

基于半定规划和秩 -1 分解的稳健波束形成*

王燕 吴文峰 范展[†] 梁国龙

(哈尔滨工程大学, 水声技术重点实验室, 哈尔滨 150001)

(2013年4月10日收到; 2013年5月8日收到修改稿)

针对标准 Capon 波束形成器在存在导向矢量失配时性能急剧下降问题, 提出了一种基于半定规划和秩 -1 分解的稳健波束形成算法. 该方法通过对实际导向矢量的估计提高自适应波束形成算法稳健性. 首先分别从干扰抑制和噪声抑制两个方面推导了新导向矢量应满足的约束条件, 并证明了利用矩阵滤波器构造约束条件的合理性; 构造了估计最优导向矢量的优化问题并将其转化为易于求解的松弛半定规划问题, 同时引入秩 -1 分解理论用于优化问题的求解. 仿真分析表明, 与目前较为常见的算法相比, 本文算法只需利用期望信号可能入射区间这一先验信息, 能获得更高输出信噪比和功率估计精度.

关键词: 稳健自适应波束形成, 半定规划, 秩 -1 分解, 导向矢量估计

PACS: 43.60.Fg, 42.60.Jf, 84.40.Ua

DOI: 10.7498/aps.62.184302

1 引言

自适应阵列处理是阵列信号处理的主要分支之一, 在雷达、声呐、无线通信、医学成像和射电天文学等多种领域具有广泛的应用^[1-3]. 自适应波束形成器, 如 Capon 提出的使理想阵增益最高的最小方差无失真响应 (MVDR) 波束形成器, 一般是建立在阵列对期望信号的响应精确已知的基础上. 在实际应用中, 当存在观测方向误差、阵型标定误差、局部相干散射、快拍数有限或环境的非平稳造成的信号幅度与相位起伏等失配情况, 自适应波束形成器会将实际期望信号误作干扰而形成零陷, 导致信号自消现象^[4].

为减少自适应波束形成器对各种误差失配引起的性能下降, 近年来出现了很多提高自适应波束形成器稳健性的方法. 其中, 对角加载类算法得到了广泛的研究, 但如何确定最优对角加载量仍是一个难题. Li 等^[5]提出的稳健波束形成器 (RCB)、双稳健波束形成器 (DCRCB)^[6]和 Gershman 等^[7]提出的最差性能最优稳健波束形成 (WCPO) 均利用

导向矢量的不确定集来计算最优加权向量, 但这类算法易受不确定集估计误差的影响. 不需要或只需要少量先验信息的稳健波束形成算法显得更为重要, 基于岭回归的自适应波束形成 (HKB)^[8]和基于广义线性组合的协方差矩阵修正法 (GLC)^[9]均可以根据接收数据确定对角加载量, 但这两种算法均有固有缺陷^[10]. Hassanien 等^[11]提出的基于二次规划的稳健波束形成 (SQP) 能通过迭代寻找最优导向矢量, 但每次迭代需解一次二次规划问题, 达到收敛总计算量较大. 文献 [12] 对 SQP 算法在低快拍时的性能进行了部分改进, 但由于约束条件不够严格, 导致快拍数较高时性能反而不如 SQP 算法.

针对自适应波束形成器在存在各种误差失配时性能下降问题, 提出了一种基于秩 -1 分解的稳健波束形成算法, 该算法直接利用接收数据协方差矩阵估计期望信号真实导向矢量, 无需阵列失配程度的先验信息或经验参数的设置, 可以减小雷达、声呐等系统在实际应用中受环境、模型和先验知识失配的影响.

* 国家自然科学基金 (批准号: 51279043, 61201411, 51209059) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: wuwenfenggood@163.com

2 数据模型

考虑一个 M 元标准线列阵, 阵元间距为半波长, 空间有 $K+1$ 组窄带平面波 (一组信号和 K 组干扰) 从 $\Theta = [\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_K]$ 方向入射到基阵, 假设信号、干扰和噪声互不相关, 则阵列接收数据的理论协方差矩阵可以表示为 [13]

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_{i+n} \\ &= \sigma_0^2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0^H + \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H + \mathbf{I}_n, \end{aligned} \quad (1)$$

式中, \mathbf{R}_s 表示信号协方差矩阵; \mathbf{R}_{i+n} 表示干扰加噪声协方差矩阵; σ_0^2 和 $\{\sigma_k^2\}_{k=1}^K$ 分别表示期望信号和 K 组干扰的功率, \mathbf{a}_0 和 $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^K$ 分别表示对应的导向矢量; \mathbf{I}_n 表示基阵接收的噪声协方差矩阵; $(\cdot)^H$ 表示矩阵或向量的共轭转置. 在实际应用中 \mathbf{R} 只能用有限快拍估计.

MVDR 算法 (也称 SCB 算法) 可以描述为

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}_s = 1, \quad (2)$$

式中, \mathbf{a}_s 表示预设的导向矢量; $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ 为加权向量. 在实际应用中, 由于快拍数有限和实际导向矢量 \mathbf{a}_0 与 \mathbf{a}_s 间总存在误差, MVDR 的约束条件失去保证期望信号不失真的能力, 反而导致信号自消现象. Li 等 [5] 从协方差矩阵拟合的思想出发, 在已知真实导向矢量不确定集的假设下, 提出稳健波束形成算法 (RCB). 假设期望信号实际导向矢量属于 (3) 式所示不确定集, 则 RCB 波束形成器可以表述为

$$\begin{aligned} \max_{\sigma^2} \sigma^2 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{R} - \sigma^2 \mathbf{a}_s \mathbf{a}_s^H &\geq 0 \\ \forall \|\mathbf{a}_s - \mathbf{a}_0\| &\leq \varepsilon_0 \end{aligned}, \quad (3)$$

式中, ε_0 为导向矢量误差范数上界. 通过计算符合 (3) 式的最佳导向矢量 \mathbf{a}_s , 进行归一化之后, RCB 波束形成器的权值可表示为

$$\mathbf{w}_r = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}_s}{\mathbf{a}_s^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}_s}. \quad (4)$$

RCB 算法需要预先估计 ε_0 , 其估计精度直接影响算法的性能. SQP 算法需要的先验信息也是期望信号可能入射的区间, 其实质是设定一个小的更新上限, 每次迭代在更新上限内寻找一个最优导向矢量, 并将结果作为初值用于下一次迭代直到收敛, 在保证收敛结果不指向干扰的约束下, SQP 算法可

以对真实的导向矢量较好地估计, 但所需的计算量较大, 且参数的设置偏差也会影响性能.

