

平板在任意周期表面热扰动作用下的非 Fourier 热传导的求解与分析*

赵伟涛¹⁾²⁾ 吴九汇^{1)2)†}

1) (西安交通大学机械学院, 西安 710049)

2) (西安交通大学, 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

(2013年4月2日收到; 2013年5月4日收到修改稿)

分析了平板前表面遭受任意周期热扰动这类非 Fourier 传热情形下的温度响应. 采用双曲型热传导方程描述平板表面温度急速变化时的热传导问题. 为求解此类方程, 首先利用分离变量法和 Duhamel 积分原理, 得到了平板前表面遭受突变热流和简谐热流两种情况下的解析解. 然后, 在此基础上应用 Fourier 级数展开法和叠加原理, 获得了平板前表面热流任意周期变化时非 Fourier 热传导下温度场的解析表达式. 利用得到的解析表达式进行数值模拟, 分析了不同热松弛时间、不同时刻和不同位置对温度响应的影响, 讨论了非 Fourier 热传导模型所给出的温度响应与 Fourier 热传导模型的差别. 这种方法能够处理许多在生产实际中具有周期边界条件的非 Fourier 热传导问题.

关键词: 非 Fourier 热传导, 周期变化, 温度响应, 平板

PACS: 44.10.+i, 44.90.+c

DOI: 10.7498/aps.62.184401

1 引言

自从 17 世纪 Fourier 建立了导热的数学模型, Fourier 定律随之被广泛应用于导热问题分析的各个领域. 对于热作用时间较长的稳态传热过程以及热传播速度较快的非稳态常规传热过程, 采用 Fourier 定律来描述热流密度与温度梯度之间的关系是可以满足精度要求的. 但是, Fourier 定律不涉及传热时间项, 隐含了热扰动传播速度为无限大的假设. 随着科学技术的进步, 超短激光脉冲的出现和制冷水平的提高, 存在着极高 (低) 温条件下的传热问题和超急速传热问题, 使得 Fourier 定律中的准平衡条件假设不再成立^[1-4].

为了克服 Fourier 定律的局限性, Cattaneo^[5] 和 Vernotte^[6] 分别独立地提出了具有热流延迟相的非 Fourier 热传导模型, 计及热流变化率对热传导的影

响, 其修正后的热传导方程为

$$\mathbf{q} = -k\nabla T - \tau_0 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{q}$ 是热流矢量, T 为温度, k 为热传导率, t 是时间, τ_0 为热松弛时间. 方程 (1) 结合能量守恒方程得到以温度 T 描述的双曲线型热传导方程:

$$a\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (2)$$

其中, $a = k/(\rho c)$ 为热扩散系数, ρ 为密度, c 为常应变比热.

为描述热以有限速度传播这一超常规热传导现象, 研究者们对方程 (2) 在不同初始条件和边界条件下进行了求解. Tao 等^[7] 采用数值模拟研究了固体激光器的非 Fourier 导热问题. 李世荣等^[8] 采用单相延迟模型, 研究了薄板在受周期热流边界条件下板内的温度响应. Sarkar 和 Haji-Sheikh^[9] 采用 Laplace 变换技术研究了由介电材料制成的有限平板的双曲线型热传导问题. Tang 和 Araki^[10] 求解了

* 教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-09-0644)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20090201120047) 和教育部长江学者和创新团队发展计划 (批准号: IRT1172) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: ejhwu@mail.xjtu.edu.cn

表面周期性加热条件下有限介质的非 Fourier 热传导问题. Moosaie^[11] 在 Tang 等的工作基础上, 运用 Fourier 积分表达式, 求解了有限介质在周期表面热扰动条件下的非 Fourier 热传导问题. Barletta 和 Zanchini^[12] 分析了无限圆柱体存在内热源以及外界流体有热对流的情况下的双曲型热传导问题. Atefi 和 Talaei^[13] 使用分离变量法求解了边界条件不随时间变化的无限长圆筒的非 Fourier 温度场. Mishra 和 Sahai^[14] 运用格子 Boltzmann 法研究了一维圆柱和球体的非 Fourier 热传导问题. Jiang^[15] 运用 Laplace 变换法研究了空心球体在内外两个表面温度突然变化时的双曲型热传导问题. Shirmohammadi 和 Moosaie^[16] 采用分离变量法得到空心球体在周期表面热流条件下的解析解.

本文主要运用 Duhamel 积分和 Fourier 级数展开法得到平板前表面热流任意周期变化时双曲型热传导方程的解析解. 首先采用 Duhamel 积分和分离变量法分析了方程在平板前表面遭受突变热流和简谐热流这两类特殊情况下解的形式, 在此基础上应用 Fourier 级数展开法和叠加原理研究了平板前表面热流任意周期变化时解的形式. 按照这些表达式, 不同周期边界条件下平板的双曲线热传导行为得到分析和研究. 这为工程应用和数值计算的验证提供了便利.

