

部分线性的分数阶混沌系统修正函数投影同步*

杨叶红 肖剑[†] 马珍珍

(重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331)

(2013年5月2日收到; 2013年6月3日收到修改稿)

针对一类部分线性的分数阶混沌系统修正函数投影同步问题, 可通过单变量耦合构造出这类系统的响应系统, 从而提出修正函数投影同步的设计方法. 根据 Routh-Hurwitz 条件, 给出耦合部分线性系统实现修正函数投影同步的方法, 并设计了控制器. 该方法中控制器和误差动态方程的选择都是确定的, 理论分析和数值仿真都说明了该方法在部分线性的分数阶混沌系统中应用具有可行性和有效性.

关键词: 分数阶混沌系统, 部分线性, 修正函数投影同步

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.180505

1 引言

1989年, Pecora 和 Carroll^[1] 提出并实现了两个混沌系统的同步方案, 该研究领域所覆盖的应用范围包括安全通信、物理系统、生物网络和等离子技术等. 人们相应提出了大量的同步方案, 这些方案主要包括广义同步^[2,3]、滞后同步^[4]、相同步^[5]、完全同步^[6]、投影同步^[7]、全状态投影同步^[8]、修正投影同步^[9,10]、函数投影同步^[11]等. 最近, 有学者将修正投影同步的比例常数矩阵扩展为比例函数矩阵, 提出了新的混沌系统同步方法, 即修正函数投影同步^[12-16]. 修正函数投影同步作为一种新颖的同步现象, 它是指驱动系统和响应系统之间按照任意给定的比例函数矩阵关系进行同步. 目前, 关于修正函数投影同步的研究都是在整数阶混沌系统中, 本文将在分数阶混沌系统中实现修正函数投影同步.

1999年, Mainieri 和 Rehacek^[17] 对耦合部分线性系统研究时提出投影同步的概念, 即耦合的驱动-响应系统状态的输出不仅相位锁定, 而且各对应状态的振幅还按某一比例因子演化, 该混沌同步称为投影同步. 在 Xu 等^[18] 对整数阶混沌系统的研究中, 发现有的系统在结构上可以用变量 z 作

为驱动信号, 表示成部分线性系统和非部分线性系统. Hu 等^[19,20] 对两个耦合整数阶系统的投影同步进行了深入研究, 用自适应控制方法、脉冲控制方法等先后研究了一般投影同步、全状态投影同步、全状态混合投影同步的问题. 同时, 在 Hu 等的系列研究中, 还研究了通过变量 z 耦合的整数阶部分线性系统的投影同步、耦合强度随时间的演化和投影因子的控制. 但是, 目前对于部分线性的分数阶混沌系统, 关于其投影同步或修正函数投影同步的研究还未见报道.

本文针对部分线性的分数阶混沌系统, 研究该系统的修正函数投影同步. 通过单变量耦合部分线性的分数阶混沌系统, 利用 Routh-Hurwitz 条件, 提出一种实现修正函数投影同步的方法. 文中首先构造一个新的分数阶混沌系统, 以该系统为例进行数值仿真, 再对子系统进行数值仿真实现修正函数投影同步. 仿真结果进一步表明了该方法的有效性.

2 修正函数投影同步方案

2.1 部分线性的分数阶混沌系统

部分线性的分数阶混沌系统, 即系统状态变量可以分成两部分 (u, z) , 一维变量 z 的变化率方程是

* 中央高校基本科研业务费 (批准号: CQDXWL-2012-007) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: xj4448@126.com

系统所有变量的非线性函数, 而系统其他变量 u 的变化率方程是以 z 为变量的矩阵函数 $M(z)$ 和 u 的乘积. 部分线性的分数阶混沌系统可写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{d^q u(t)}{dt^q} = M(z) \cdot u, \\ \frac{d^q z}{dt^q} = f(u, z), \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

$$M(z) = \begin{pmatrix} m_{11}(z) & m_{12}(z) & \dots & m_{1n}(z) \\ m_{21}(z) & m_{22}(z) & \dots & m_{2n}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}(z) & m_{n2}(z) & \dots & m_{nn}(z) \end{pmatrix}.$$