3 本文稳健自适应波束形成

3.1 目标函数和约束条件

文献 [14] 证明快拍数不足造成的数据协方差矩阵误差可以看作由于导向矢量误差引起, 因此可以通过修正 (2) 式中的预设导向矢量来同时克服快拍数不足和导向矢量失配对 MVDR 的影响. (2) 式中的目标函数可以改写为

$$\min_{\bar{\mathbf{a}}_s} \bar{\mathbf{a}}_s^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_s, \quad (5)$$

式中, $\hat{\mathbf{R}}$ 表示由有限快拍估计的数据协方差矩阵; $\bar{\mathbf{a}}_s$ 为需要估计的最优导向矢量. (5) 式的物理意义为寻找最优导向矢量 $\bar{\mathbf{a}}_s$ 使阵列功率输出最大. 最优导向矢量必须满足下面两个条件: 1) 低信噪比时新导向矢量不能指向干扰方向, 且不能降低对干扰的抑制能力; 2) 对主瓣外的噪声抑制能力不能降低. 在理想情况下 (观察数据中不含期望信号且快拍数足够大时), (5) 式对应的权向量可以表示为 [15]

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{a}}_s - \sum_{m=1}^M \frac{\gamma_m - \gamma_M}{\gamma_m} \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \bar{\mathbf{a}}_s, \quad (6)$$

式中, $\{\gamma_m\}_{m=1}^M$ 为 $\hat{\mathbf{R}}$ 的按降序排列的特征值, 满足 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_K = \dots = \gamma_M$, $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^M$ 为对应的特征向量. 该加权向量对 θ 方向的波束响应为

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}(\theta) - \sum_{m=1}^K \frac{\gamma_m - \gamma_M}{\gamma_m} \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \mathbf{a}(\theta) \\ &= \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}(\theta) - \sum_{m=1}^K \frac{\gamma_m - \gamma_M}{\gamma_m} \rho_m p_m(\theta), \end{aligned} \quad (7)$$

式中, $\mathbf{a}(\theta)$ 表示 θ 方向的导向矢量; $p_m(\theta) = \mathbf{u}_m^H \mathbf{a}(\theta)$ 表示第 m 个特征波束, 即以第 m 个特征向量作为加权得到的波束响应; $\rho_m = \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{u}_m$ 可视为调节因子. 文献 [15] 指出, 特征波束之间是正交的, 且在干扰信号方向 ρ_m 通过调节 $\rho_m p_m(\theta)$ 的大小使 $\rho_m p_m(\theta) = \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}(\theta)$. 因此 \mathbf{w} 对第 k 个干扰方向的响应为

$$P(\theta_k) = \left(1 - \frac{\gamma_k - \gamma_M}{\gamma_k}\right) \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}_k = \frac{\gamma_M}{\gamma_k} \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}_k. \quad (8)$$

若要保证新的导向矢量对应的权值对干扰方向的抑制能力不降低, 必须有

$$\bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}_k \leq \mathbf{a}_s^H \mathbf{a}_k, \quad (9)$$

(9) 式显然也可以保证新的导向矢量不会指向干扰方向. 令 Θ_s 表示期望信号可能出现的扇面 (区域大小和预处理精度有关), Θ_p 表示其补集. 当 $\theta \in \Theta_s$ 且偏离干扰方向时, 由于 \mathbf{u}_m 和 $\mathbf{a}(\theta)$ 不相关, $p_m(\theta)$ 的值会非常小, (7) 式中起主要作用的是第一项, 此时

$$P(\theta) \approx \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}(\theta) \quad \theta \in \Theta_p, \theta \neq \theta_k. \quad (10)$$

同理, 若要抑制新导向矢量对 Θ_p 扇面旁瓣响应, 须满足

$$\bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}(\theta) \leq \mathbf{a}_s^H \mathbf{a}(\theta) \quad \theta \in \Theta_p, \theta \neq \theta_k. \quad (11)$$

由于干扰信号真实方位未知, 同时为了全局优化, 结合 (10) 和 (11) 式可得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \sigma_k \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}_k + \sum_{\theta} \sigma_{\theta} \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{a}(\theta) \\ & \leq \sum_{k=1}^K \sigma_k \mathbf{a}_s^H \mathbf{a}_k + \sum_{\theta} \sigma_{\theta} \mathbf{a}_s^H \mathbf{a}(\theta), \end{aligned} \quad (12)$$

式中, θ 取值同 (11) 式, σ_{θ} 为 θ 方向噪声功率平方根. 利用 σ_k 和 σ_{θ} 作加权因子是为了保证 (12) 式对功率越大的干扰对应方向的抑制能力越强. (12) 式可转化为

$$\bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{R}_n \bar{\mathbf{a}}_s \leq \mathbf{a}_s^H \mathbf{R}_n \mathbf{a}_s, \quad (13)$$

式中, $\mathbf{R}_n = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H + \sum_{\theta} \sigma_{\theta}^2 \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta)$ 可以看作 Θ_p 扇面内干扰和噪声的协方差矩阵. 注意 \mathbf{R}_n 和 (1) 式中定义的 \mathbf{R}_{i+n} 意义不同, 为了行文的连续性, \mathbf{R}_n 的估计方法将在最后一节介绍. 若除了信号可能出现的扇面 Θ_s 外没有其他任何先验信息, (13) 式可由下式代替

$$\bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{R}_n \bar{\mathbf{a}}_s \leq \max(\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_n \mathbf{a}(\theta)) \quad \theta \in \Theta_s. \quad (14)$$

为了剔除 (5) 式中的 $\mathbf{0}$ 解, 同时为了消除估计信号功率时的比例模糊问题, 增加如下范数约束

$$\|\bar{\mathbf{a}}_s\|^2 = M. \quad (15)$$

结合 (5), (14) 和 (15) 式可得本文算法的完整表达式为

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{\mathbf{a}}_s} \bar{\mathbf{a}}_s^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_s \\ & \text{s.t. } \bar{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{R}_n \bar{\mathbf{a}}_s \leq \beta, \\ & \|\bar{\mathbf{a}}_s\|^2 = M, \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\beta = \max(\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_n \mathbf{a}(\theta))$, $\theta \in \Theta_s$. 本文算法利用的先验知识仅是期望信号可能入射的区间, 这只需对期望信号方向进行低精度的估计即可, 较 RCB 算法所需的先验条件更为宽松, 且该算法无需经验参数的设置.