2 数学模型

考虑一厚度为 L , 边界绝缘, 热物性为常数的平板, 假设其初始温度 $T(x, 0) = T_0$, 从时间 $t = 0$ 时起, 平板一表面 $x = 0$ 处 (称该表面为平板前表面, 另一面称平板后表面) 遭受一热流为 $q_0 \cdot q(t)$ 的作用. 在这种情况下, 由方程 (2) 可得一维平板的非 Fourier 热传导方程:

$$\tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3)$$

其边界条件为

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= q_0 \left[q(t) + \tau_0 \frac{dq(t)}{dt} \right], \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

初始条件为

$$T(x, 0) = T_0, \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

为了获得方程 (3)—(5) 的无量纲形式, 特引入以下无量纲量:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= k \frac{T - T_0}{Lq_0}, \quad X = \frac{x}{L}, \\ Fo &= \frac{at}{L^2}, \quad Ve^2 = \frac{a\tau_0}{L^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中, Fo 是 Fourier 数, Ve 是 Vernotte 数, $1/Ve$ 代表温度波传播的无量纲速度.

则方程 (3)—(5) 无量纲化之后为

$$Ve^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial Fo^2} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial X^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{T}(X, Fo)}{\partial X} \Big|_{X=0} = f(Fo), \quad \frac{\partial \bar{T}(X, Fo)}{\partial X} \Big|_{X=1} = 0, \quad (8)$$

$$\bar{T}(X, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}(X, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{Fo=0} = 0, \quad (9)$$

式中,

$$f(Fo) = - \left\{ q \left(\frac{L^2}{a} Fo \right) + Ve^2 \frac{d}{dFo} q \left(\frac{L^2}{a} Fo \right) \right\}. \quad (10)$$

3 分析求解

由于边界条件 (8) 式中的 $f(Fo)$ 是任意函数, 这就使得直接求解方程 (7) 变得不可能. 因此, 首先假定 $f(Fo)$ 为一时间无关量 f , 求解此条件下的温度场; 其次运用 Duhamel 积分, 求解在任意函数 $f(Fo)$ 下的温度场.

设在边界条件 f 下方程 (7) 的解为

$$\bar{T}(r, t) = \theta(X, Fo) + v(X) + \varphi(Fo), \quad (11)$$

$v(X)$ 的定解问题为

$$\frac{d^2 v}{dX^2} = c, \quad (12)$$

$$\frac{dv}{dX} \Big|_{X=0} = f, \quad \frac{dv}{dX} \Big|_{X=1} = 0; \quad (13)$$

$\varphi(Fo)$ 的定解问题为

$$Ve^2 \frac{d^2 \varphi}{dFo^2} + \frac{d\varphi}{dFo} = c, \quad (14)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dFo} \Big|_{Fo=0} = 0; \quad (15)$$

$\theta(X, Fo)$ 的定解问题为

$$Ve^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial Fo^2} + \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial X} \right|_{X=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial X} \right|_{X=1} = 0, \quad (17)$$

$$\theta(X, 0) = -v(X), \quad (18a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial Fo} \right|_{Fo=0} = 0; \quad (18b)$$

微分方程 (12) 在边界条件 (13) 下的特解为

$$v(X) = \left(-\frac{X^2}{2} + X \right) f = A(X)f; \quad (19)$$

微分方程 (14) 在边界条件 (15) 下的特解为

$$\varphi(Fo) = Ve^2 \left(1 - \frac{Fo}{Ve^2} - e^{-\frac{Fo}{Ve^2}} \right) f. \quad (20)$$

采用分离变量法求解偏微分方程 (16), 令

$$\theta(X, Fo) = Y(X)Z(Fo). \quad (21)$$

将 (21) 式代入方程 (16), 得到以下两个常微分方程

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + \lambda^2 Y = 0, \quad (22)$$

$$Ve^2 \frac{d^2 Z}{dFo^2} + \frac{dZ}{dFo} + \lambda^2 Z = 0, \quad (23)$$

其中 λ 为分离常数. 常系数齐次线性微分方程 (22) 在边界条件 (17) 下的解为

$$Y = C \cos(\lambda_n X) = CR(\lambda_n X), \quad (24)$$

式中, $\lambda_n = n\pi$, n 是自然数.

方程 (23) 在边界条件 (18b) 下的解为

$$Z_n(Fo) = \begin{cases} \left\{ \sinh\left(\frac{\beta_n Fo}{2Ve^2}\right) + \beta_n \cosh\left(\frac{\beta_n Fo}{2Ve^2}\right) \right\} e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} \\ \beta_n = \text{实数} \\ \left\{ \sin\left(\frac{\beta_{1n} Fo}{2Ve^2}\right) + \beta_{1n} \cos\left(\frac{\beta_{1n} Fo}{2Ve^2}\right) \right\} e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} \\ \beta_n = \beta_{1n} i \end{cases}, \quad (25)$$

式中

$$\beta_n = \sqrt{1 - 4Ve^2 \lambda_n^2}. \quad (26)$$

把 (24) 和 (25) 式代入方程 (21) 得

$$\begin{aligned} \theta(X, Fo) &= \sum_{n=0}^N C_n \left\{ \sinh\left(\frac{\beta_n Fo}{2Ve^2}\right) + \beta_n \cosh\left(\frac{\beta_n Fo}{2Ve^2}\right) \right\} \\ &\times e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} R(\lambda_n X) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \left\{ \sin\left(\frac{\beta_{1n} Fo}{2Ve^2}\right) + \beta_{1n} \cos\left(\frac{\beta_{1n} Fo}{2Ve^2}\right) \right\} \times e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} R(\lambda_n X), \quad (27)$$

式中, 当 $n \leq N$ 时, β_n 为实数.