两个部分线性的分数阶混沌系统 (1) 通过变量 z 耦合合成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{d^q u_r(t)}{dt^q} = M(z) \cdot u_r, \\ \frac{d^q z}{dt^q} = f(u_r, z), \\ \frac{d^q u_s(t)}{dt^q} = M(z) \cdot u_s, \end{cases} \quad (2)$$

其中, 下标 r 表示驱动系统, s 表示响应系统.

2.2 修正函数投影同步定义

修正函数投影同步定义: 在上述系统 (2) 中, 如果存在一个函数矩阵 $h(t) = \text{diag}\{h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)\}$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u_s - h(t) \cdot u_r\| = 0,$$

其中, $h_i(t)$ 是连续可微的有界函数, 误差变量 $e(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))^T$, $\|\cdot\|$ 是向量范数, u_s 表示驱动系统, u_r 表示响应系统, 则称系统 (2) 实现修正函数投影同步.

显然, 当 $h(t) = h_1(t) = h_2(t) = \dots = h_n(t)$ 为连续可微的有界函数时, 修正函数投影同步退化为函数投影同步; 当 $h = \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, $h_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为实常数时, 可实现修正投影同步; 当 $h = h_1 = h_2 = \dots = h_n$ 为实常数时, 实现投影同步.

引理^[21,22] 若 Jacobian 矩阵的特征根满足

$$\arg(\lambda) \geq \pi q/2, \quad q = \max(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (3)$$

即多项式方程

$$P(\lambda) = 0, \quad P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

的所有根满足 (3) 式, 则分数阶系统在平衡点是渐进稳定的.

其中, 当 $n = 2$ 时, 即 $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$ 时, 若此方程系数满足 Routh-Hurwitz 条件, 即

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{或满足 } a_1 < 0, \quad 4a_2 > (a_1)^2,$$

$$\left| \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{4a_2 - (a_1)^2}}{a_1} \right) \right| > \frac{q\pi}{2}, \quad \text{则系统渐进稳定.}$$

2.3 实现修正函数投影同步的方法

对于系统 (1), 可以线性分离为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{d^q u}{dt^q} = Au + B \cdot F(u, z) \\ \frac{d^q z}{dt^q} = f(u, z) \end{cases} \quad (4)$$

则可通过单变量耦合为驱动 - 响应系统:

$$\begin{cases} \frac{d^q u_r}{dt^q} = Au_r + B \cdot F(u_r, z) \\ \frac{d^q z}{dt^q} = f(u_r, z) \\ \frac{d^q u_s}{dt^q} = Au_s + B \cdot F(u_s, z) + \varphi \end{cases} \quad (5)$$

定理 1 假设 $G(u, z) = F(u, z) + K \cdot u$, 定义误差为 $e = u_s - h(t) \cdot u_r$, K 为常数矩阵, 选取控制器为

$$\begin{aligned} \varphi = & -B \cdot [G(u_s, z) - h(t) \cdot G(u_r, z)] \\ & + \frac{d^q(h(t))}{dt^q} \cdot u_r, \end{aligned} \quad (6)$$

则误差动态系统为

$$\frac{d^q e}{dt^q} = (A - BK)e. \quad (7)$$

选取 K 的取值满足引理中的条件, 可使得系统 (7) 渐进稳定, 即系统 (5) 获得了修正函数投影同步.