3.2 问题的求解

(16) 式属于二次约束二次规划问题 (QCQP), 因为第二个约束条件不属于凸函数, (16) 式属于非凸优化问题, 导致求解困难. 为了将 (16) 式转化为易于求解的凸优化问题, 利用关系式 $\bar{\mathbf{a}}_s \hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_s = \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_s \bar{\mathbf{a}}_s^H)$, 并令 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{a}}_s \bar{\mathbf{a}}_s^H$, (16) 式可以转化为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{A}} \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A}) \\ & \text{s.t. } \text{tr}(\mathbf{R}_n \mathbf{A}) \leq \beta, \\ & \text{tr}(\mathbf{A}) = M, \quad \mathbf{A} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中, $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ 表示矩阵半正定. (17) 式中忽略了条件 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 1$, 因为该函数为非凸函数也会导致求解困难, 上式被称为松弛半定规划问题 (SDR)^[16], 利用基于内点法的工具箱易于求解. 解得 \mathbf{A} 后, 对其进行特征分解, 取最大的特征值对应特征向量进行归一化后作为 $\bar{\mathbf{a}}_s$ 的估计. 该求解方式获得的 \mathbf{A} 虽然是最优的, 但分解得到的 $\bar{\mathbf{a}}_s$ 可能不是 (16) 式的最优解. 因此本文基于秩-1 分解, 给出如下求解方法并对其进行证明. 首先引入如下定理.

定理 1^[17] 假设 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ 为 Hermitian 矩阵, \mathbf{X} 为秩为 r 的半正定 Hermitian 矩阵. 如果 $r \geq 3$, 则存在向量 $\mathbf{y} \in \text{Range}(\mathbf{X})$ 满足

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{y} \mathbf{y}^H) = \text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}) \\ \text{tr}(\mathbf{A}_2 \mathbf{y} \mathbf{y}^H) = \text{tr}(\mathbf{A}_2 \mathbf{X}) \\ \text{tr}(\mathbf{A}_3 \mathbf{y} \mathbf{y}^H) = \text{tr}(\mathbf{A}_3 \mathbf{X}) \end{cases}, \quad (18)$$

且 $\mathbf{X} - \mathbf{y} \mathbf{y}^H / r$ 为半正定, $\text{rank}(\mathbf{X} - \mathbf{y} \mathbf{y}^H / r) \leq r - 1$. 如果 $r = 2$, 对任意 $\mathbf{z} \notin \text{Range}(\mathbf{X})$, 存在向量 \mathbf{y} 属于 \mathbf{z} 和 \mathbf{X} 列空间组成的子空间, 满足

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{y} \mathbf{y}^H) = \text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}) \\ \text{tr}(\mathbf{A}_2 \mathbf{y} \mathbf{y}^H) = \text{tr}(\mathbf{A}_2 \mathbf{X}) \\ \text{tr}(\mathbf{A}_3 \mathbf{y} \mathbf{y}^H) = \text{tr}(\mathbf{A}_3 \mathbf{X}) \end{cases}, \quad (19)$$

且 $\mathbf{X} + \mathbf{z} \mathbf{z}^H - \mathbf{y} \mathbf{y}^H / r$ 为半正定, $\text{rank}(\mathbf{X} + \mathbf{z} \mathbf{z}^H - \mathbf{y} \mathbf{y}^H / r) \leq 2$.

为了利用定理 1, 引入一个辅助变量 τ 并令 $\tilde{\mathbf{a}}_s = [\tilde{\mathbf{a}}_s; \tau]$, $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{a}}_s \tilde{\mathbf{a}}_s^H$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}^{-1} & \mathbf{0}_{1 \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n & \mathbf{0}_{1 \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & \mathbf{0}_{1 \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{1 \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

则求解 (16) 式等价于求解

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{a}}_s} & \tilde{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{R}_0^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_s \\ \text{s.t.} & \tilde{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{a}}_s \leq \beta, \\ & \tilde{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{R}_2 \tilde{\mathbf{a}}_s = M \\ & \tilde{\mathbf{a}}_s^H \mathbf{R}_3 \tilde{\mathbf{a}}_s = 1 \end{aligned} \quad (21)$$

上式虽然引入新的变量 τ , 当该变量对 (16) 式最优问题没有影响, (21) 式的松弛半定规划形式可以表示为

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{A}}} & \text{tr}(\mathbf{R}_0 \tilde{\mathbf{A}}) \\ \text{s.t.} & \text{tr}(\mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{A}}) \leq \beta, \\ & \text{tr}(\mathbf{R}_2 \tilde{\mathbf{A}}) = M \\ & \text{tr}(\mathbf{R}_3 \tilde{\mathbf{A}}) = 1 \quad \tilde{\mathbf{A}} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (22)$$

上式一样忽略了约束 $\text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) = 1$. 下面将利用秩 -1 分解弥补该约束, 首先引入下面的推论.

推论 1 (21) 和 (22) 式有等价的解, 设 $\tilde{\mathbf{A}}^*$ 为满足 (22) 式的最优解, 若其秩 $r = 2$ 或 $r \geq 3$, 可通过对 $\tilde{\mathbf{A}}^*$ 进行秩 -1 分解求解 $\tilde{\mathbf{a}}_s^*$, 若 $r = 1$, 可以通过特征分解求解 $\tilde{\mathbf{a}}_s^*$.

证明过程及求解 $\tilde{\mathbf{a}}_s^*$ 的方式见附录.