(27) 式满足边界条件 (18a), 再利用特征函数 (24) 式的正交性可得

$$C_n = -\frac{\int_0^1 A(X) R(\lambda_n X) dX}{\int_0^1 |\beta_n| R^2(\lambda_n X) dX} f = \xi_n f. \quad (28)$$

把 (19) 和 (24) 式代入 (28) 式得

$$\xi_n = \begin{cases} -\frac{1}{3} & n = 0 \\ \frac{2}{\beta_n \lambda_n^2} & 0 < n \leq N \\ \frac{2}{\beta_{1n} \lambda_n^2} & n > N \end{cases}. \quad (29)$$

因此由方程 (11) 可得边界条件不随时间变化时的温度场 $\bar{T}(X, Fo)$ 的表达式

$$\bar{T}(X, Fo) = Q(X, Fo)f, \quad (30)$$

式中,

$$\begin{aligned} Q(X, Fo) &= -\frac{X^2}{2} + X + Ve^2 \left(1 - \frac{Fo}{Ve^2} - e^{-\frac{Fo}{Ve^2}} \right) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n Z_n(Fo) R(\lambda_n X). \end{aligned} \quad (31)$$

当边界条件为任意随时间变化量 $f(Fo)$ 时, 运用 Duhamel 积分求解此条件下的温度场:

$$\bar{T}(X, Fo) = \int_0^{Fo} \frac{\partial Q(X, Fo')}{\partial Fo'} f(Fo - Fo') dFo'. \quad (32)$$

把 (10) 式代入 (32) 式, 并采用分部积分可得:

$$\begin{aligned} \bar{T}(X, Fo) &= -\int_0^{Fo} \left[\frac{\partial Q(X, Fo')}{\partial Fo'} + Ve^2 \frac{\partial^2 Q(X, Fo')}{\partial Fo'^2} \right] \\ &\times q \left[\frac{L^2}{a} (Fo - Fo') \right] dFo'. \end{aligned} \quad (33)$$

把 (31) 式代入 (33) 式得平板前表面受到任意热扰动时非 Fourier 导热下的温度场:

$$\begin{aligned} \bar{T}(X, Fo) &= \int_0^{Fo} q \left[\frac{L^2}{a} (Fo - Fo') \right] dFo' \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n M_n(Fo) R(\lambda_n X), \end{aligned} \quad (34)$$

式中

$$M_n(t) = \begin{cases} \frac{1-\beta_n^2}{4Ve^2} \int_0^{Fo} \left[\sinh\left(\frac{\beta_n Fo'}{2Ve^2}\right) + \beta_n \cosh\left(\frac{\beta_n Fo'}{2Ve^2}\right) \right] e^{-\frac{Fo'}{2Ve^2}} q \left[\frac{L^2}{a} (Fo - Fo') \right] dFo' & \beta_n = \text{实数} \\ \frac{\beta_{1n}^2 + 1}{4Ve^2} \int_0^{Fo} \left[\sin\left(\frac{\beta_{1n} Fo'}{2Ve^2}\right) + \beta_{1n} \cos\left(\frac{\beta_{1n} Fo'}{2Ve^2}\right) \right] e^{-\frac{Fo'}{2Ve^2}} q \left[\frac{L^2}{a} (Fo - Fo') \right] dFo' & \beta_n = \beta_{1n} i \end{cases} \quad (35)$$

当 $Ve \rightarrow 0$ 时, 方程 (7) 对应经典 Fourier 导热的情形. 此时 β_n 为实数, (35) 式变为

$$M_n(t) = \lim_{Ve \rightarrow 0} \frac{1-\beta_n^2}{4Ve^2} \int_0^{Fo} \left[\sinh\left(\frac{\beta_n Fo'}{2Ve^2}\right) + \beta_n \cosh\left(\frac{\beta_n Fo'}{2Ve^2}\right) \right] e^{-\frac{Fo'}{2Ve^2}} q \left[\frac{L^2}{a} (Fo - Fo') \right] dFo'. \quad (36)$$

把 (26) 式代入 (36) 式进行整理得:

$$M_n(Fo) = \lambda_n^2 \int_0^{Fo} e^{-\lambda_n^2 Fo'} q \left[\frac{L^2}{a} (Fo - Fo') \right] dFo'. \quad (37)$$

把 (37) 式代入 (34) 式可得经典 Fourier 导热时平板内部的温度场.

4 结果分析与讨论

为了得到任意周期边界条件下平板温度场的解析解, 将做如下递进式推导. 4.1 给出了边界条件为常数的情况; 4.2 的边界条件为简谐周期函数; 4.3 在前两步的基础上, 计算与讨论了边界条件可用 Fourier 级数展开的任意周期函数的情况.