证明 由 $e = u_s - h(t) \cdot u_r$, 把 (6) 式代入 $\frac{d^q e}{dt^q} = \frac{d^q u_s}{dt^q} - h(t) \cdot \frac{d^q u_r}{dt^q} - \frac{d^q(h(t))}{dt^q} \cdot u_r$, 则误差系统可进行化简:

$$\begin{aligned} \frac{d^q e}{dt^q} &= \frac{d^q u_s}{dt^q} - h(t) \cdot \frac{d^q u_r}{dt^q} - \frac{d^q(h(t))}{dt^q} \cdot u_r \\ &= Au_s + B \cdot F(u_s, z) + \varphi - h(t)Au_r \\ &\quad - h(t) \cdot B \cdot F(u_r, z) - \frac{d^q(h(t))}{dt^q} \cdot u_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Ae + B \cdot F(u_s, z) - h(t) \cdot B \cdot F(u_r, z) \\
 &\quad - B(F(u_s, z) + Ku_s - h(t) \cdot F(u_r, z) \\
 &\quad - h(t) \cdot Ku_r) \\
 &= Ae - BK e = (A - BK)e,
 \end{aligned}$$

这里, K 是一个常数矩阵, 选取 K 的值, 只要 $A - BK$ 的特征根满足 $|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2$, 则驱动 - 响应系统渐进稳定, 从而系统 (5) 实现修正函数投影同步.

注 1 反馈增益参数 K 可以选取一般的矩阵, 也可以选取对角矩阵. 在实际应用中, K 可选取为对角矩阵.

注 2 该方法还可以实现其他同步. 如: 当 $h = \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, $h_i (i = 1, \dots, n)$ 为实常数时, 可实现修正投影同步; 当 $h = h_1 = h_2 = \dots = h_n$ 为实常数时, 实现投影同步.

3 数值仿真

3.1 构造新分数阶混沌系统

文献 [23] 中提出了三维自治混沌系统所对应的分数阶混沌系统:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}x_1}{dt^{q_1}} = a(x_1 - x_2) \\ \frac{d^{q_2}x_2}{dt^{q_2}} = x_1x_3 - cx_2 \\ \frac{d^{q_3}x_3}{dt^{q_3}} = x_1^2 - bx_3 \end{cases}, \quad (8)$$

其中 $a = 10, b = 3, c = 17$.

通过在系统 (8) 的第一个方程减去一个非线性二次项 dx_2x_3 , 构成一个具有三个非线性二次项的新的分数阶混沌系统:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}x_1}{dt^{q_1}} = a(x_1 - x_2) - dx_2x_3 \\ \frac{d^{q_2}x_2}{dt^{q_2}} = x_1x_3 - cx_2 \\ \frac{d^{q_3}x_3}{dt^{q_3}} = x_1^2 - bx_3 \end{cases}. \quad (9)$$

当参数 $a = 10, b = 3, c = 17, d = 8$ 和 q_1, q_2, q_3 取不同值时, 系统的运动呈现不同的特性. 改变分数阶算子 $q_i (i = 1, 2, 3)$, 由数值仿真可知, 当系统的阶次取值为 $(0, 0.58]$ 时, 系统不呈现周期性也没

出现混沌现象; 当阶次取值为 $(0.58, 0.85]$ 时, 系统出现周期性而没有出现混沌状态; 当阶次取值为 $(0.85, 1]$ 时, 系统呈现混沌状态. 图 1 中, 当 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.85$ 时, 分数阶系统 (9) 的三维混沌吸引子如图 1(a) 所示, 系统 (9) 未出现混沌现象, 而呈现周期性; 当 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ 时分数阶系统 (9) 混沌吸引子如图 1(b), 系统存在混沌现象, 从中观察到系统运行轨道呈现为大小不异的双涡旋结构; 图 1(c)—(e) 分别是分数阶系统在二维平面上的投影, 通过这三个二维平面上的相图, 可更清晰地看出, 系统 (9) 呈现的混沌行为是两个大小不异的双涡旋结构.

此外, Lyapunov 指数是刻画系统邻近轨道平均分离快慢的平均量, 若系统的最大 Lyapunov 指数大于零, 则通常认为系统是混沌系统. 根据 Benettin 等 [24] 提出的计算微分方程组最大 Lyapunov 指数的算法, 系统 (9) 的最大 Lyapunov 指数为 $L = 0.4573$, 表明此系统是混沌的.