求得 $\tilde{\mathbf{a}}_s^* = [\tilde{\mathbf{a}}_s^*; \tau^*]$ 后, 因为 $|\tau^*| = 1$ 且旋转 $\tilde{\mathbf{a}}_s$ 并不会影响波束形成器性能, 满足 (21) 式的最优解由 $\tilde{\mathbf{a}}_s = \tilde{\mathbf{a}}_s^* / \tau^*$ 计算, 对应波束形成器的加权向量可表示为

$$\mathbf{w}_0 = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_s}{\tilde{\mathbf{a}}_s^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_s}. \quad (23)$$

期望信号功率估计值可表示为

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\tilde{\mathbf{a}}_s^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_s}. \quad (24)$$

3.3 R_n 的求解

本文以矩阵预滤波原理^[18]为基础, 给出一种适合存在导向矢量误差时特定区域干扰和噪声协方差矩阵重构方法. 基于矩阵滤波器的特定区域干扰和噪声协方差矩阵重构方法的原理, 为设计滤波矩阵 \mathbf{G} , 使其能抑制期望信号可能出现的扇面的信号, 而让其他方位所有干扰和噪声成分无失真通过, 即

$$\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta) = \begin{cases} \mathbf{a}(\theta) & \theta \in \Theta_p \\ \mathbf{0} & \theta \in \Theta_s \end{cases}. \quad (25)$$

将期望信号可能入射方向 Θ_s 离散化为 θ_i ($i = 1, \dots, N_s$), 并设为矩阵预滤波器阻带; 同时将其补集 Θ_p 离散化为 θ_j ($j = 1, \dots, N_p$), 并设为矩阵预滤波器通带. 按阻带约束通带最小均方误差准则矩阵预滤波器优化问题可以表述为

$$\min_{\mathbf{G}} \sum_{j=1}^{N_p} \|\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_j) - \mathbf{a}(\theta_j)\|^2 \quad j = 1, \dots, N_p, \quad (26)$$

$$\text{s.t.} \|\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_i)\| \leq \epsilon_0 \quad i = 1, \dots, N_s,$$

式中, ϵ_0 为指定阻带区域信号衰减率. 注意 (26) 式和常规矩阵预滤波器设计方法不同的是没有对 \mathbf{G} 的范数进行约束, 原因是为了让通带内噪声也尽可能通过.

下面证明利用 (26) 式设计的矩阵预滤波器对存在导向矢量误差时的阵列信号也有滤波能力. 期望信号导向矢量误差由观察方向误差和随机误差组成, 而干扰导向矢量误差只有随机误差, 不妨设

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta) + \Delta\mathbf{a}_0, \quad (27)$$

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}(\theta_k) + \Delta\mathbf{a}_k, \quad (28)$$

式中, θ_0 为期望信号方向, $\Delta\theta$ 为观测方向误差, $\Delta\mathbf{a}_0$ 和 $\Delta\mathbf{a}_k$ 分别为随机导向矢量误差.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}^H \mathbf{a}_0\| &= \|\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta) + \mathbf{G}^H \Delta\mathbf{a}_0\| \\ &\leq \|\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta)\| + \|\mathbf{G}^H \Delta\mathbf{a}_0\| \\ &\approx \|\mathbf{G}^H \Delta\mathbf{a}_0\|, \end{aligned} \quad (29)$$

式中第三步成立的原因是信号实际方向 $\theta_0 + \Delta\theta$ 仍在滤波器阻带 Θ_p 中. 同样有

$$\|\mathbf{G}^H \mathbf{a}_k\| \geq \|\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_k)\| - \|\mathbf{G}^H \Delta\mathbf{a}_k\|. \quad (30)$$

为了计算 (29) 和 (30) 式中第二项, 先引入 Rayleigh 商的定义和性质^[19], 设 $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为 Her-

mite 阵, V 的 Rayleigh 商为

$$\rho(x) = \frac{x^H V x}{x^H x} \quad x \in C^n, x \neq 0. \quad (31)$$

Rayleigh 商满足有界性即

$$\lambda_n \leq \rho(x) \leq \lambda_1, \quad \forall x \in C^n, x \neq 0, \quad (32)$$

其中 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ 为 V 的特征值.

令 x 表示随机导向矢量误差, 利用 (31) 和 (32) 式则有

$$\|G^H x\| = \sqrt{x^H G G^H x} \leq \sqrt{\lambda_1} \|x\|, \quad (33)$$

式中, λ_1 为 $G G^H$ 最大的特征值. 若 (19) 式完全满足则 $\lambda_1 = 1$, 实际设计总存在一定偏差, 从下面的一个数值计算例子可看出 λ_1 略大于 1. 存在观测方向误差和导向矢量误差时, 矩阵滤波器对信号和干扰的响应分别为

$$\|G^H a_0\| \approx \|\Delta a_0\|, \quad (34)$$

$$\|G^H a_k\| \geq \|G^H a(\theta_k)\| - \|\Delta a_k\|. \quad (35)$$

一般导向矢量误差的范数 $\|\Delta a_0\| \ll \|a(\theta_0)\|$, 由 (34) 式知矩阵滤波器对真实信号仍具有抑制能力, 且 (35) 式中 $\|\Delta a_k\| \ll \|G^H a(\theta_k)\|$, 即第二项对第一项影响较小, 矩阵滤波器仍能保证干扰近似无失真通过. 综上存在导向矢量失配时, 矩阵预滤波器仍具有一定空域的滤波能力, 滤波能力和随机导向矢量误差范数大小有关.

下面由一个数值仿真说明. 考虑 12 元均匀线阵, 波束观测方向 10° , 信号可能到达方向 $[7^\circ \ 13^\circ]$, 通带设定为 $\Theta_p = [-90^\circ : 1^\circ : -3^\circ] \cup [23^\circ : 1^\circ : 90^\circ]$, 离散阻带设定为 $\Theta_s = [7^\circ : 1^\circ : 13^\circ]$, 阻带衰减设为 -30 dB, 利用 (26) 式设计矩阵滤波器.

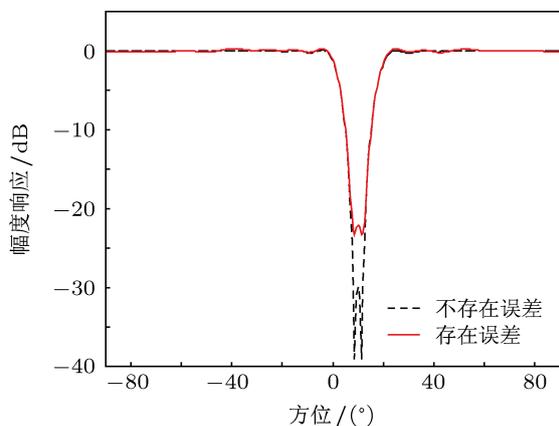


图1 矩阵滤波器幅度响应

图 1 显示不存在导向矢量误差和存在导向矢量误差时矩阵预滤波器幅度响应, 其中导向矢量误差为服从均值为 0 , 方差为 $\delta^2 I$ ($\delta = 0.1$) 复高斯分布. 此例中 $\sqrt{\lambda_1} = 1.056$. 从图 1 中可以看出存在导向矢量误差时, 阻带衰减虽减少但仍小于 -21 dB, 且通带衰减不超过 0.3 dB, 这与利用 (34) 和 (35) 式的计算结果符合.