4.1 突变边界条件

当厚度为 L 的平板前表面遭受大小为 q_0 的突变热扰动 ($q(t) = 1$) 时, 无量纲化后

$$f(Fo) = -1. \quad (38)$$

此时 (30) 式就是方程 (7) 在边界条件为常数下的解

$$\bar{T}(X, Fo) = -Q(X, Fo). \quad (39)$$

对于 Fourier 导热, 当 $Ve \rightarrow 0$ 时, 方程的解为

$$\bar{T}(X, Fo) = - \left\{ -\frac{X^2}{2} + X - Fo + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n R(\lambda_n X) e^{-\lambda_n^2 Fo} \right\}. \quad (40)$$

根据 (39) 式, 可以计算得到厚度为 L 的平板前表面遭受一突变热扰动时的温度分布. 为了验证结果

的可靠性, 直接对方程 (7)—(9) 进行数值求解. 图 1 给出了平板前表面遭受突变热扰动时, 在 $Ve = 0.8$ 下, 平板后表面温度响应的数值解与解析解的对比. 可以看出, 数值解和解析解的误差非常小, 几乎看不到差异, 从而验证了解析解的正确性.

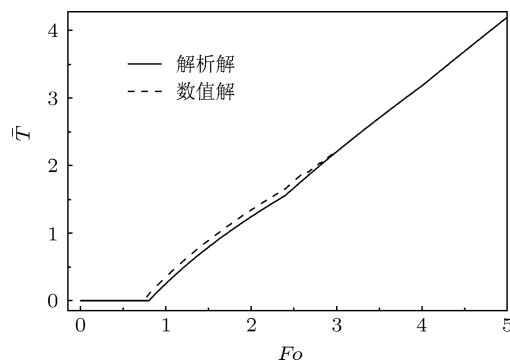


图 1 平板前表面遭受突变热扰动时后表面温度响应的数值解与解析解的比较

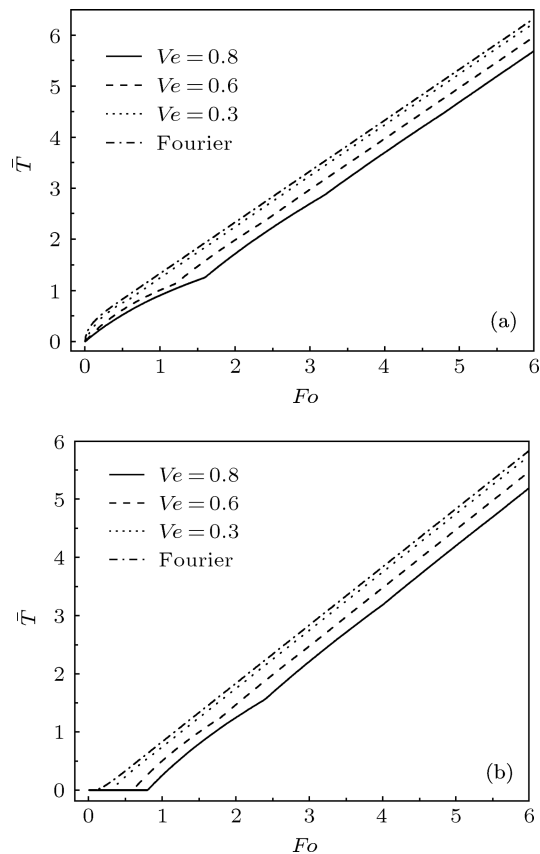


图 2 平板前表面遭受突变热扰动时不同热弛豫时间 Ve 下的表面温度响应 (a) 前表面温度响应; (b) 后表面温度响应

图 2 给出了平板前表面遭受突变热扰动时不同无量纲热松弛时间 Ve 下, 平板两表面无量纲温度随无量纲时间的变化曲线. 可以看出当 $Ve = 0.3, 0.6, 0.8$ 时, 其温度分布曲线与典型的 Fourier 温度分布曲线已不一致, 尤其是当 $Ve = 0.6, 0.8$ 时, 其曲线有了凸凹点, 热传导的非 Fourier 效应变得更加明显. 从图 2(b) 可以看出其温度响应曲线均存在一明显的延迟, 由于热波的传播速度为 $1/Ve$, 所以在平板后表面 (无量纲化后 $X = 1$), 其延迟时间为 $Fo_0 = Ve$.

4.2 简谐变化边界条件

当厚度为 L 的平板前表面遭受一幅值为 q_0 , 角

频率为 α 的简谐热扰动 ($q(t) = \cos(\alpha t)$) 时

$$q \left[\frac{L^2}{a} (Fo - Fo') \right] = \cos \left[\frac{1}{Fo_1} (Fo - Fo') \right], \quad (41)$$

式中, $Fo_1 = a/\alpha L^2$.

把 (41) 式代入 (34) 和 (35) 式得平板前表面热扰动简谐变化时平板内部的温度场分布

$$\begin{aligned} \bar{T}(X, Fo) = Fo_1 \sin \left(\frac{Fo}{Fo_1} \right) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n T_n(Fo) R(\lambda_n X), \end{aligned} \quad (42)$$