3.2 新系统数值仿真

新分数阶混沌系统通过单变量 z 耦合的驱动响应系统为:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}x_1}{dt^{q_1}} = a(x_1 - x_2) - dx_2x_3 \\ \frac{d^{q_2}x_2}{dt^{q_2}} = x_1x_3 - cx_2 \\ \frac{d^{q_3}x_3}{dt^{q_3}} = x_1^2 - bx_3 \\ \frac{d^{q_1}x_4}{dt^{q_1}} = a(x_4 - x_5) - dx_3x_5 + \psi_1 \\ \frac{d^{q_2}x_5}{dt^{q_2}} = x_3x_4 - cx_5 + \psi_2 \end{cases}, \quad (10)$$

其中, $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & -c \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}, u_r = (x_1, x_2)^T \in R^2, u_s = (x_4, x_5)^T \in R^2, B = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}, F(u_r, z) = (x_2x_3, x_1x_3)^T \in R^2, F(u_s, z) = (x_5x_3, x_4x_3)^T \in R^2, h(t) = (h_1(t), h_2(t)) \in R^2, K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}, e = u_s - h(t) \cdot u_r = (e_1, e_2)^T \in R^2, q_1 = q_2 = q_3 = q.$

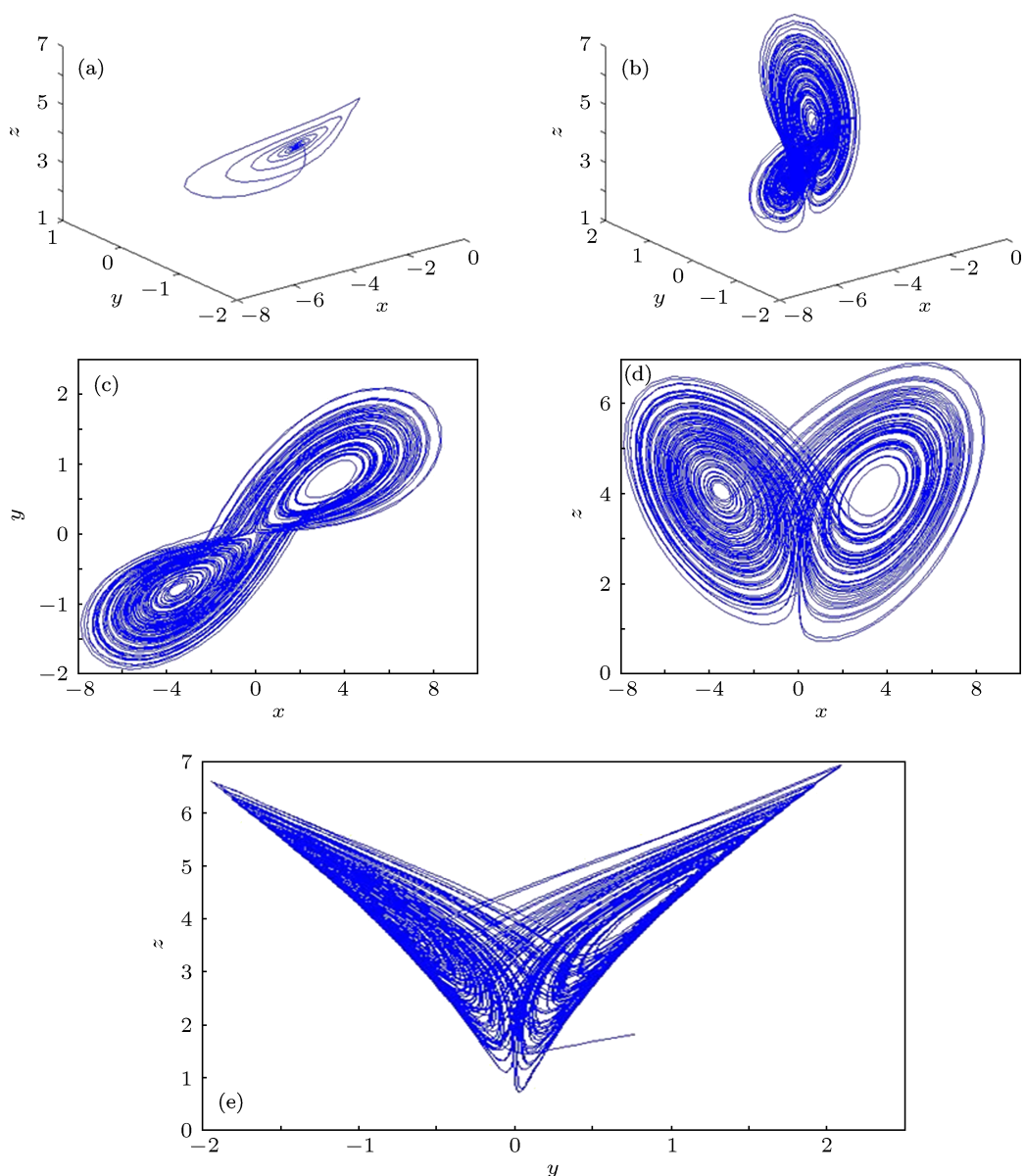


图1 (a) 当 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.85$, 系统 (9) 混沌吸引子; (b) 当 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$, 系统 (9) 混沌吸引子; (c) 当 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$, 系统 (9) 在 $x-y$ 平面上的投影; (d) 当 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$, 系统 (9) 在 $x-z$ 平面上的投影; (e) 当 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$, 系统 (9) 在 $y-z$ 平面的投影

根据 (6) 式, 则控制器为