在存在导向矢量失配时, 利用 (20) 式设计的矩阵滤波器仍能保证空域滤波能力, 因此 Θ_p 扇面内的干扰和噪声协方差矩阵可由下式估计

$$R_n = G^H \hat{R} G. \quad (36)$$

4 仿真结果及分析

为了验证本文算法的性能, 设计了以下几组实验. 考虑一个 12 元均匀线阵, 阵元间距为半波长, 基阵背景噪声为 0 dB 空间白噪声. 三组窄带平面波分别从 -30° , 11° 和 35° 方向入射到基阵, 其中 11° 方向信号为期望信号, 其他两组信号为干扰, 信号、干扰与噪声都是互不相关的随机高斯窄带过程. 两干扰信噪比 (SINR) 分别为 20 dB 和 25 dB. 对以下算法做了分析比较: SCB 算法、固定对角加载算法 (FDL)、HKB 算法、GLC 算法、RCB 算法、SQP 算法和本文算法, 其中 FDL 算法对角加载量取 10 倍白噪声功率 (对 FDL 算法而言假定白噪声功率已知), RCB 算法中的参数取文献 [5, 6] 中的推荐值, SQP 算法参数设置和文献 [11] 相同. 仿真结果若无特殊说明均为 200 次 Monte-Carlo 实验取平均值.

4.1 存在失配时波束图比较

分别考察存在随机导向矢量误差、观测方向误差和局部相干散射时, 各种自适应波束形成方法 (只显示 SCB, RCB 和本文算法) 的单次实验波束响应图. 其中随机导向矢量误差 Δa 为服从均值为 0 , 方差为 $\delta^2 I$ 的复向量, 且 $\delta = 0.1$; 观测方向误差为 1° , 即实际信号入射方向为 11° , 但波束观测方向为 10° , 需要指出的是本文算法只需信号可能入射的区间, 波束观测方向是对其他算法而言; 存在局部相干散射时, 实际信号导向矢量可以表述为 [12]

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^I \exp(j\varphi_i) a(\theta_i), \quad (37)$$

其中 \mathbf{a}_0 表示直达信号对应导向矢量, $\mathbf{a}(\theta_i)$, $i = 1, \dots, I$ 表示从 θ_i 方向入射的相干散射信号对应的导向矢量, φ_i 为相干散射信号相对于直达信号的相位差. 此例中 I 取 4, 直达信号方位为 11° , 散射信号入射方位 θ_i 为服从均值为 11° , 标准差为 2° 的高斯分布的随机变量, φ_i 为 $[0, 2\pi]$ 间均匀分布的随机变量. 期望信号信噪比为 20 dB , 快拍数为 200, RCB 算法中参数 ϵ_0 取 3, 本文算法矩阵滤波器参数同 3.3 节.

图 2 显示存在随机导向矢量误差时三种算法的波束; 图 3 显示存在观测方向误差时的波束; 图 4 显示存在局部相干散射时的波束. 图中虚线指示实际信号和干扰的入射方位. 从图中可以看出, 存在条件失配时, SCB 算法虽然在干扰方向形成了零陷, 但旁瓣升高, 主瓣严重变形甚至出现信号自消现象. 从图 2 可以看出, RCB 算法和本文算法均保持了较好的波束, 本文方法在干扰处的零陷更深.

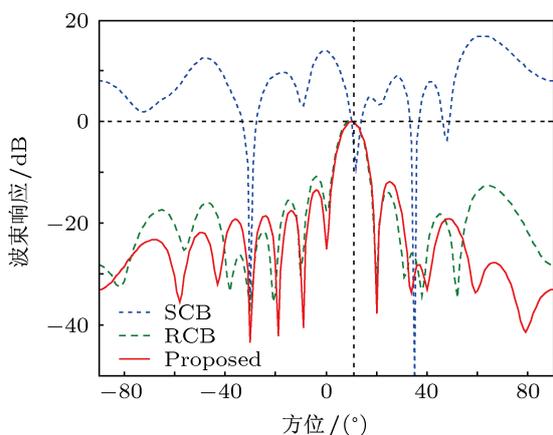


图 2 存在随机误差时的波束

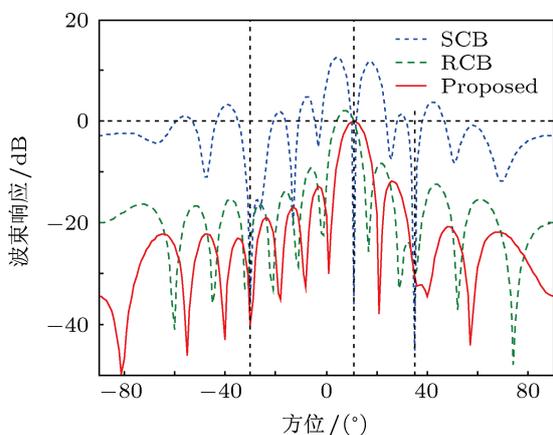


图 3 存在观测方向误差时的波束

从图 3 可以看出本文方法能将主瓣自动指向正确方向, 而 RCB 算法虽然也能保证对导向矢量不确定集内的响应大于 0 dB , 但对于干扰和旁瓣区域噪声抑制能力均低于本文算法. 图 4 中本文算法能保持主瓣的完整, 说明该算法能准确估计直达信号和散射信号的合成导向矢量 (若估计存在偏差会在实际导向矢量方向出现零陷), RCB 算法也是通过最优导向矢量的估计来提高稳健性, 但这种情况下导向矢量的不确定集难以估计, 而不确定集的估计误差会直接导致算法性能的下降.