式中

$$T_n(Fo) = \begin{cases} \frac{(\beta_n^2 - 1) Fo_1}{(Fo_1^2 - \beta_n^2 Fo_1^2 + 4Ve^4)^2 + 16\beta_n^2 Ve^4 Fo_1^2} \left\{ - \left[\left(\frac{1 - \beta_n^4}{2} \right) Fo_1^3 - 2(\beta_n^2 - 1) Ve^4 Fo_1 \right] \right. \\ \quad \times \sinh \left(\frac{\beta_n Fo}{2Ve^2} \right) e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} - \beta_n (\beta_n^2 - 1) Fo_1^3 \cosh \left(\frac{\beta_n Fo}{2Ve^2} \right) e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} - [\beta_n (\beta_n^2 + 3) Ve^2 Fo_1^2 \\ \quad \left. - 4\beta_n Ve^6] \sin \left(\frac{Fo}{Fo_1} \right) + \beta_n (\beta_n^2 - 1) Fo_1^3 \cos \left(\frac{Fo}{Fo_1} \right) \right\} & \beta_n = \text{实数} \\ - \frac{(\beta_{1n}^2 + 1) Fo_1}{(Fo_1^2 + \beta_{1n}^2 Fo_1^2 + 4Ve^4)^2 - 16\beta_{1n}^2 Ve^4 Fo_1^2} \left\{ \left[\left(\frac{1 - \beta_{1n}^4}{2} \right) Fo_1^3 + 2(\beta_{1n}^2 + 1) Ve^4 Fo_1 \right] \right. \\ \quad \times \sin \left(\frac{\beta_{1n} Fo}{2Ve^2} \right) e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} + \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 + 1) Fo_1^3 \cos \left(\frac{\beta_{1n} Fo}{2Ve^2} \right) e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} + [\beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - 3) Ve^2 Fo_1^2 \\ \quad \left. - 4\beta_{1n} Ve^6] \sin \left(\frac{Fo}{Fo_1} \right) - \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 + 1) Fo_1^3 \cos \left(\frac{Fo}{Fo_1} \right) \right\} & \beta_n = \beta_{1n} i \end{cases} \quad (43)$$

对于 Fourier 导热, 当 $Ve \rightarrow 0$ 时, 把 (41) 式代入 (34) 和 (37) 式可得

$$\begin{aligned} \bar{T}(X, Fo) = Fo_1 \sin \left(\frac{Fo}{Fo_1} \right) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n T_n(Fo) R(\lambda_n X), \end{aligned} \quad (44)$$

式中

$$\begin{aligned} T_n(Fo) = \frac{\lambda_n^2 Fo_1}{1 + \lambda_n^4 Fo_1^2} \left[- \lambda_n^2 Fo_1 e^{-\lambda_n^2 Fo} + \sin \left(\frac{Fo}{Fo_1} \right) \right. \\ \left. + \lambda_n^2 Fo_1 \cos \left(\frac{Fo}{Fo_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

使用 (42) 式, 可以模拟得到厚度为 L 的平板在其前表面受到简谐热扰动时, 平板前后两表面的温

度响应.

图 3 给出了平板前表面在简谐热流作用下, 当 $Fo_1 = 0.25, Ve = 0.8$ 时, 平板前后两表面的温度响应曲线, 反映出了非 Fourier 热传导的瞬态温度特性. 从图 3 可以看出两条曲线都存在一系列阶跃点, 它们表示温度波波前经过边界的传播和反射到达的时刻. 由于热波的传播速度为 $1/Ve$, 所以在两表面 $X(X = 0, 1)$ 处, 阶跃点位置为 $Fo = Ve \cdot X, Ve(2 + X), Ve(4 + X), \dots$. 由于扩散的作用, 前表面温度波的阶跃值和幅值要比后表面的大. 从图 3 还可以看出温度波曲线的阶跃点随着时间的增加而减小并逐渐消失, 曲线最终变成光滑的周期曲线.

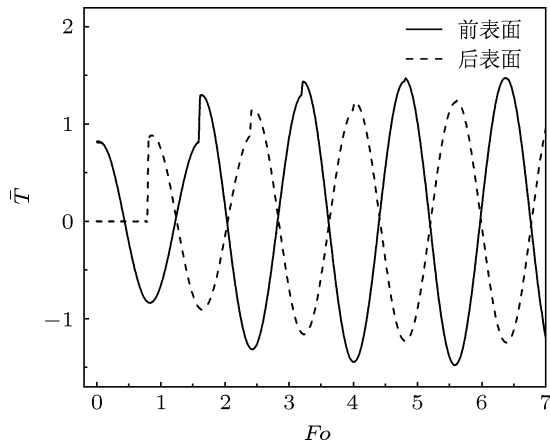


图3 平板前表面遭受简谐热扰动时前后两表面的温度响应 ($Fo_1 = 0.25$, $Ve = 0.8$)