$$\varphi = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e_1 + k_2 e_2 + x_3 e_2 \\ k_3 e_1 + k_4 e_2 + x_3 e_1 \end{pmatrix} + \frac{d^q(h(t))}{dt^q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

根据 (7) 式, 则误差方程为

$$\frac{d^q e}{dt^q} = (A - BK)e = \begin{pmatrix} a + dk_1 & -a + dk_2 \\ -k_3 & -c - k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

即误差动态系统为

$$\begin{cases} \frac{d^q e_1}{dt^q} = (a + dk_1)e_1 + (-a + dk_2)e_2 \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} = -k_3 e_1 - (c + k_4)e_2 \end{cases}. \quad (11)$$

令 $J = A - BK = \begin{pmatrix} a + dk_1 & -a + dk_2 \\ -k_3 & -c - k_4 \end{pmatrix}$, 则相应的特征多项式为

$$\lambda^2 + (k_4 - 8k_1 + 7)\lambda - (8k_1 + 10)(k_4 + 17) + k_3(8k_2 - 10) = 0,$$

其中, $a_1 = k_4 - 8k_1 + 7$, $a_2 = -(8k_1 + 10)(k_4 + 17) +$

$k_3(8k_2 - 10)$, k_i ($i = 1, \dots, 4$) 值的选取可以任意调整, 只要其取值满足引理中 $n = 2$ 时的条件, 即特

征多项式的系数满足 $a_1 > 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$, 或满足

$$a_1 < 0, 4a_2 > (a_1)^2, \left| \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{4a_2 - (a_1)^2}}{a_1} \right) \right| > \frac{q\pi}{2},$$

则系统稳定, 即实现了修正函数投影同步. 此时 k_i ($i = 1, \dots, 4$) 的取值不惟一, 如取 $k_1 = \frac{9}{8}, k_2 =$

$\frac{5}{2}, k_3 = 40, 2 < k_4 < 4.05$, 可使得 $|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2$,

故误差系统 (11) 渐进稳定, 从而获得了修正函数投影同步. 当反馈增益参数为 $k_1 = \frac{9}{8}, k_2 =$

$\frac{5}{2}, k_3 = 40, k_4 = 3$, 此时 $\lambda_1 = -0.50 + 4.44i, \lambda_2 = -0.50 - 4.44i$, 满足 $|\arg(\lambda_{1,2})| > q\pi/2$.