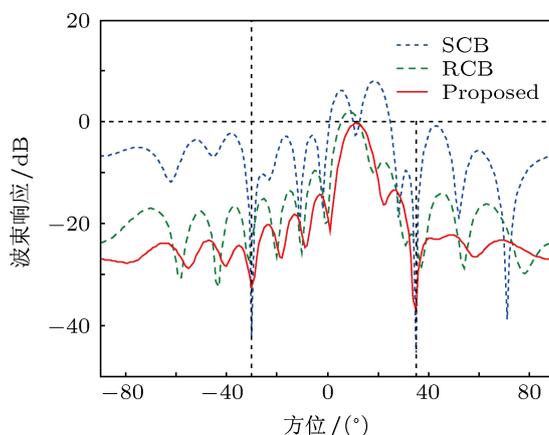


图 4 存在局部散射时的波束

4.2 存在随机导向矢量误差时性能对比

考察存在 4.1 所述随机导向矢量误差时各种波束形成算法的性能. RCB 算法参数 $\epsilon_0 = 3$, SQP 算法中期望信号的可能入射方向设为 $[\theta_0 - 5^\circ, \theta_0 + 5^\circ]$, 每次迭代更新量范数约束 0.1, 当两次迭代目标函数误差小于 10^{-6} 时认为收敛. 图 5 显示存在随机导向矢量误差时输出 SINR 随输入信噪比 (SNR) 变化曲线, 其中 OPT 表示理想情况下最优输出 SINR, 输入信噪比从 -10 dB 到 30 dB 变化. 从图 5 中可以看出在输入信噪比小于 10 dB 时, 各稳健波束形成算法均在一定程度上缓解导向矢量失配带来的性能下降, 输入信噪比较高时各算法陆续出现性能下降, 但在整个观测区间内本文算法的性能高于其他算法. 部分算法在信噪比较高时输出 SINR 反而随输入信噪比升高而降低, 这是算法稳健性不足时信号自消现象导致. 图 6 显示期望信号功率估计随输入信噪比的变化曲线. 从图 6 中可以看出输入信噪比小于 -2 dB 时, 所有算法均存在过估计, 这是因为信噪比较小时功率估计受主瓣内噪声影响较

大,随着输入信噪比提升,本文算法和 RCB 算法均能准确估计信号功率,其他算法估计偏差随输入信噪比的提高而加大。

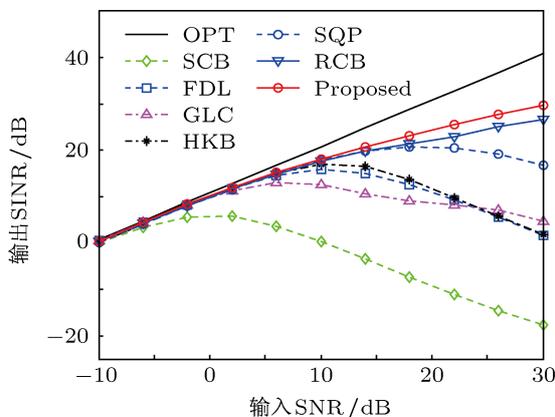


图5 存在随机导向矢量误差时各算法 SINR 随 SNR 变化曲线

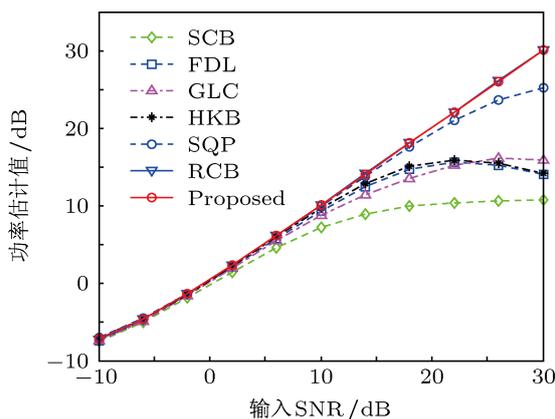


图6 功率估计性能

4.3 存在随机导向矢量误差时性能随快拍数变化

快拍数从 20 到 200 变化,期望信号输入信噪比为 20 dB,其他条件同 4.2 节.图 7 显示存在随机导向矢量误差时输出 SINR 随快拍数的变化曲线,图 8 显示期望信号功率估计随快拍数变化曲线.从图 7 可以看出,除 GLC 算法外其他算法输出信干噪比均随快拍数增加而提高,但在相同快拍数时本文算法性能优于其他算法. GLC 算法性能随快拍数增加反而下降,这是因为随快拍数增加, GLC 算法生成的对角加载量减少而逐渐失去抵抗导向矢量误差的鲁棒性,这一现象在图 8 中也有反映.另外从图 8 可以看出,本文算法在功率估计方面的性能和参数选择与合适的 RCB 算法相当,均高于其他

算法.

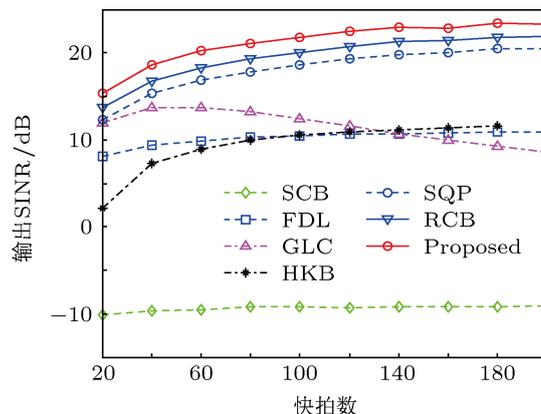


图7 存在随机误差时 SINR 随快拍数变化曲线

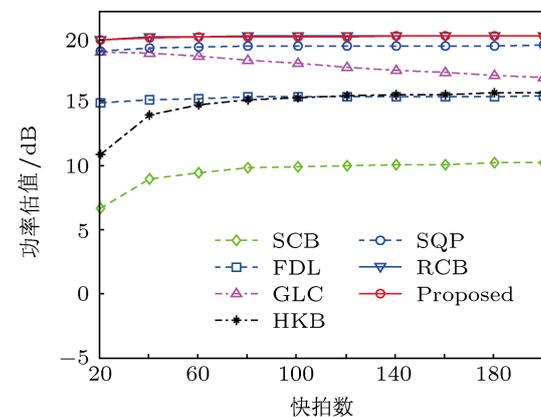


图8 功率估计随快拍数变化曲线

4.4 存在观测方向误差时性能对比

观测方向固定为 10° ,信号实际入射方向在 $[7^\circ 13^\circ]$ 变化,期望信号信噪比 10 dB,快拍数 200,不存在随机导向矢量误差,RCB 算法的参数根据观测方向误差实时计算, SQP 算法参数同 4.2 节.图 9 显示各算法输出 SINR 随观测方向误差的变化曲线.从图 9 中可以看出,当信号实际入射方向在预测区间时,本文算法性能受观测方向误差影响不大(观测方向误差 3° 时下降约 0.5 dB),且均高于其他算法.

