chinnathambi V, Rajasekar S, Sanjuan M A F 2009 *Chaos* **19** 043128
  - [6] Baltanas J P, Lopez L, Blechman I I, Landa P S, Zaikin A, Kurths J, Sanjuan M A F 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066119
  - [7] Chizhevsky V N, Smeu E, Giacomelli G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 220602
  - [8] Chizhevsky V N, Giacomelli G 2006 *Phys. Rev. E* **73** 22103
  - [9] Yang J H, Liu X B 2010 *J. Phys. A* **43** 122001
  - [10] Yang J H, Liu X B 2010 *Chaos* **20** 033124
  - [11] Yang J H, Liu X B 2010 *Phys. Scr.* **82** 025006
  - [12] Yang J H, Liu X B 2011 *Phys. Scr.* **83** 065008
  - [13] Jeevarathinam C, Rajasekar S, Sanjuan M A F 2011 *Phys. Rev. E* **83** 066205
  - [14] Lin M, Huang Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6173 (in Chinese) [林敏, 黄咏梅 2007 物理学报 **56** 6173]
  - [15] Deng B, Wang J, Wei X, Tsang K M, Chan W L 2010 *Chaos* **20** 013113
  - [16] Qin Y M, Wang J, Men C, Deng B, Wei X L 2011 *Chaos* **21** 023133
  - [17] Yu H, Wang J, Sun J, Yu H 2012 *Chaos* **22** 033105
  - [18] Sun J, Deng B, Liu C, Yu H, Wang J, Wei X, Zhao J 2013 *Appl. Math. Model.* **37** 6311
  - [19] Yang J H, Zhu H 2012 *Chaos* **22** 013112
  - [20] Yang J H, Zhu H 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **18** 1316
  - [21] Monje C A, Chen Y, Vinagre B M, Xue D, Feliu V 2010 *Fractional-order Systems and Controls* (London: Springer)
  - [22] Blekhman I I 2000 *Vibrational Mechanics* (Singapore: World Scientific)
  - [23] Guckenheimer J, Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer-Verlag)

# The pitchfork bifurcation and vibrational resonance in a quintic oscillator\*

Yang Jian-Hua<sup>†</sup> Liu Hou-Guang Cheng Gang

(School of Mechanical and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

(Received 8 May 2013; revised manuscript received 6 June 2013)

## Abstract

The pitchfork bifurcation and vibrational resonance are investigated in this paper. Based on the method of separating slow motion from fast motion, the equivalent equation to the slow motion is obtained. Then, the pitchfork bifurcation is studied. The results show that the amplitude of the high-frequency signal can induce the subcritical pitchfork bifurcation, while both the frequency of the high-frequency signal and the value of the fractional-order can induce supercritical pitchfork bifurcation. The pattern of the vibrational resonance depends on the pitchfork bifurcation. The vibrational resonance presents double-resonance pattern when the pitchfork bifurcation occurs. Or else, the vibrational resonance presents single-resonance pattern. The analytical predications are in good agreement with the numerical calculation results, which verifies the validity of the theoretical results.

**Keywords:** subcritical pitchfork bifurcation, supercritical pitchfork bifurcation, fractional damping, vibrational resonance

**PACS:** 05.45.-a, 47.20.Ky, 45.10.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.62.180503

---

\* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 2012QNA21) and the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: jianhuayang@cumt.edu.cn