在仿真时, 取 $q = 0.9$, 取初始值 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3, x_4(0) = 4, x_5(0) = 5, e_1(0) = -0.5, e_2(0) = 0.1, h_1(t) = 0.2\sin(2t), h_2(t) = 2\sqrt[3]{t}, k_1 = \frac{9}{8}, k_2 = \frac{5}{2}, k_3 = 40, k_4 = 3$. 从图 2 可看出, 系统 (10) 实现了修正函数投影同步.

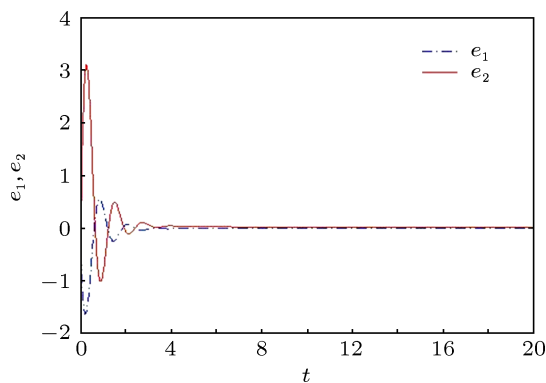


图 2 系统 (10) 实现修正函数投影同步误差的时频波图

3.3 分数阶吕混沌系统数值仿真

分数阶吕混沌系统的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}x_1}{dt^{q_1}} = a(-x_1 + x_2), \\ \frac{d^{q_2}x_2}{dt^{q_2}} = -x_1x_3 + bx_2, \\ \frac{d^{q_3}x_3}{dt^{q_3}} = x_1x_2 - cx_3, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $a = 30, b = 22.2, c = 8.8/3$.

通过单变量 x_3 耦合, 选取 $q = q_1, q_2, q_3$, 则驱

动响应系统为

$$\begin{cases} \frac{d^q x_1}{dt^q} = a(-x_1 + x_2), \\ \frac{d^q x_2}{dt^q} = -x_1x_3 + bx_2, \\ \frac{d^q x_3}{dt^q} = x_1x_2 - cx_3, \\ \frac{d^q x_4}{dt^q} = a(-x_4 + x_5) + \psi_1, \\ \frac{d^q x_5}{dt^q} = -x_4x_3 + bx_5 + \psi_2, \end{cases} \quad (13)$$

其中, $A = \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}, u_r = (x_1, x_2)^T \in R^2,$

$u_s = (x_4, x_5)^T \in R^2, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}, F(u_r, z) =$

$(0, x_1x_3)^T \in R^2, F(u_s, z) = (0, x_4x_3)^T \in R^2, e = u_s - h(t) \cdot u_r = (e_1, e_2)^T \in R^2, h(t) = (h_1(t), h_2(t)) \in R^2, K = \text{diag}(k_1, k_2) \in R^{2 \times 2}.$

由 (6) 式可得到控制器为

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{d^q(h_1(t))}{dt^q} \cdot x_1 \\ \varphi_2 = x_3e_1 + k_2e_2 + \frac{d^q(h_2(t))}{dt^q} \cdot x_2 \end{cases}$$

由 (7) 式可直接写出误差动态系统为

$$\begin{cases} \frac{d^q e_1}{dt^q} = -ae_1 + ae_2 \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} = (b + k_2)e_2 \end{cases} \quad (14)$$

令 $J = A - BK = \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & b + k_2 \end{pmatrix}$, 则相应的特征多项式为

$$\lambda^2 + \left(\frac{39}{5} - k_2 \right) \lambda + 30k_2 - 666 = 0,$$

其中, $a_1 = \frac{39}{5} - k_2, a_2 = 30k_2 - 666, k_2$ 值的选取可以任意调整, 只要其取值满足引理中 $n = 2$ 时的条件,

即特征多项式的系数满足 $a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$, 或

满足 $a_1 < 0, 4a_2 > (a_1)^2, \left| \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{4a_2 - (a_1)^2}}{a_1} \right) \right| >$

$\frac{q\pi}{2}$, 则系统稳定, 实现了修正函数投影同步. 此时 k_2 的取值不惟一, 如取 $k_2 < -22.21$, 使得

$|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2$, 即系统 (14) 渐进稳定, 实现了修正函数投影同步. 当反馈增益参数为 $k_2 = -100$ 时, 特征根 $\lambda_1 = -30, \lambda_2 = -77.80$, 满足 $|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2$.