4.5 同时存在随机误差和观测方向误差时性能对比

实际信号入射方向为 11° ,观测方向为 10° ,即存在 1° 观测方向误差,同时还存在 3.1 节所述随机导向矢量误差,快拍数为 200,RCB 中 $\epsilon_0 = 3$, SQP

算法参数同 4.2 节. 图 10 显示存在上述失配时各算法输出 SINR 随输入信噪比变化曲线. 从图 10 中可以看出, 当输入信噪比小于 10 dB 时, 本文算法性能和 SQP 算法性能相当, 略高于其他算法. 当信噪比继续升高时, SQP 算法性能出现退化, 而本文算法和 RCB 算法在高信噪比时体现出更高的稳健性.

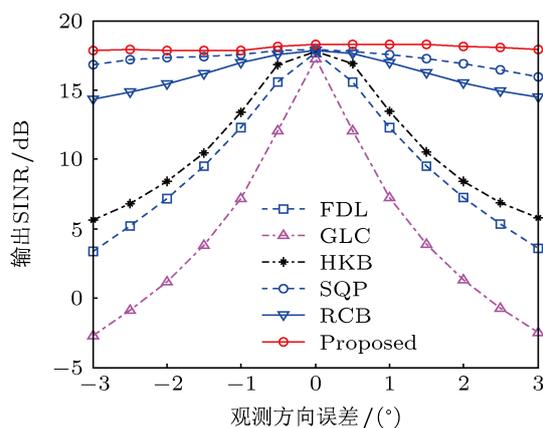


图 9 SINR 随观测方向误差变化曲线

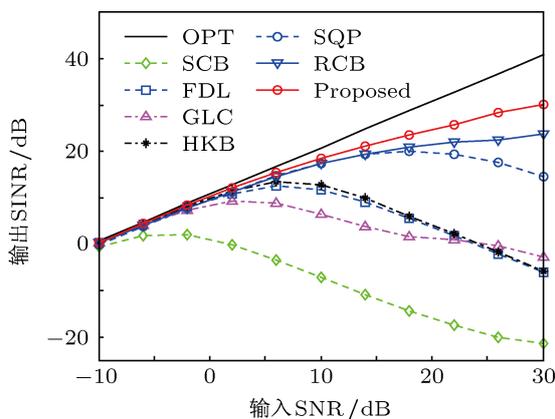


图 10 同时存在随机误差和观测方向误差时 SINR 随 SNR 变化曲线

4.6 存在局部相干散射时性能对比

考察存在 4.1 节所述局部相干散射时各算法性能, RCB 参数取 3, SQP 算法参数同 4.2 节, 快拍数为 200. 图 11 显示存在局部相干散射时各算法输出 SINR 随输入信噪比变化曲线. 从图 11 中可以看出在整个观察区间内本文算法的性能均高于其他算法, 且随输入信噪比越高差距越明显. 值得注意的是本文算法的模型建立在期望信号子空间为一维的情况, 对于非相干散射等多维情况详见文献 [20] 和 [21].

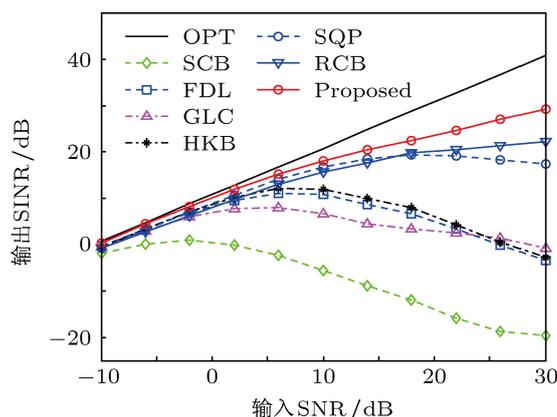


图 11 存在局部散射时 SINR 随 SNR 变化曲线

5 结论

针对存在导向矢量失配时标准 Capon 波束形成器性能下降问题, 提出了一种基于秩 -1 分解的稳健波束形成算法. 证明了矩阵滤波器对存在导向矢量误差的阵列仍有空域滤波作用, 并将其运用于约束条件的构造, 同时将优化问题转化为松弛半定规划问题, 并引入秩 -1 分解理论用于求解最优解. 通过仿真对比分析, 与目前较为常见算法相比, 本文方法在以下方面有更好的性能和适用性: 1) 本文方法不需要导向矢量失配程度的先验信息, 避免了因先验信息无法估计或估计误差导致的性能下降问题; 2) 在保证主瓣正确指向期望信号的同时能获得更低的旁瓣和更深干扰零陷; 3) 能获得更高的输出 SINR 和准确的功率估计精度; 4) 对局部相干散射等模型失配有较高的稳健性.

附录

该推论的证明过程主要利用文献 [17] 中的秩 -1 分解结论. 原始问题 (21) 式的对偶问题为

$$\begin{aligned} \max_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} & \beta \mu_1 + M \mu_2 + \mu_3 \\ \text{s.t.} & \mathbf{R}_0 - \mu_1 \mathbf{R}_1 - \mu_2 \mathbf{R}_2 - \mu_3 \mathbf{R}_3 \succeq \mathbf{0}, \\ & \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}, \mu_1 \geq 0, \end{aligned} \quad (38)$$

式中, \mathbb{R} 表示实数集. 由半定规划对偶理论知, 如果原始问题存在正定可行性解, 则对偶问题必有最优解, 且二者间没有对偶间隙, 令 $\tilde{\mathbf{A}}^*$ 和 $\{\mu_i^*\}_{i=1}^3$ 分别为 (22) 和 (38) 式的最优解, 它除了需满足 (22) 和 (38) 式外, 还需满足如下条件

$$\text{tr}((\mathbf{R}_0 - \mu_1 \mathbf{R}_1 - \mu_2 \mathbf{R}_2 - \mu_3 \mathbf{R}_3) \tilde{\mathbf{A}}^*) = 0, \quad (39)$$

$$(\text{tr}(\mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{A}}^*) - \beta) \mu_1^* = 0, \quad (40)$$

$$\text{tr}(\mathbf{R}_2 \tilde{\mathbf{A}}^*) - M = 0, \quad \text{tr}(\mathbf{R}_3 \tilde{\mathbf{A}}^*) - 1 = 0, \quad (41)$$

上述条件称为非线性规划问题的 KKT 条件, 是最优解需满足的必要条件, 又因为原始问题 (22) 式中目标函数和不等式约束条件均为可微凸函数, 且等式约束为仿射函数, 该 KKT 条件也为最优解的充分条件.