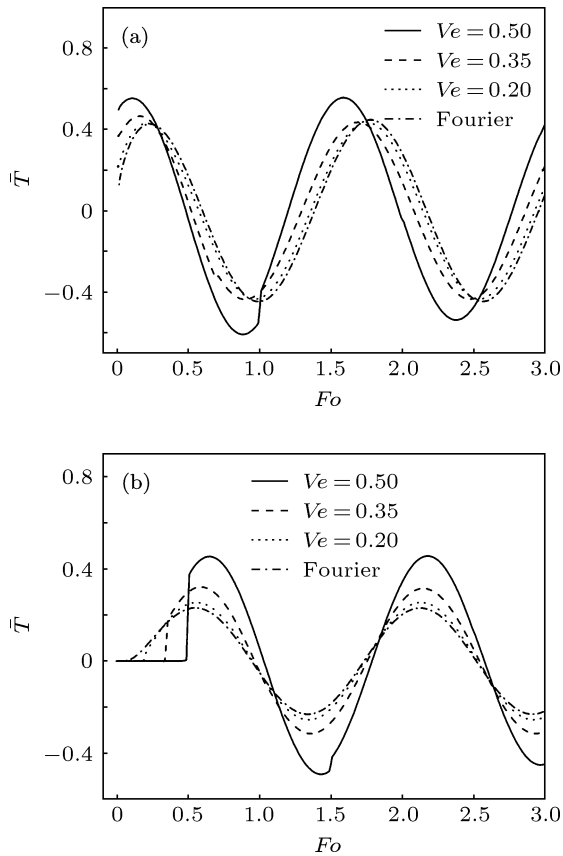


图4 平板前表面遭受简谐热扰动时不同热松弛时间 Ve 下前后两表面的温度响应 ($Fo_1 = 0.25$) (a) 前表面温度响应; (b) 后表面温度响应

图4给出了在前表面遭受简谐热扰动和 $Fo_1 = 0.25$ 的情况下, 不同无量纲热松弛时间 Ve 下, 平板前后两表面处无量纲温度随无量纲时间的变化曲线, 以及采用 (44) 式得到的 Fourier 热传

导模型下的温度响应曲线. 从图中可以看出, 随着热松弛时间 Ve 的减小, 热波的传播速度增大, 热量能够迅速地传递, 从而导致平板内温度响应的幅值也随之减小, 非 Fourier 效应逐渐减弱. Ve 越小, 非 Fourier 和 Fourier 的温度响应曲线越接近.

4.3 任意周期边界条件

当厚度为 L 的平板前表面遭受任意周期热流变化时, 假设该周期函数 $q_0 \cdot q(t)$ 的周期为 $2l$. 在实际问题中, $q(t)$ 只能在 $t \geq 0$ 上有定义, 故我们可以在 $t < 0$ 的区间内将函数 $q(t)$ 进行偶延拓, 使 $q(t) = q(-t)$, 即延拓后的函数为偶函数. 这样周期函数 $q(t)$ 可以展开成余弦级数的形式

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \frac{i\pi t}{l}, \quad (46)$$

式中, a_i 为 Fourier 系数, 可以由三角函数的正交性计算得到

$$a_i = \frac{2}{l} \int_0^l q(t) \cos \frac{i\pi t}{l} dt \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (47)$$

由于控制方程 (7), 边界条件 (8) 和初始条件 (9) 都是线性的, 满足叠加原理, 为此我们可以先求方程 (7) 在满足以下边界条件情况下的解:

$$\left. \frac{\partial \bar{T}(X, Fo)}{\partial X} \right|_{X=0} = f_i(Fo), \quad \left. \frac{\partial \bar{T}(X, Fo)}{\partial X} \right|_{X=1} = 0, \quad (48)$$

式中

$$f_i(Fo) = -a_i \left\{ q\left(\frac{Fo}{Fo_{1i}}\right) + Ve^2 \frac{dq\left(\frac{Fo}{Fo_{1i}}\right)}{dFo} \right\},$$

$$Fo_{1i} = \frac{a}{\alpha_i L^2}, \quad \alpha_i = \frac{i\pi}{l}. \quad (49)$$

当 $i \geq 1$ 时, 方程 (7) 在边界条件 (48) 和初始条件 (9) 下的解可以根据 (42) 和 (43) 式得到:

$$\bar{T}_i(X, Fo) = a_i \left[Fo_{1i} \sin\left(\frac{Fo}{Fo_{1i}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n T_{in}(Fo) R(\lambda_n X) \right] \quad (i \geq 1), \quad (50)$$

式中

$$T_{in}(Fo) = \begin{cases} \frac{(\beta_n^2 - 1) Fo_{1i}}{(Fo_{1i}^2 - \beta_n^2 Fo_{1i}^2 + 4Ve^4)^2 + 16\beta_n^2 Ve^4 Fo_{1i}^2} \left\{ - \left[\left(\frac{1 - \beta_n^4}{2} \right) Fo_{1i}^3 - 2(\beta_n^2 - 1) Ve^4 Fo_{1i} \right] \right. \\ \times \sinh \left(\frac{\beta_n Fo}{2Ve^2} \right) e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} - \beta_n (\beta_n^2 - 1) Fo_{1i}^3 \cosh \left(\frac{\beta_n Fo}{2Ve^2} \right) e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} - [-\beta_n (\beta_n^2 + 3) Ve^2 Fo_{1i}^2 \\ \left. - 4\beta_n Ve^6 \right] \sin \left(\frac{Fo}{Fo_{1i}} \right) + \beta_n (\beta_n^2 - 1) Fo_{1i}^3 \cos \left(\frac{Fo}{Fo_{1i}} \right) \Big\} & \beta_n = \text{实数} \\ \\ - \frac{(\beta_{1n}^2 + 1) Fo_{1i}}{(Fo_{1i}^2 + \beta_{1n}^2 Fo_{1i}^2 + 4Ve^4)^2 - 16\beta_{1n}^2 Ve^4 Fo_{1i}^2} \left\{ \left[\left(\frac{1 - \beta_{1n}^4}{2} \right) Fo_{1i}^3 + 2(\beta_{1n}^2 + 1) Ve^4 Fo_{1i} \right] \right. \\ \times \sin \left(\frac{\beta_{1n} Fo}{2Ve^2} \right) e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} + \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 + 1) Fo_{1i}^3 \cos \left(\frac{\beta_{1n} Fo}{2Ve^2} \right) e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} + [\beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - 3) Ve^2 Fo_{1i}^2 \\ \left. - 4\beta_{1n} Ve^6 \right] \sin \left(\frac{Fo}{Fo_{1i}} \right) - \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 + 1) Fo_{1i}^3 \cos \left(\frac{Fo}{Fo_{1i}} \right) \Big\} & \beta_n = \beta_{1n} i \end{cases} \quad (51)$$