在仿真中, $q = 0.96$ 取初始值 $x_1(0) = 5, x_2(0) = 3, x_3(0) = 1, x_4(0) = 2, x_5(0) = 4, e_1(0) = 1, e_2(0) = -2, h_1(t) = 0.2 \sin(2t), h_2(t) = 2\sqrt[3]{t}, k_2 = -100$. 则误差动态系统 (14) 的时频波图如图 3 所示. 由图 3 可看出, 误差逐渐趋近于零, 即系统 (13) 实现修正函数投影同步. 当 $h_1 = -2, h_2 = 0.5$ 时, 系统 (13) 可实现修正投影同步^[10], 如图 4(a), (b) 所示.

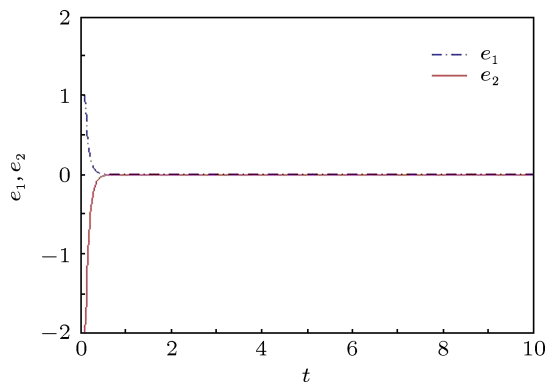


图 3 系统 (13) 实现修正函数投影同步误差的时频波图

由以上两个仿真结果可得出, 通过定理 1 对分数阶混沌系统进行控制时, 非耦合的状态变量从任意初始条件出发能很快达到修正函数投影同步. 同时, 只需修改投影因子, 也可得到其他的同步, 如修正投影同步^[10]、投影同步^[7]等. 与文献 [7, 10] 相比, 本文方法不仅可以实现投影同步或修正投影同步, 还可以实现更为一般的修正函数投影同步. 对于任意的部分线性分数阶混沌系统, 只需对系统进行线性分离, 即可直接得到控制器以及误差系统, 从而很快实现修正函数投影同步、修正投影同步和投影同步等.