当 $\text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}^*) \geq 3$ 时, 由定理 1 知存在 $\tilde{\mathbf{a}}_s \in \text{range}(\tilde{\mathbf{A}}^*)$, 满足

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{a}}_s \tilde{\mathbf{a}}_s^H) &= \text{tr}(\mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{A}}^*), \\ \text{tr}(\mathbf{R}_2 \tilde{\mathbf{a}}_s \tilde{\mathbf{a}}_s^H) &= \text{tr}(\mathbf{R}_2 \tilde{\mathbf{A}}^*), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\text{tr}(\mathbf{R}_3 \tilde{\mathbf{a}}_s \tilde{\mathbf{a}}_s^H) = \text{tr}(\mathbf{R}_3 \tilde{\mathbf{A}}^*).$$

$\tilde{\mathbf{A}}^*$ 满足上述 KKT 条件, 则 $\tilde{\mathbf{a}}_s \tilde{\mathbf{a}}_s^H$ 也满足相同 KKT 条件, 即 $\tilde{\mathbf{a}}_s \tilde{\mathbf{a}}_s^H$ 也为 (22) 式的最优解, $\tilde{\mathbf{a}}_s$ 为 (21) 式的最优解. 同理当 $\text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}^*) = 2$ 时, 利用定理 1 也可找到 (22) 式的最优解 $\tilde{\mathbf{a}}_s$, 定理 1 的证明过程即求解 $\tilde{\mathbf{a}}_s$ 的过程详见文献 [17], 这里不再赘述.

当 $\text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}^*) = 1$ 时, 直接对其分解 $\tilde{\mathbf{A}}^* = \tilde{\mathbf{a}}_s \tilde{\mathbf{a}}_s^H$, 即可获得 (21) 式的最优解.

-
- [1] Shi J, Yang D S, Shi S G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 124302 (in Chinese) [时洁, 杨德森, 时胜国 2012 物理学报 **61** 124302]
 - [2] Yang D G, Li B, Wang Z T, Lian X M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 054306 (in Chinese) [杨殿阁, 李兵, 王子腾, 连小珉 2012 物理学报 **61** 054306]
 - [3] Shi J, Yang D S, Shi S G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 064301 (in Chinese) [时洁, 杨德森, 时胜国 2011 物理学报 **60** 064301]
 - [4] Gu Y J, Leshem A 2011 *IEEE Trans. Sign. Process.* **60** 3881
 - [5] Li J, Stoica P, Wang Z S 2003 *IEEE Trans. Sign. Process.* **51** 1702
 - [6] Li J, Stoica P, Wang Z S 2004 *IEEE Trans. Sign. Process.* **52** 2407
 - [7] Sergiy A V, Gershman A B, Luo Z Q 2003 *IEEE Trans. Sign. Process.* **51** 313
 - [8] Selen Y, Abrahamsson R, Stoica P 2008 *Signal Process.* **88** 33
 - [9] Gu Y J, Zhu W P, Swamy M N 2010 *Electron. Lett.* **46** 86
 - [10] Li J, Lin D, Stoica P 2010 *IEEE Trans. on A&E* **46** 449
 - [11] Aboulnasr H, Sergiy A V, Wong K M 2008 *IEEE Sign. Process. Lett.* **15** 733
 - [12] Arash K, Sergiy A V, Aboulnasr H 2012 *IEEE Trans. Sign. Process.* **60** 2974
 - [13] Yang D G, Luo Y G, Li B, Li K Q, Lian X M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4738 (in Chinese) [杨殿阁, 罗禹贡, 李兵, 李克强, 连小珉 2010 物理学报 **59** 4738]
 - [14] Feldman D D, Griffiths L J 1994 *IEEE Trans. Sign. Process.* **42** 867
 - [15] Yan S F, Ma Y L 2009 *Sensor Array Beampattern Optimization: Theory with Application* (1st Ed.) (Beijing: Science Press) p53 (in Chinese) [鄢社锋, 马远良 2009 传感器阵列波束优化设计及应用 (第一版)(北京: 科学出版社) 第 53 页]
 - [16] Luo Z Q, Ma W K, Anthony M C S, Ye Y Y, Zhang S Z 2010 *IEEE Sign. Process. Mag.* **27** 20
 - [17] Ai W B, Huang Y W, Zhang S Z 2009 *Math. Program.* **128** 253
 - [18] Richard J V, Amit C, Brian F H 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **115** 3010
 - [19] Loudior E, Marcus B H 2010 *IEEE Trans. Inf. Theory* **56** 1624
 - [20] Li Y Z, Shi Q F, Wang Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1119 (in Chinese) [李运周, 史庆藩, 王琪 2006 物理学报 **55** 1119]
 - [21] He J B, Liu Z, Hu S L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110208 (in Chinese) [贺静波, 刘忠, 胡生亮 2011 物理学报 **60** 110208]

Robust adaptive beamforming based on semi-definite programming and rank-one decomposition*

Wang Yan Wu Wen-Feng Fan Zhan[†] Liang Guo-Long

(*Science and Technology On Underwater Acoustic Laboratory, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

(Received 10 April 2013; revised manuscript received 8 May 2013)

Abstract

The performance of Capon beamformer degrades sharply in the presence of array steering vector mismatch. To solve this problem, a robust beamforming algorithm based on semi-definite programming and rank-one decomposition is proposed, which improves the robustness of the adaptive beamforming by estimating an actual steering vector. The constraints for estimating the steering vector are deduced under the requirement that the estimate does not weaken the ability to suppress interference and noise, and the analysis shows that the approach to formulating constraint using matrix pre-filter is reasonable. The optimization problem is constructed and converted into a semi-definite relaxation problem, and rank-one decomposition technique is adopted in order to obtain the optimal solution. The simulation results demonstrate that compared with the existing algorithms, the proposed algorithm offers high SINR (signal to interference plus noise power ratio) and accuracy of power estimation, with the sole prior information about the angular vector in which the actual signal lies.

Keywords: robust adaptive beamforming, semi-definite programming, rank-one decomposition, steering vector estimation

PACS: 43.60.Fg, 42.60.Jf, 84.40.Ua

DOI: 10.7498/aps.62.184302

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51279043, 61201411, 51209059).

[†] Corresponding author. E-mail: wuwenfenggood@163.com