当 $i = 0$ 时, 方程 (7) 的解可以由 (39) 式得到:

$$\bar{T}_0(X, Fo) = -\frac{a_0}{2} Q(X, Fo). \quad (52)$$

把 (50) 与 (52) 式进行叠加, 可得平板表面温度任意周期变化时的非 Fourier 温度场:

$$\bar{T}(X, Fo) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{T}_i(X, Fo). \quad (53)$$

当 $Ve \rightarrow 0$ 时, 根据叠加原理与 (40), (44) 和 (45) 式, 可得在任意周期边界条件下的非 Fourier 导热温度场:

$$\begin{aligned} \bar{T}(r, t) &= -\frac{a_0}{2} \left[-\frac{X^2}{2} + X - Fo + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n R(\lambda_n X) e^{-\lambda_n^2 Fo} \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left[Fo_{1i} \sin \left(\frac{Fo}{Fo_{1i}} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n T_{in}(Fo) R(\lambda_n X) \right], \end{aligned} \quad (54)$$

式中

$$\begin{aligned} T_{in}(Fo) &= \frac{\lambda_n^2 Fo_{1i}}{1 + \lambda_n^4 Fo_{1i}^2} \left[-\lambda_n^2 Fo_{1i} e^{-\lambda_n^2 Fo} + \sin \left(\frac{Fo}{Fo_{1i}} \right) \right. \\ &\left. + \lambda_n^2 Fo_{1i} \cos \left(\frac{Fo}{Fo_{1i}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

4.4 应用举例

设 $q(t)$ 是周期为 2π 的三角波函数 (如图 5 所示), 它在 $[0, 2\pi)$ 上的表达式为

$$q(t) = \begin{cases} t - \frac{\pi}{2} & 0 \leq t < \pi \\ -t + \frac{3\pi}{2} & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}. \quad (56)$$

将函数 $q(t)$ 进行偶延拓后, 展开成余弦级数

$$q(t) = -\frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} \cos(2i-1)t \quad (0 \leq t < \infty). \quad (57)$$

将 (57) 式分别代入 (53) 式和 (54) 式得三角波条件下的非 Fourier 和 Fourier 导热温度场.

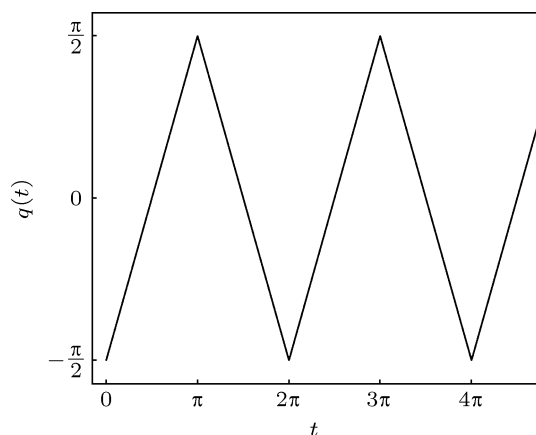


图 5 三角波热扰动

图 6 给出了在前表面遭受三角波热扰动和 $a/L^2 = 0.25$ 的情况下, 不同无量纲热松弛时间 Ve 下, 平板前后两表面处无量纲温度随无量纲时间的变化曲线. 从图 6 可以看出, 该温度响应曲线除具有前面介绍的规律外, 还具有随着 Ve 的增大, 特别是 $Ve = 0.50$ 时, 温度响应曲线形状越接近前表面输入的三角波热扰动信号这样的现象. 这是因为, Ve 越大, 热波的传播速度越小, 其延迟效应越明显, 随着时间的增加, 当阶跃消失时, 其温度响应曲线形状将越接近输入信号.

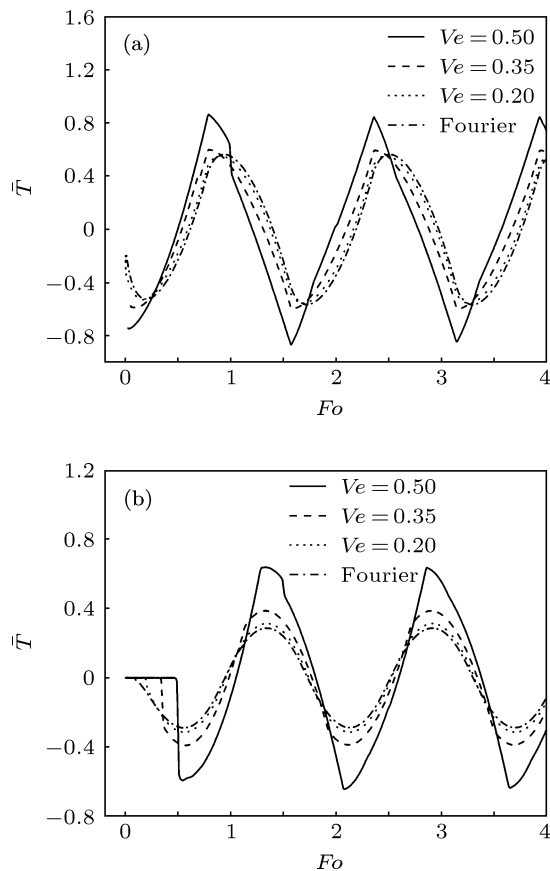


图6 平板前表面遭受三角波热扰动时不同热松弛时间 Ve 下前后两表面的温度响应 ($a/L^2 = 0.25$) (a) 前表面温度响应; (b) 后表面温度响应