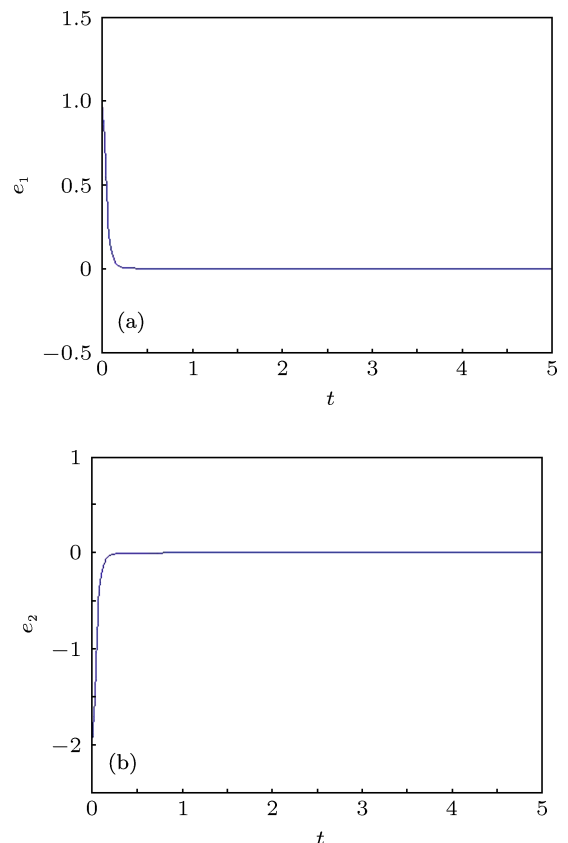


图 4 系统 (13) 实现修正投影同步误差的时频波图

4 结论

本文通过单变量耦合部分线性的分数阶混沌系统构造出响应系统, 实现驱动响应系统的修正函数投影同步. 根据 Routh-Hurwitz 条件, 提出一种设计控制器的方案. 这种方案对于部分线性的分数阶混沌系统具有有效性和可行性. 最后, 在已有的混沌系统基础上, 构造一个新的分数阶混沌系统, 分析该系统的混沌特性, 并用所提出的控制器设计方案实现了该新系统的修正函数投影同步, 并用此方法实现了分数阶混沌系统的修正函数投影同步和修正投影同步.

[1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 [2] Liu J G, 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120506
 [3] Wang X Y, Meng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 726 (in Chinese) [王兴元, 孟娟 2008 物理学报 **57** 726]
 [4] Lu J Q, Cao J D 2005 *Chaos* **15** 043901
 [5] Liu J, Chen S H, Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘杰, 陈士华, 陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
 [6] Sang J Y, Yang J, Yue L J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 080507
 [7] Wang X Y, He Y 2008 *Phys. Rev. A* **372** 435
 [8] Wang X Y, Wang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2498 (in Chinese) [王兴元, 王勇 2007 物理学报 **56** 2498]
 [9] Wang X Y, Zhang Y L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 100506
 [10] Wang X Y, Zhang X P, Ma C 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 511
 [11] Yang X K, Cai L, Zhao X H, Feng C W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3740 (in Chinese) [杨晓阔, 蔡理, 赵晓辉, 冯朝文 2010 物理学报 **59** 3740]
 [12] Li J F, Li N 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080507 (in Chinese) [李建芬, 李

- 农 2011 物理学报 60 080507]
- [13] Deng W, Fang J, Wu Z J, Wu Y M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 140503 (in Chinese) [邓玮, 方洁, 吴振军, 吴艳敏 2012 物理学报 **61** 140503]
- [14] Zhou P, Ding R 2012 *Indian J. Phys.* **86** 497
- [15] Zhou P, Zhu W 2011 *Nonlinear Anal. B: Real World Appl.* **12** 811
- [16] Wang J A, Liu H P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2264 (in Chinese) [王健安, 刘贺平 2010 物理学报 **59** 2264]
- [17] Mainieri R, Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [18] Xu D, Li Z G 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1395
- [19] Hu M F, Xu Z Y 2008 *Nonlinear Anal. B: Real World Appl.* **9** 1253
- [20] Hu M F, Xu Z Y, Zhang R, Hu A H 2007 *Phys. Lett. A* **365** 315
- [21] Matignon D 1996 *In Computational Engineering in Systems and Application Multiconference* Lille France **2** 963
- [22] Ahmed E, El-Sayed A M A, El-Saka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542
- [23] Lu J, Zhou T, Zhang S 2002 *Chaos Soliton. Fract.* **14** 529241
- [24] Benettin G, Galgani L, Strelcyn J M 1976 *Phys. Rev. A* **14** 2338

Modified function projective synchronization for a class of partially linear fractional order chaotic systems*

Yang Ye-Hong Xiao Jian[†] Ma Zhen-Zhen

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

(Received 2 May 2013; revised manuscript received 3 June 2013)

Abstract

In this paper, a method of modified function projective synchronization for a class of partially linear fractional order chaotic systems is proposed. This kind of system can be constructed by single variable coupling response system. The modified function projective synchronization controller is designed by Routh-Hurwitz conditions. Theoretical analyses and numerical simulations of two chaotic systems verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords: fractional order chaotic systems, partially linear, modified function projective synchronization

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.180505

* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (Grant No. CQDXWL-2012-007).

[†] Corresponding author. E-mail: xj4448@126.com