5 结论

本文首先通过分离变量法和 Duhamel 积分原理, 对平板前表面遭受突变热扰动和简谐热扰动这两类边界条件下的非 Fourier 热传导问题进行了分析求解, 在此基础上, 利用 Fourier 级数展开法和叠加原理, 得到了双曲线型热传导方程在平板前表面遭受任意周期变化热流时这个最一般情况下的解析解. 通过理论计算与数值模拟, 展示了非 Fourier 热传导模型所给出的温度响应与 Fourier 热传导模型的如下差别:

- 1) 温度响应曲线存在一系列的阶跃点, 在两表面 $X(X = 0, 1)$ 处, 它们依次出现的时间为 $Fo = Ve \cdot X, Ve(2 + X), Ve(4 + X), \dots$, 但随着时间的延长, 温度响应曲线逐渐变得光滑;
- 2) 同一位置处, 温度响应的幅值随着热松弛时间 Ve 的减小而减小, 最终趋近于 Fourier 热传导时的温度响应幅值;
- 3) 具有有限的传播速度, 其大小与 $1/Ve$ 成线性关系;
- 4) 热松弛时间 Ve 越大, 温度响应曲线的形状越和前表面遭受的热流形状相似.

[1] Wang Y Z, Song X N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 234601 (in Chinese) [王颖泽, 宋新南 2012 物理学报 **61** 234601]
 [2] Guo Z Y, Cao B Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4273 (in Chinese) [过增元, 曹炳阳 2008 物理学报 **57** 4273]
 [3] Tian X G, Shen Y P 2012 *Adv. Mech.* **42** 18 (in Chinese) [田晓耕, 沈亚鹏 2012 力学进展 **42** 18]
 [4] Tung T L, Fong E 2011 *Int. J. Heat Mass Transfer* **54** 4796
 [5] Cattaneo C 1948 *Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* **3** 83
 [6] Vernotte P 1958 *C. R. Acad. Sci.* **246** 3154
 [7] Tao Y J, Huai X L, Li Z G 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2487
 [8] Li S R, Zhou F X, Wu H M 2007 *Engineer. Mech.* **24** 48 (in Chinese)

[李世荣, 周凤玺, 吴红梅 2007 工程力学 **24** 48]
 [9] Sarkar D, Haji-Sheikh A 2012 *Int. Commun. Heat Mass Transfer* **39** 1009
 [10] Tang D W, Araki N 1996 *Int. J. Heat Mass Transfer* **39** 1585
 [11] Moosaie A 2007 *Int. Commun. Heat Mass Transfer* **34** 996
 [12] Barletta A, Zanchini E 1997 *Heat and Mass Transfer* **32** 285
 [13] Atefi G, Talaei M R 2011 *Arch. Appl. Mech.* **81** 569
 [14] Mishra S C, Sahai H 2012 *Int. J. Heat Mass Transfer* **55** 7015
 [15] Jiang F M 2006 *Heat and Mass Transfer* **42** 1083
 [16] Shirmohammadi R, Moosaie A 2009 *Int. Commun. Heat Mass Transfer* **36** 827

Solution and analysis of non-Fourier heat conduction in a plane slab under arbitrary periodic surface thermal disturbance^{*}

Zhao Wei-Tao¹⁾²⁾ Wu Jiu-Hui^{1)2)†}

1) (School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

2) (State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 2 April 2013; revised manuscript received 4 May 2013)

Abstract

In this paper, the non-Fourier heat conduction in a plane slab under arbitrary periodic surface thermal disturbance is solved analytically. Hyperbolic heat conduction equation is employed to describe this problem involving high-rate change of temperature. Firstly, when the plane slab surface is subjected to a sudden heat flux change or a harmonic heat flux change, the analytic solution of this problem is found by using the separation of variables method and Duhamel's principle. On this basis, when the plane slab surface is subjected to an arbitrary periodic heat flux change, the analytic solution of temperature field is obtained by using the Fourier series and the principle of superposition. Using the obtained analytical solution, the temperature profiles of the plane slab are analyzed, and the differences between the temperature response obtained by using non-Fourier heat conduction model and that obtained by using Fourier model are discussed. This solution can be applied to more realistic periodic boundary conditions in technology.

Keywords: non-Fourier heat conduction, periodic changes, temperature responses, plane slab

PACS: 44.10.+i, 44.90.+c

DOI: 10.7498/aps.62.184401

^{*} Project supported by the Program for New Century Excellent Talents in University of Education of China (Grant No. NCET-09-0644), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20090201120047), and the Program for Changjiang Scholars and Innovation Research Team in University of Ministry of Education of China (Grant No. IRT1172).

[†] Corresponding author. E-mail: ejhwu@mail.xjtu.edu.cn